Soluções - Nível 1

1. (20 pontos) A sala de aula da professora Miriam tem 30 alunos. Durante o ano letivo, a professora Miriam fez duas provas, sendo que:

   - 24 alunos passaram na primeira prova;
   - 27 alunos passaram na segunda prova;

   (a) Se 23 alunos passaram tanto na primeira quanto na segunda prova, quantos alunos reprovaram nas duas provas?

   (b) Se apenas 1 aluno reprovou nas duas provas, quantos alunos foram aprovados somente na primeira prova e reprovaram na segunda prova?

Solução

(a) Sabemos que 23 alunos passaram tanto na primeira quanto na segunda prova. Então, isso quer dizer que, dos 24 alunos que passaram na primeira prova, apenas 1 aluno não passou na segunda prova. Do mesmo modo, dos 27 alunos que passaram na segunda prova, vemos que 4 alunos não passaram na primeira prova. Logo, 23+1+4 =28 alunos passaram na primeira ou na segunda prova.

Portanto, 2 alunos reprovaram nas duas provas.

(b) Chamando de x o número de alunos alunos que passaram tanto na primeira quanto na segunda prova, temos:

- x alunos passaram na primeira e na segunda prova;
- $24 - x$ alunos passaram na primeira prova e reprovaram na segunda prova;
- $27 - x$ alunos passaram na segunda prova e reprovaram na primeira prova.

Agora, como 1 aluno reprovou nas duas provas, quer dizer que $30 - 1 = 29$ alunos passaram na primeira ou na segunda prova. Assim, temos

$$x + (24 - x) + (27 - x) = 29.$$

Resolvendo esta equação, vemos que $x = 22$.

Portanto, $24 - 22 = 2$ alunos passaram na primeira e reprovaram na segunda prova.

2. (20 pontos) Em um jogo de advinhação, dois jogadores competem para encontrar números. Nas regras do jogo, cada jogador deverá indicar dois números inteiros ao seu oponente. O primeiro jogador sugere 7 e 8 como números iniciais em casas vizinhas, como segue:

7	8	?	?	?	?	?

Em seguida, o primeiro jogador pede para o segundo encontrar os próximos números até completar os quadros. Os números a serem encontrados sempre serão dados pela soma dos dois números anteriores a ele. Assim o segundo jogador completa os demais números de forma correta, como mostrado abaixo:

7	8	15	23	38	61	99

Agora, o segundo jogador resolve dificultar o jogo e ao invés de indicar números em casas vizinhas, ele indica um número na primeira casa e outro na última casa. Vamos ajudar o primeiro jogador a encontrar os demais números?

17	?	?	?	?	?	269

Pergunta: Qual a soma de todos os números ocultos no quadro acima?

Solução

Chamando o primeiro número oculto (da esquerda para a direita) de x, obtemos, de acordo com as regras do jogo, a seguinte sequência de números:

$$17,\ x, 17+x,\ 17+2x,\ 34+3x,\ 51+5x,\ 269.$$

Pelas regras do jogo, temos que

$$(34+3x)+(51+5x)=269$$

ou seja

$$85+8x=269.$$

Resolvendo esta equação, concluímos que $x=23$.

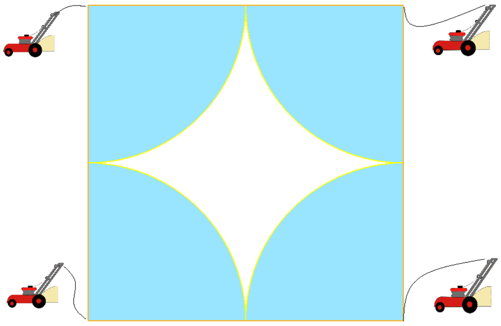
Portanto, os números que estão faltando são, (da esquerda para a direita):

$$23, 40, 63, 103, 166$$

Ao somar os números encontrados, temos:

$$23+40+63+103+166=395.$$

3. Um jardineiro deseja cortar a grama de toda a sua fazenda, que tem o formato de um quadrado. O fio do cortador de grama é curto e o fazendeiro fará uso de 4 tomadas, uma em cada vértice de seu terreno quadrado. Ao fixar o fio, que possui comprimento de 10 metros, ele corta até o alcance máximo do fio e com isso obtém as regiões circulares azuladas, como na figura abaixo:



Sabendo que o fio tem comprimento de 10 metros:

(a) Qual o valor da área que faltou ser cortada?

(b) Qual o valor da diferença entre o perímetro do terreno todo e o perímetro da região branca que não foi cortada?

Solução

(a) Queremos calcular a área da região estrelada (em branco). É fácil ver que:

$$\text{Área}_{estrela} = \text{Área}_{quadrado} - \text{Área}_{azul}.$$

Para a área do quadrado, observe que o fio tem comprimento de 10 metros, assim, teremos que o quadrado possui lado com medida 20 metros, pois foi cortada a grama ao alcance máximo do fio. Logo,

$$\text{Área}_{quadrado} = 400m^2.$$

Para calcular a ŕea da região em azul, note que esta região é composta de quatro partes idênticas e que cada uma delas é um quarto de um círculo de raio 10 metros. Portanto, com as quatro partes em azul podemos formar um círculo de raio 10 metros. Assim,

$$\text{Área}_{azul} = \text{Área do cículo de raio 10 metros} = \pi 10^2 m^2 = 100\pi m^2.$$

Logo: $\text{Área}_{estrela} = 400 - 100\pi\ m^2$.

