Soluções - Nível 3

1. (20 pontos) Determine todas as soluções inteiras e positivas da equação

$$x^2 - xy = 49.$$

Entende-se por uma solução inteira e positiva da equação, um par ordenado (x, y), em que x e y são números **inteiros** e **positivos** que satisfazem a referida equação.

Solução

Podemos reescrever a equação na forma

$$x(x - y) = 49$$

e desde que $x \in \mathbb{Z}$ e $x > 0$ então x tem que dividir 49. Assim, devemos ter $x = 1$ ou $x = 7$ ou $x = 49$.

Se $x = 1$ então $1 - y = 49$, ou seja, $y = -48$, o qual não serve.

Se $x = 7$ então $7(7 - y) = 49$, ou seja, $y = 0$, o qual também não serve.

Finalmente, se $x = 49$ então $49(49 - y) = 49$ donde $y = 48$. Logo, a única solução inteira e positiva da equação é o par (49,48).

2. (20 pontos) Em uma loja que vende objetos e rações para animais, há três tipos diferentes de pacotes de uma determinada ração para cachorros: pacotes de 1kg, de 2kg e de 3kg. Sabe-se que, no total, a loja possui 161 pacotes desse tipo de ração e que a soma dos pesos de todos esses pacotes é de 326 kg. A loja possui mais pacotes de 1kg ou de 3kg? (Justifique sua resposta!)

Solução

Vamos denotar por x a quantidade de pacotes de ração de 1kg, por y a quantidade de pacotes de ração de 2kg e por z a quantidade de pacotes de ração de 3kg. Pelas informações fornecidas sobre a loja, devemos ter

$$x + y + z = 161 \quad \text{e} \quad x + 2y + 3z = 326.$$

Multiplicando a primeira equação por -2 e depois somando a segunda equação, deduzimos que $z - x = 4$, ou seja, $z = x + 4$ e isto nos diz que $z > x$. Portanto, a loja possui mais pacotes de 3kg do que de 1kg.

3. (20 pontos) Seja a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{2}{4^x + 2}$.

   a) Mostre que, para todo $x \in \mathbb{R}$, vale

$$f(x) + f(1-x) = 1.$$

   b) Sendo

$$A = f\left(\frac{1}{2022}\right) + f\left(\frac{2}{2022}\right) + f\left(\frac{3}{2022}\right) + \ldots + f\left(\frac{2020}{2022}\right) + f\left(\frac{2021}{2022}\right),$$

   calcule $2A + 1$.

   Dica: Para o item b), você pode usar o item a).

Solução

a) Para qualquer $x \in \mathbb{R}$, temos

$$f(x) + f(1-x) = \frac{2}{4^x + 2} + \frac{2}{4^{1-x} + 2} = \frac{2.4^{1-x} + 4 + 2.4^x + 4}{(4^x + 2)(4^{1-x} + 2)} = \frac{2.4^{1-x} + 4 + 2.4^x + 4}{2.4^{1-x} + 4 + 2.4^x + 4} = 1.$$

b) Note que a soma A possui 2021 parcelas, as 1010 primeiras parcelas, a parcela do meio $f(1011/2022)$ e as 1010 últimas. Por outro lado, usando o item a), temos

$$f\left(\frac{1}{2022}\right) + f\left(\frac{2021}{2022}\right) = 1,\ f\left(\frac{2}{2022}\right) + f\left(\frac{2020}{2022}\right) = 1,\ \ldots,\ f\left(\frac{2010}{2022}\right) + f\left(\frac{2012}{2022}\right) = 1$$

e

$$f\left(\frac{1011}{2022}\right) + f\left(\frac{1011}{2022}\right) = 1 \implies f\left(\frac{1011}{2022}\right) = \frac{1}{2}.$$

Portanto, concluímos que

$$A = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{1010} + \frac{1}{2} \implies 2A + 1 = 2022.$$

