

Soluções - Nível 1

1. (20 pontos) Na primeira fase da Copa do Mundo, cada seleção joga contra as demais de seu grupo uma única vez, totalizando três partidas. Em cada partida, o time vencedor ganha 3 pontos, o time perdedor 0 pontos e se der empate os dois times ganham um 1 ponto cada.

Durante a Copa do Mundo de 2022 no Qatar, o grupo G acabou da seguinte maneira:

Grupo G

País	Pontos	Gols Marcados	Gols Sofridos
Brasil	7	4	0
Camarões	4	3	2
Sérvia	4	3	X
Suíça	1	1	4

a) Quantos gols sofreu a seleção da Sérvia?

b) Sabendo que:

- O Brasil não marcou nenhum gol em sua partida contra a Suíça;
- O Brasil não ganhou duas partidas pelo mesmo placar;
- A Suíça fez 1 gol contra a Sérvia;
- A Suíça não tomou 3 gols em uma mesma partida.

Qual o placar da partida entre Sérvia e Camarões ?

Solução

- (a) Primeiro, note que todo gol que foi marcado por um time, foi sofrido por algum outro time, e portanto o total de gols marcados deve ser igual ao total de gols sofrido.

Assim,

$$4 + 3 + 3 + 1 = 0 + 2 + X + 4 \implies X = 5.$$

Portanto, a seleção da Sérvia sofreu 5 gols.

- (b) Para resolver o item b), é suficiente usar as seguintes informações:

- A Suíça fez 1 gol contra a Sérvia e só marcou 1 gol na primeira fase, logo ela não fez nenhum gol nas partidas com Brasil e Camarões;
- Uma vez que o Brasil não marcou nenhum gol em sua partida contra a Suíça, a partida Brasil \times Suíça terminou empatada em 0×0 .
- O Brasil não sofreu nenhum gol;
- O Brasil marcou 7 pontos, logo ele venceu Sérvia e Camarões e empatou em 0×0 com Suíça. Como o Brasil marcou 4 gols e não ganhou duas partidas pelo mesmo placar, o Brasil deve obrigatoriamente ter ganho uma partida por 3×0 e a outra por 1×0 . Agora, como Camarões tomou 2 gols em toda a primeira fase, sabemos que seguintes resultados ocorreram:

$$\text{Brasil } 3 \times 0 \text{ Sérvia,} \quad \text{Brasil } 1 \times 0 \text{ Camarões,} \quad \text{Brasil } 0 \times 0 \text{ Suíça.}$$



- A Sérvia sofreu 5 gols na primeira fase, sendo 3 na partida contra o Brasil e 1 na partida contra a Suíça, logo a Sérvia sofreu 1 gol na partida contra Camarões.
- A Suíça só marcou 1 gol na primeira fase e foi contra a Sérvia. Camarões sofreu 2 gols ao todo na primeira fase. Como Camarões não sofreu nenhum gol da Suíça e sofreu 1 do Brasil então obrigatoriamente sofreu exatamente 1 gol da Sérvia.

Portanto, a partida entre Sérvia e Camarões terminou empatada em 1×1 .



2. (20 pontos) Como tarefa da escola, Maurício cortou vários pedaços de barbante de tamanho exatamente iguais a 1cm , 2cm , 4cm , 8cm , 16cm , 32cm , 64cm , 128cm , 256cm , 512cm e 1024cm .
- a) Qual o menor número de pedaços de barbante que Maurício deve juntar para fazer uma linha reta com tamanho exato de 29cm ?
- b) Qual o menor número de pedaços de barbante que Maurício deve juntar para fazer uma linha reta com tamanho exato de 2022cm ?

Solução

(a) Primeiro, note que pra poder usar o menor número de pedaços, Maurício deve sempre usar o maior tamanho possível.

Assim, deve usar primeiro um barbante de 16cm . Em seguida, deve usar um segundo pedaço de barbante medindo 8cm , totalizando $16 + 8 = 24\text{cm}$.