(b) Para obter o perímetro desejado, como a região em azul pode ser arrumada de modo a formar um círculo de raio 10 metros, temos

$$\text{Perímetro(estrela)} = \text{perímetro do círculo de raio 10 metros} = 2 \times \pi \times 10 = 20\pi\ metros.$$

Como o perímetro do quadrado é Perímetro(quadrado) $=$ perímetro do quadrado de raio 20 metros $=$ $4 \times 20 = 80\ metros$.

Assim, o perímetro procurado tem valor: $80 - 20\pi\ metros$.

4. (20 pontos) Entre João Pessoa e Sapé existe uma estrada em linha reta que mede 45 quilômetros. No mesmo momento, um ciclista parte de João Pessoa em direção a Sapé com velocidade constante de 10 quilômetros por hora e outro ciclista parte de Sapé em direção a João Pessoa com velocidade constante de 20 quilômetros por hora.

   Quando o primeiro ciclista sai de João Pessoa, uma mosca sai de sua testa e viaja a uma velocidade constante de 100 quilômetros por hora e toca a testa do segundo ciclista, volta e toca a testa do primeiro ciclista, retorna e toca a testa do segundo ciclista novamente e continua fazendo isso até que a testa dos dois ciclista se batem, matando a mosca.

   Pergunta: Quantos quilômetros a mosca percorreu no total durante sua viagem?

Solução

O importante aqui é não se preocupar com a mosca, e sim com os ciclistas. De fato, precisamos apenas encontrar o tempo no qual os dois ciclistas se batem.

Assim, chamemos de ciclista A o ciclista que sai de João Pessoa em direção a Sapé e de ciclista B o ciclista que parte de Sapé em direção a João Pessoa.

Note que em 1 hora, o ciclista A percorre 10 quilômetros e o ciclista B percorre 20 quilômetros. Logo em 1 hora, os dois ciclistas estarão a uma disttância de 15 quilômetros um do outro.

Em seguida, note que em 6 minutos, o ciclista A percorre 1 quilômetro e o ciclista B percorre 2 quilômetros. Disto, vemos que em 30 minutos o ciclista A terá percorrido 5 quilômetros e o ciclista B terá percorrido 10 quilômetros.

Logo, os dois ciclistas se batem depois de 1 hora e 30 minutos. Portanto, como a mosca viaja a 100 quilômetros por hora, em 1 hora e 30 minutos ela terá percorrido 150 quilômetros.

5. (20 pontos) Dois amigos decidem jogar um jogo com números inteiros utilizando as seguintes regras:

• Cada jogador escolhe um número por vez;

• Se um jogador diz um número n, o outro jogador deve dizer um número inteiro x maior ou igual que $2n$ e menor ou igual que $3n$.

Por exemplo, se o primeiro jogador disser o número $n = 7$, o segundo jogador deve escolher um número x maior ou igual que 14 e menor ou igual que 21.

• O primeiro jogador a dizer um número maior ou igual a 2021 perde o jogo.

Sabendo que o primeiro jogador a jogar deve escolher um número inteiro maior ou igual a 1 e menor ou igual a 9. Com quais escolhas de números ele com certeza ganhará o jogo?

Solução

Para entender o jogo, devemos pensar de trás pra frente.

Chamemos de A o primeiro jogador e B o segundo. Começamos percebendo que o jogador A ganha se disser um número $1011 \leq A \leq 2020$, pois isto obrigaria o jogador B, na próxima jogada, dizer um número maior ou igual a 2022 (que é maior que 2021!).

Logo, para que o jogador A possa jogar um número $1011 \leq A \leq 2020$, o jogador B deve ter jogado um número $337 \leq B \leq 1010$. De fato, veja que se B jogar um número $337 \leq B \leq 1010$, o jogador A poderá escolher um número maior ou igual que 1011 e menor ou igual a 2020.

Do mesmo modo, para que o jogador B, obrigatoriamente, jogue um número $337 \leq B \leq 1010$, o jogador A deve ter jogador um número $169 \leq A \leq 336$.

Para que o jogador A possa jogar um número entre $169 \leq A \leq 336$, o jogador B deve ter, obrigatoriamente, jogado um número $57 \leq B \leq 168$.

Para que o jogador B, obrigatoriamente, jogue um número $57 \leq B \leq 168$, o jogador A deve jogar um número $29 \leq A \leq 56$.

Para que o jogador A possa jogar um número $29 \leq A \leq 56$, o jogador B deve, obrigatoriamente, ter jogado um número $10 \leq B \leq 28$.

Para que o jogador B, obrigatoriamente, jogue um número $10 \leq B \leq 28$, o jogador A deve jogar um número $5 \leq A \leq 9$.

Para que o jogador A possa jogar um número $5 \leq A \leq 9$, o jogador B deve, obrigatoriamente, ter jogado um número $2 \leq B \leq 4$.

Para que o jogador B, obrigatoriamente, jogue um número $2 \leq A \leq 4$, o jogador A deve jogar um número $1 \leq A \leq 1$.

Resposta: O jogador A ganha se jogar qualquer um dos números: $1, 5, 6, 7, 8, 9$.