Soluções - Nível 2

1. (20 pontos) Na escola AmoMat certo dia apareceu misteriosamente uma tabela com todos os números naturais seguindo o padrão mostrado na seguinte figura:

<table>
<tr><td colspan="9">1</td></tr>
<tr><td colspan="3">2</td><td colspan="3">3</td><td colspan="3">4</td></tr>
<tr><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td></tr>
</table>

Junto com a tabela, escrito, havia as seguintes informações:

- Todos os números naturais aparecem uma única vez;
- 1 gera 2, 3 e 4 e estes são todos irmãos;
- Cada número gera exatamente três filhos.

Sabendo que cada linha da tabela corresponde a uma geração, temos que o número 1 pertence à primeira geração, 2, 3 e 4 pertencem à segunda geração, e assim por diante. Responda:

a) Qual a geração do número 2022?

b) Quem gerou 2022?

c) Quem são os filhos de 2022?

Solução

(a) Note que:

- a primeira geração tem somente o 1;
- a segunda geração tem 3 números: $2, 3, 4$;
- a terceira geração tem 9 números: do 5 ao 13;
- a quarta geração tem $9 \times 3 = 27$ números: do 14 ao 40;
- a quinta geração tem $27 \times 3 = 81$ números: do 41 ao 121;
- a sexta geração tem $81 \times 3 = 243$ números: do 122 ao 364;
- a sétima geração tem $243 \times 3 = 729$ números: do 365 ao 1093;
- a oitava geração tem $729 \times 3 = 2187$ números: do 1094 ao 3280;

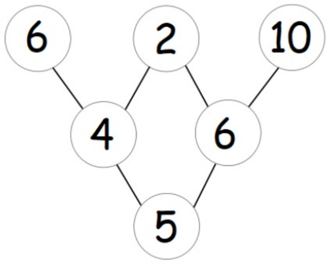
Portanto, 2022 está na oitava geração.

(b) Observe que o gerador de um número é o seu múltiplo de três mais próximo dividido por 3. Como 2022 é múltiplo de 3, basta dividir ele por três para encontrar seu gerador. Assim, $\frac{2022}{3} = 674$ é o gerador de 2022.

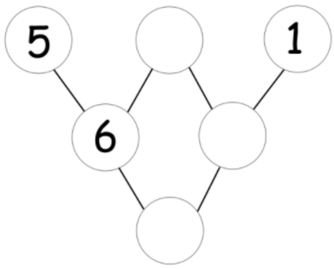
(c) Os filhos de 2022 são:

$$2022 \times 3 = 6066; \qquad (2022 \times 3) - 1 = 6065; \qquad (2022 \times 3) + 1 = 6067.$$

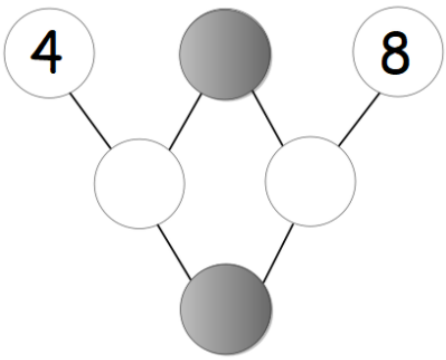
2. (20 pontos) Entediado de jogar Sudoku, Lucas propôs um novo quebra-cabeça para seu irmão Bruno. O quebra-cabeça consiste em completar 6 círculos com números reais de modo que os números nos círculos da segunda e terceira fila sejam a média aritmética dos dois números dos círculos conectados da fila superior. Observe o quebra-cabeça resolvido abaixo.



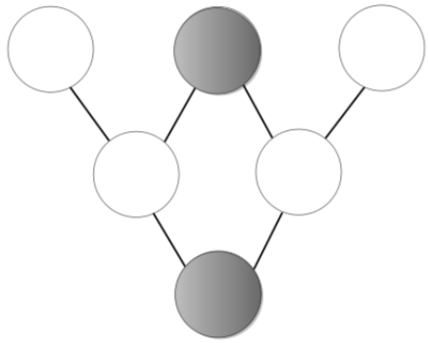
a) Complete o quebra-cabeça abaixo:



b) Complete o quebra-cabeça abaixo de modo que os números escolhidos para os círculos cinzas sejam iguais.