Como já tem uma linha reta de 24cm , ele não pode usar outro barbante de 8cm , pois $24 + 8 = 32 > 29$. Portanto, deve usar um barbante de 4cm , obtendo uma linha reta de tamanho $24 + 4 = 28\text{cm}$.

O próximo pedaço então deverá ter 1cm , pois $28 + 1 = 29\text{cm}$.

Deste modo, o menor número de pedaços que Maurício deve usar é de 4 pedaços de barbante.

(b) Mais uma vez, para poder usar o menor número de pedaços, Maurício deve sempre usar o maior tamanho possível.

Assim, usa primeiro um barbante de 1024cm . Agora, como $1024 + 1024 = 2048$ é maior que 2022 , o segundo pedaço de barbante deve medir 512cm .

Veja que a tamanho já coberto é de $1024 + 512 = 1536$.

O próximo pedaço não pode ser novamente 512 , pois $1536 + 512 = 2048$. Então o 3° pedaço deve ter tamanho 256 .

O tamanho já coberto é de $1024 + 512 + 256 = 1792$.

Como $1792 + 256 = 2048$, o 4° pedaço mede 128 e o tamanho já coberto é de $1792 + 128 = 1920$.

Como $1920 + 128 = 2048$, o 5° pedaço mede 64 e o tamanho já coberto é de $1920 + 64 = 1984$.

Como $1984 + 64 = 2048$, o 6° pedaço mede 32 e o tamanho já coberto é de $1984 + 32 = 2016$.

Como $2016 + 32 = 2048$, o 7° pedaço não pode medir 32 . Também, como $2016 + 16 = 2032$ e $2016 + 8 = 2024$ são maiores que 2022 , o 7° pedaço não pode medir 16cm ou 8cm .

Logo, o 7° pedaço deve medir 4cm , e o pedaço já coberto é de $2016 + 4 = 2020$

Para obter o total de 2022 , basta tomar o 8° pedaço medindo 2cm , totalizando $2020 + 2 = 2022\text{cm}$.

Portanto, o menor número de pedaços que Maurício deve usar é de 8 pedacos de barbante.

Note que

$$1024 + 512 + 256 + 128 + 64 + 32 + 4 + 2 = 2022.$$

3. O transporte público da cidade de Mathlandia possui três linhas de ônibus que saem de pontos distintos da cidade, as linhas **1**, **2** e **3**, como pode ser visto na figura abaixo. Os ônibus que saem de cada linha param apenas nos seguintes pontos, indicados por letras, para o embarque e desembarque de passageiros:

- **Linha 1:** A, B, C, D
- **Linha 2:** E, A, F, G, D
- **Linha 3:** H, B, D

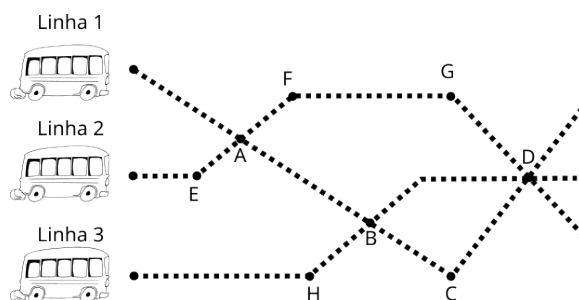
Duas amigas, Joseane e Miriam, que moram perto das paradas A e D, respectivamente, decidiram contar quantos ônibus passam em cada um desses terminais em um dia.

a) Sabendo que Joseane contou um total de 50 ônibus na parada A e Miriam contou 80 ônibus na parada D, qual o total de ônibus que saiu ao longo do dia da Linha 3?

b) No dia seguinte, Joseane e Miriam chamaram um amigo, Maurício, que mora perto da parada B, para participar da atividade. Maurício ficou então responsável em contar a quantidade de ônibus que passa pela parada B.