4. (20 pontos) Para cada tripla ordenada (a, b, c) de inteiros positivos, podemos definir $m(a, b, c)$ como sendo o valor mínimo atingido pela função quadrática $p(x) = ax^2 + bx + c$, $x \in \mathbb{R}$. Por exemplo, $m(1, 1, 5)$ é o valor mínimo atingido pela função $p(x) = x^2 + x + 5$, o qual é $m(1, 1, 5) = 19/4$.

   a) Determine o maior valor possível para $m(a, b, c)$ quando $a, b, c \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

   Dica: Lembre que o valor mínimo de $p(x) = ax^2 + bx + c$ é dado por $-\dfrac{\Delta}{4a} = c - \dfrac{b^2}{4a}$.

   b) Ao escolhermos ao acaso a, b e c no conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, calcule a probabilidade de obtermos a igualdade

$$m(a, b, c) = 0.$$

Solução

a) Pela dica fornecida, temos

$$m(a, b, c) = c - \frac{b^2}{4a}.$$

Note que $m(a, b, c)$ terá o maior valor possível quando c assumir o maior valor possível e o quociente $b^2/(4a)$ assumir o menor valor possível. Mas, tal quociente terá o menor valor possível quando b assumir o menor valor possível e a assumir o maior valor possível. Desde que $a, b, c \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, então devemos ter $c = 5$, $b = 1$ e $a = 5$. Logo, o maior valor possível para $m(a, b, c)$ será

$$m(5, 1, 5) = 5 - \frac{1^2}{4 \times 5} = \frac{99}{20}.$$

b) Precisamos calcular a probabilidade de obtermos $m(a, b, c) = 0$, ou seja,

$$c - \frac{b^2}{4a} = 0 \iff b^2 = 4ac.$$

Para isto, contaremos quantos são os casos favoraveis, ou seja, em quantos sorteios a tripla ordenada (a, b, c) pode satisfazer a equação $b^2 = 4ac$ e dividiremos pelo número total de triplas ordenadas com $a, b, c \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Perceba que se $b^2 = 4ac$ então b^2 deve ser um múltiplo de 4, o que só é possível quando $b = 2$ ou $b = 4$. Se $b = 2$ então $ac = 1$ e, portanto, devemos ter $a = c = 1$. Logo, obtemos a tripla favorável $(1, 2, 1)$. Agora, se $b = 4$ então $ac = 4$ e, neste caso, devemos ter $a = 1$ e $c = 4$, ou $a = 2$ e $c = 2$, ou $a = 4$ e $c = 1$. Assim, obtemos mais três triplas favoráveis, a saber, (1,4,4), (2,4,2) e (4,4,1), totalizando 4 (quatro) triplas favoráveis. O número total de triplas ordenadas (a, b, c) com $a, b, c \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ é dado por $5 \times 5 \times 5 = 125$. Portanto, a probabilidade P de que a tripla sorteada satisfaça $m(a, b, c) = 0$ é

$$P = \frac{4}{125}.$$

5. (20 pontos) Quatro circunferências de mesmo raio x e um quadrado estão colocados dentro de uma outra circunferência de raio 8, de modo que as quatro circunferências interiores tangenciam a circunferência de raio maior e tangenciam o quadrado (veja Figura 1 abaixo).

   Considere que a configuração geométrica estabelecida na Figura 1 é preservada da seguinte forma: o centro e o raio da maior circunferência estão fixos; o centro do quadrado está fixo; os pontos de tangência das circunferências internas com a externa estão fixos; o raio x pode variar de modo que as circunferências menores preservam tangência com a maior e com o quadrado, o quadrado permaneça no máximo inscrito na maior circunferência, e a interseção entre duas circunferências menores seja no máximo um ponto. Perceba que a variação do raio x causa variação no tamanho do quadrado, e o valor x oscila entre um valor mínimo e um valor máximo.