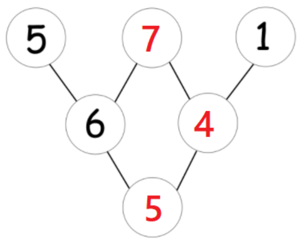
c) Partindo de um quebra-cabeça, como o da figura abaixo, onde os números escolhidos para os círculos cinzas são iguais, Bruno observou que a soma dos números dos seis círculos era sempre igual a 6 vezes o número que aparecia no círculo cinza, independente da forma que completava o quebra-cabeça. Explique por que isso acontece.



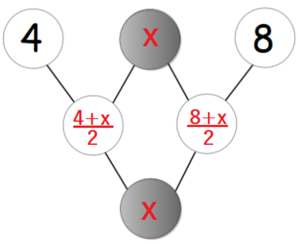
Solução

(a) Sejam x, y e z os números a serem preenchidos nas filas 1, 2 e 3, respectivamente. Temos

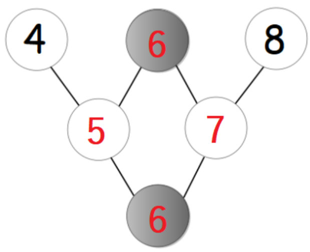
$$\frac{5+x}{2} = 6 \Rightarrow x = 7$$
$$\frac{7+1}{2} = y \Rightarrow y = 4$$
$$\frac{6+4}{2} = z \Rightarrow z = 5$$



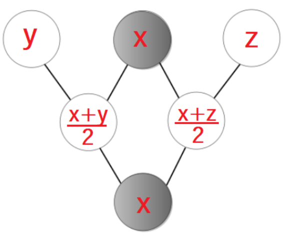
(b) Seja x o número a ser preenchido nos círculos cinzas. Então



$$\begin{aligned} x &= \frac{\frac{4+x}{2} + \frac{8+x}{2}}{2} \\ 2x &= \frac{4+x+8+x}{2} \\ 4x &= 2x + 12 \\ 2x &= 12 \\ x &= 6 \end{aligned}$$



(c) Seja x o número a ser preenchido nos círculos cinzas e y e z os números nos círculos a sua esquerda e direita, respectivamente. Então



$$\begin{aligned} x &= \frac{\frac{x+y}{2} + \frac{y+z}{2}}{2} \\ 2x &= \frac{x+y+x+z}{2} \\ 4x &= 2x + y + z \\ 2x &= y + z \end{aligned}$$

Somando os números dos seis círculos e utilizando a última igualdade acima, obtemos:

$$y + x + z + \frac{x+y}{2} + \frac{x+z}{2} + x = (y+z) + 2x + \left(\frac{x+y}{2} + \frac{x+z}{2}\right) = 2x + 2x + 2x = 6x.$$

3. (20 pontos) Um polígono é dito **monótono** se o valor numérico da sua área, em cm^2, é igual ao seu perímetro (soma dos lados) em cm. Por exemplo, um retângulo com base igual a 6 cm e altura igual a 3 cm é monótono, pois o valor da área ($6 \times 3 = 18$ cm^2) é igual ao perímetro ($6 + 3 + 6 + 3 = 18$ cm).

   (a) Qual deve ser a medida dos lados de um quadrado monótono?

   (b) Qual deve ser a medida dos lados de um triângulo equilátero monótono?

   (c) Determine as medidas dos lados de um triângulo retângulo monótono sabendo que esses lados, em ordem crescente, formam uma progressão aritmética.

   Dica: Considere que os lados medem x, $x + a$ e $x + 2a$, com $a > 0$ e $x > 0$, e aplique seus conhecimentos de triângulos retângulos!

Solução

(a) A soma dos lados de um quadrado de lado l é igual a $4l$, enquanto a área deste é igual a l^2. Igualando as expressões, temos $l^2 = 4l \iff l \cdot l = 4 \cdot l \iff \boxed{l = 4}$.
Logo, o lado do quadrado monótono deve medir 4 cm.