Joseane e Miriam contaram o mesmo número de ônibus do item a), ou seja, 50 ônibus na parada A e 80 ônibus na parada D, respectivamente.

Sabendo que Maurício contou, na parada B, um total de 15 ônibus, quantos ônibus saíram ao longo do dia da linha 1? Quantos saíram da linha 2?



Solução

Para resolver esta questão, denotaremos por x , y e z o total de ônibus das Linhas 1, 2 e 3, respectivamente.

(a) Como todos os ônibus das Linhas 1 e 2 passam pelo ponto A, temos pela contagem de Joseane que

$$x + y = 50. \quad (1)$$

Agora, como todos os ônibus das Linhas 1, 2 e 3 passam pelo ponto D, temos pela contagem de Miriam que

$$(x + y) + z = 80. \quad (2)$$

Então, podemos substituir a informação (1) em (2), obtendo

$$50 + z = 80.$$

Subtraindo o valor 50 em ambos os lados da equação, chegamos que

$$z = 30.$$



Portanto, podemos afirmar que ao longo do dia saíram 30 ônibus da Linha 3.

(b) O item (b) foi anulado pois, com os dados do problema, não há solução possível!

4. (20 pontos) Os irmãos Maya e Matias receberam de sua mãe quatro notas de R\$ 10 (totalizando R\$ 40) para comprar o álbum de figurinhas da Copa do Mundo de 2022 que custa exatamente R\$ 40.

Como não queriam dividir o álbum, Maya e Matias decidiram fazer um jogo para decidir quem ficaria com todo o dinheiro.

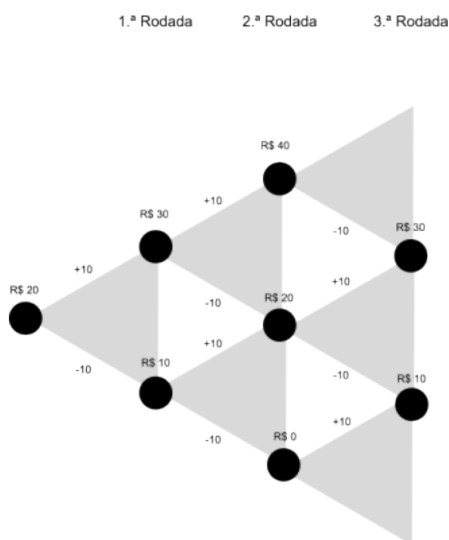
De posse de uma moeda, Maya escolheu Cara, Matias escolheu Coroa e estabeleceram as seguintes regras:

- Cada um começa o jogo com R\$ 20;
 - Se ao lançar a moeda o resultado der Cara, então Maya recebe R\$ 10 e Matias perde R\$ 10, caso tenha;
 - Se ao lançar a moeda o resultado for Coroa, então Matias recebe R\$ 10 e Maya perde R\$ 10, caso tenha;
 - O jogo termina quando algum deles possuir dinheiro suficiente para comprar o álbum;
- a) Se a moeda foi jogada exatamente duas vezes, é possível que Maya tenha ganhado o jogo? Justifique.
- b) Se a moeda foi jogada exatamente três vezes, é possível que Maya tenha ganhado o Jogo? Justifique.
- c) Se a moeda foi jogada exatamente quatro vezes, de quantas maneiras possíveis Maya pode ganhar o jogo? Justifique sua resposta.

Solução

(a) Sim. Se nas duas primeiras rodadas o resultado der Cara, então Maya terá ganhado R\$ 20,00 do irmão que, juntando com os R\$ 20,00 que já possui, terá dinheiro suficiente para comprar o álbum.

(b) Não. Observe que, caso o jogo tenha chegado até a terceira rodada, vemos pelo gráfico abaixo que é possível Maya estar com R\$ 30,00 ou R\$ 10,00, não sendo suficiente para comprar o álbum.