   Desta forma, encontre os valores máximo e mínimo que x pode assumir.

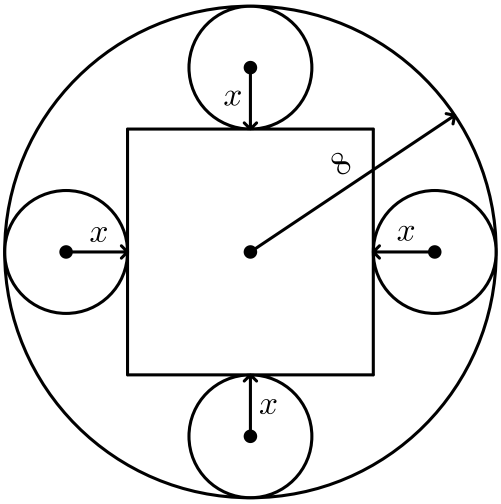

Figura 1

Solução

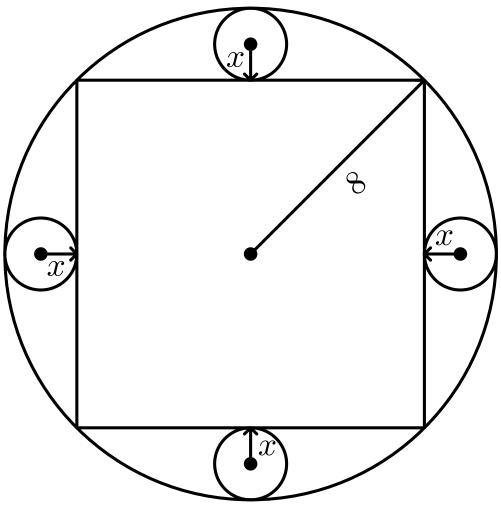

Figura 2

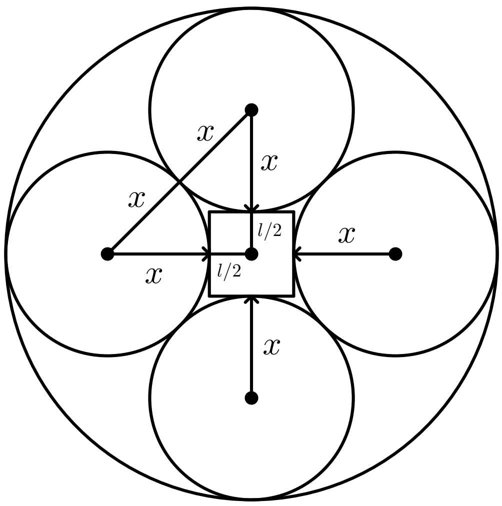

Figura 3

A configuração geométrica cujo raio x é mínimo pode ser descrita pela Figura 2 acima. Neste caso, denotando o lado do quadro por l, devemos ter

$$\text{diagonal do quadrado} = l\sqrt{2} = 2 \times 8 \quad \text{e} \quad 2x + l + 2x = 2 \times 8$$

Pela primeira equação, obtemos $l = 8\sqrt{2}$. Substituindo este valor de l na segunda equação, podemos concluir que $4x = 16 - 8\sqrt{2}$ e, portanto, o valor mínimo de x é $x_{min} = 4 - 2\sqrt{2}$.

A configuração geométrica cujo raio x é máximo é descrita pela Figura 3. Perceba que novamente temos a equação

$$2x + l + 2x = 16 \implies l/2 = 8 - 2x.$$

Por outro lado, aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo da Figura 3, obtemos

$$(x + l/2)^2 + (x + l/2)^2 = (2x)^2$$

Substituindo o valor de $l/2 = 8 - 2x$ nesta última igualdade, deduzimos que

$$2(8 - x)^2 = 4x^2 \implies \sqrt{2}(8 - x) = 2x \implies x_{max} = \frac{8\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}.$$