(b)
A soma dos lados de um triângulo equilátero de lado l é igual a $3l$, enquanto a área deste é igual a $\dfrac{l^2\sqrt{3}}{4}$. Igualando as expressões, temos $\dfrac{l^2\sqrt{3}}{4} = 3l \iff l \cdot l = \dfrac{4 \cdot 3}{\sqrt{3}} \cdot l \iff \boxed{l = 4\sqrt{3}}$.
Logo, o lado do triângulo equilátero monótono deve medir $4\sqrt{3}$ cm.

(c) Sejam x e $x + a$ os catetos e $x + 2a$ a hipotenusa desse triângulo retângulo. A soma de seus lados é igual a $x + (x + a) + (x + 2a) = 3x + 3a = 3(x + a)$ cm, enquanto sua área é igual a $\dfrac{x(x + a)}{2}$ cm^2.
Para o triângulo ser monótono, devemos ter $\dfrac{x(x + a)}{2} = 3(x + a) \iff x(x + a) = 6(x + a) \iff \boxed{x = 6}$. Assim, descobrimos que o menor cateto mede 6 cm.
Para determinar o valor de a, vamos utilizar o Teorema de Pitágoras:

$$
\begin{gathered}
(x + 2a)^2 = x^2 + (x + a)^2 \\
(6 + 2a)^2 = 6^2 + (6 + a)^2 \\
4a^2 + 24a + 36 = 36 + a^2 + 12a + 36 \\
3a^2 - 12a + 36 = 0
\end{gathered}
$$

Resolvendo a equação do 2º grau acima, encontramos $a_1 = 2$ e $a_2 = -6$ como soluções. No entanto, como o valor de a deve ser positivo, concluímos que $\boxed{a = 2}$ é o valor desejado.
Portanto, as medidas dos lados do triângulo desejado são 6 cm, 8 cm e 10 cm.

4. (20 pontos) As irmãs Ana, Bia e Clara foram assistir um filme no cinema. Devido aos protocolos sanitários contra a COVID foram avisadas que todas deveriam escolher a mesma fila, mas não poderiam ocupar poltronas consecutivas.

Sabendo que no cinema há filas de 5, 6 e 7 poltronas disponíveis, responda:

a) De quantas maneiras distintas elas podem sentar-se numa fila com 5 poltronas?

b) De quantas maneiras distintas elas podem sentar-se numa fila com 6 poltronas?

c) De quantas maneiras distintas elas podem sentar-se numa fila com 7 poltronas?

Solução

Inicialmente, observe que, escolhidas três poltronas a serem ocupadas, há 3 possibilidades de se ocupar a primeira, 2 possibilidades para a segunda e uma possibilidade para a terceira. Logo, pelo princípio multiplicativo, há $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ maneiras distintas para as irmãs ocuparem esses assentos. Todas as possibilidades podem ser observadas abaixo

$$ABC \quad ACB \quad BAC \quad BCA \quad CAB \quad CBA$$

onde A : Ana, B : Bia e C : Clara e a sequência das letras determinam a ordem em que se sentam nas três poltronas escolhidas. Em cada item, o número total de maneiras distintas que as irmãs podem sentar-se será 6 vezes o número de possibilidades de se escolher três poltronas a serem ocupadas. Em todos os itens, vamos considerar uma enumeração das poltronas em ordem crescente.

(a) Como há apenas 5 poltronas disponíveis e não é possível escolher duas consecutivas, apenas as poltronas 1, 3 e 5 podem ser ocupadas. Logo, há apenas uma possibilidade de escolha das três poltronas e, portanto, há 6 maneiras distintas para as irmãs se sentarem numa fila com 5 poltronas.

(b) **Caso 1 - A primeira ou a última poltrona não foram ocupadas:** Se a primeira poltrona não for ocupada, temos exatamente o mesmo caso do item (a), uma possibilidade para escolher as três poltronas. O mesmo acontece quando a última poltrona não for ocupada. Observe que não há a possibilidade da primeira e última poltronas não serem ocupadas simultaneamente, pois nos restariam 4 poltronas para escolhermos três sem que haja duas consecutivas, que não é possível. Logo, temos duas possibilidades para escolher as três poltronas neste caso.

Caso 2 -A primeira e a última poltrona foram ocupadas: Assim, nos resta duas possibilidades, poltrona 3 ou 4, para a escolha da última poltrona. Logo, também temos duas possibilidades para escolher as três poltronas neste caso.