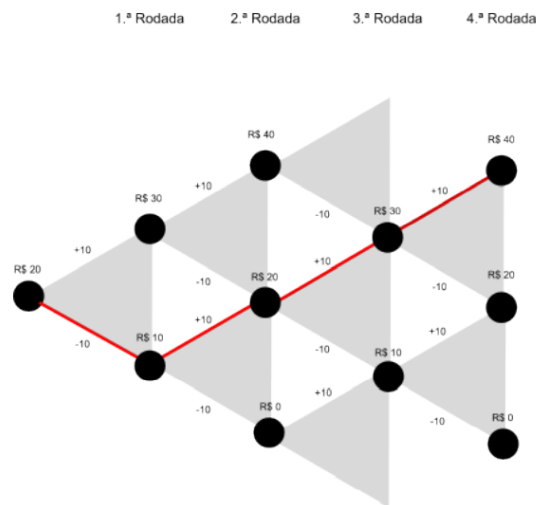
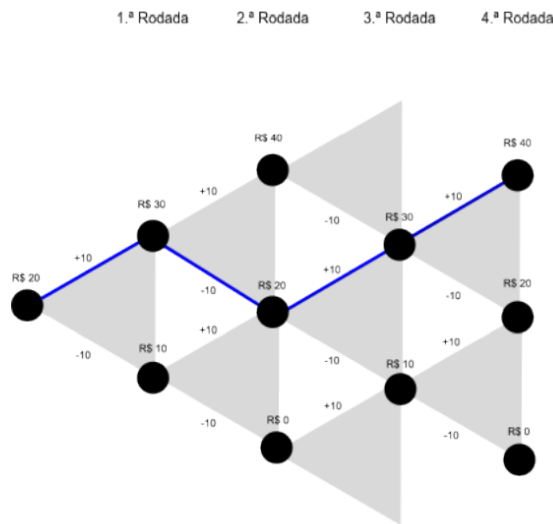


(c) 2 maneiras. Se denotarmos por

- G - Ganhar R\$ 10,00;
- P - Perder R\$ 10,00;

Vemos pelo gráfico abaixo que as possibilidades para ganhar na quarta rodada, ou seja, de ter R \$ 40,00 na quarta rodada são:

$$\{G, P, G, G\} \quad \{P, G, G, G\}$$

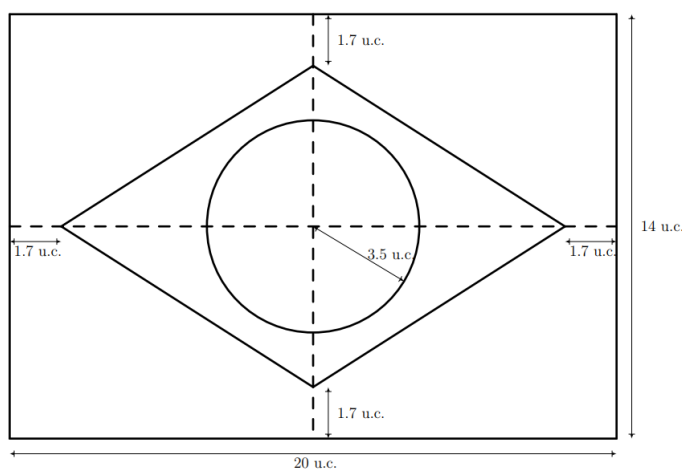


5. (20 pontos) Ramon está muito empolgado para a Copa do Mundo de 2022 e, para torcer em grande estilo, decidiu pintar uma bandeira do Brasil em um tecido branco quadrado com 3 metros de lado.

Perfeccionista que é, Ramon resolveu pesquisar sobre as proporções corretas da bandeira e, para o tamanho do seu tecido, descobriu o seguinte:

- As dimensões do retângulo da bandeira, pintado de verde, obedecem uma escala 20 : 14;
- Cada vértice do losango, pintado de amarelo, fica a 1,7 unidades de comprimento do lado mais próximo do retângulo (em escala). Além disso, as diagonais do losango coincidem com as diagonais do retângulo;
- O círculo, pintado de azul, possui raio de 3,5 unidades de comprimento (em escala).

A figura a seguir contém um primeiro esboço, ainda sem a faixa branca escrita “Ordem e Progresso”, da bandeira. As linhas tracejadas são imaginárias.



Considerando que Ramon deseja fazer uma bandeira cujo maior lado seja exatamente igual ao tamanho do tecido, isto é, 3 metros, responda:

- Qual será o perímetro do retângulo dessa bandeira?
- Qual é o valor, em m^2 , da área a ser pintada de verde?
- Qual é maior: a área a ser pintada de amarelo ou a área a ser pintada de azul? Se necessário, utilize a aproximação 3,14 para o valor de π .

Solução

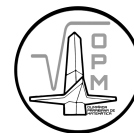
(a) O enunciado nos diz que a escala entre os lados da bandeira é 20 : 14. Como o lado maior da bandeira mede 3 metros, para descobrir a medida do lado menor x podemos fazer uma regra de três simples:

$$\frac{20}{14} = \frac{3}{x}$$
$$20x = 42$$

$$x = 2,1 \text{ m.}$$

Desta forma, o perímetro da bandeira é igual a $3 + 2,1 + 3 + 2,1 = 10,2$ metros.

(b) Uma forma de encontrar a área pintada de verde é calcular a área do retângulo e subtrair a área do losango interno.



A área do retângulo é simples de calcular, pois conhecemos as medidas dos seus lados. Este valor é igual $3 \times 2,1 = 6,3 \text{ m}^2$.

Para calcular a área do losango, vamos determinar, primeiro as medidas de suas diagonais. Em escala, a diagonal maior mede $20 - 1,7 - 1,7 = 16,6$ unidades de comprimento. Sabendo que 20 unidades de comprimento equivalem a 3 metros na bandeira de Ramon, encontramos a medida D desta diagonal por meio de regra de três:

$$\begin{aligned}\frac{20}{16,6} &= \frac{3}{D} \\ 20x &= 49,8 \\ \boxed{D = 2,49 \text{ m}}.\end{aligned}$$

Já a diagonal menor d mede $14 - 1,7 - 1,7 = 10,6$ unidades de comprimento. Sabendo que 20 unidades de comprimento equivalem a 3 metros, encontramos a medida d pelo mesmo caminho:

$$\begin{aligned}\frac{20}{10,6} &= \frac{3}{d} \\ 20x &= 31,8 \\ \boxed{d = 1,59 \text{ m}}.\end{aligned}$$

A área do losango é equivalente à metade do produto entre suas diagonais. Desta forma, **arredondando em duas casas decimais**, encontramos o seguinte valor:

$$\text{Área do losango} = \frac{D \times d}{2} = \frac{2,49 \times 1,59}{2} \approx 1,98 \text{ m}^2.$$

Desta forma, a área do retângulo a ser pintada de verde é igual a $6,3 - 1,98 = 4,32 \text{ m}^2$.

(c) A área a ser pintada de amarelo é igual à área do losango menos a área do círculo, a ser pintada de azul.

O raio r do círculo mede 3,5 unidades de comprimento. Como 20 unidades de comprimento equivalem a 3 metros, determinamos a medida de r por meio de regra de três:

$$\begin{aligned}\frac{20}{3,5} &= \frac{3}{r} \\ 20x &= 10,5 \\ \boxed{r \approx 0,52 \text{ m}}.\end{aligned}$$

Calculando a área do círculo, temos:

$$\text{Área do círculo} = \pi \times r^2 \approx 0,85 \text{ m}^2.$$

Assim, a área a ser pintada de amarelo é igual a $1,98 - 0,85 = 1,13 \text{ m}^2$. Como $1,13 > 0,85$, concluímos que a área a ser pintada de amarelo é maior do que a área a ser pintada de azul.