Portanto, há $(2+2) \cdot 6 = 24$ maneiras distintas para as irmãs se sentarem numa fila com 6 poltronas.

(c) **Caso 1 - A primeira ou a última poltrona não foram ocupadas:** Note que estamos na situação

do item (b) para o caso em que a primeira poltrona está ocupada e estamos também na situação do item (b) quando a última poltrona esta ocupada. Assim, temos inicialmente 48 casos. Entretanto, note que ao considerar a primeira poltrona desocupada, incluímos também a possibilidade de que a última poltrona está desocupada. O mesmo ocorre ao analisar a última poltrona desocupada. Isto é, contamos duas vezes o caso em que a primeira e última poltronas estão desocupadas. Logo, devemos subtrair este valor. Agora, se a primeira e última poltrona estão desocupadas, devemos colocar as três pessoas nas 5 poltronas e, pelo item (a), isto no dá 6 casos. Portanto, existem $48 - 6 = 42$ maneiras quando a primeira ou a última poltrona não foram ocupadas.
Caso 2 - A primeira e a última poltrona foram ocupadas: Temos 6 possibilidades para que a primeira e a última poltrona sejam ocupadas. Entretanto, precisamos ainda colocar a terceira pessoa nas poltronas 3, 4 ou 5 e temos três maneiras distintas de fazer isso. Logo, temos um total de $6 \times 3 = 18$ possibilidades para arranjar as três pessoas neste caso.

Portanto, há $42 + 18 = 60$ maneiras distintas para as irmãs se sentarem numa fila com 7 poltronas.

5. (20 pontos) Encontre todos os inteiros positivos m e n tais que

$$m^2 + 3n = 6m.$$

Solução

Este problema admite várias soluções distintas. Aqui, apresentamos três delas.

Solução 1. Como $m^2 = 6m - 3n$, temos obrigatoriamente que m divide 3 ou m divide n. Se m divide 3 então $m = 1$ ou $m = 3$. O caso $m = 1$ não é possível, pois $1 + 3n = 6$. O caso $m = 3$ nos dá $9 + 3n = 18$, logo $n = 3$. Assim, $m = n = 3$ é possível.

Agora, se m divide n, temos $n = km$, donde

$$m^2 + 3km = 6m \Longrightarrow m + 3k = 6.$$

Isto nos diz que 3 divide m, logo $m = 3x$, donde

$$3x + 3k = 6 \Longrightarrow x + k = 2.$$

Portanto, $x = 1 = k$, donde $n = m = 3$.

Solução 2

Como $3n = 6m - m^2$, temos que 3 divide m^2. Logo, 3 divide m, i.e., $m = 3k$.

Logo

$$9k^2 + 3n = 6.3k \Longrightarrow 3k^2 + n = 6k$$

Pelo mesmo argumento, 3 divide n, logo $n = 3p$,

$$3k^2 + 3p = 6k \Longrightarrow k^2 + p = 2k$$

Agora, note que k divide p, logo $p = kx$, donde

$$k^2 + kx = 2k \Longrightarrow k + x = 2$$

Assim, $k = 1 = x$. Portanto, $n = m = 3$.

Solução 3

Como $3n = 6m - m^2 = m(6 - m)$ e m e n são números inteiros positivos, vemos que $6 - m > 0$, logo as únicas possibilidades possíveis para m são $m = 1, 2, 3, 4, 5$.

Temos

- Se $m = 1$, então $1 + 3n = 6$, donde $3n = 5$ e então $n = \frac{5}{3}$. Absurdo, pois n é inteiro positivo;
- Se $m = 2$, então $4 + 3n = 12$, donde $3n = 8$ e então $n = \frac{8}{3}$. Absurdo, pois n é inteiro positivo;
- Se $m = 3$, então $9 + 3n = 18$, donde $3n = 9$ e então $n = 3$. Logo, $m = 3 = n$ é solução.
- Se $m = 4$, então $16 + 3n = 24$, donde $3n = 8$ e então $n = \frac{8}{3}$. Absurdo, pois n é inteiro positivo;
- Se $m = 5$, então $25 + 3n = 30$, donde $3n = 5$ e então $n = \frac{5}{3}$. Absurdo, pois n é inteiro positivo;

Portanto, a única solução possível é $m = 3 = n$.