# Soluções - Nível 2

1. (20 pontos) O professor Wállace organizou o alfabeto numa tábua da seguinte forma

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M |
| N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z |

e resolveu atribuir um valor numérico a cada letra seguindo as seguintes regras:

- C=A+B, D=B+ C, E=C+ D,..., M=K+ L (ou seja, cada letra a partir de C, na primeira linha da tábua, é igual à soma das duas consecutivas que a antecedem).
- As letras que se encontram na mesma coluna terão o mesmo valor (isto é, A e N terão o mesmo valor, B e O terão o mesmo valor e assim por diante).

a) Suponha que A = 2 e B= 3. Determine o valor de O+P+M.

b) Se C = 66 e G = 363, qual é o valor que o professor Wállace escolheu para A e B?

**Solução**

Precisamos determinar o valor de O, P e M, respectivamente. Note que:

- O=B=3 pela segunda regra.
- P=C= A+B = 2+3 =5 por conta da primeira e segunda regra.
- A primeira regra nos permite concluir que:

| | | |
|---|---|---|
| A = 2 | B = 3 | C = A+B = 5 |
| B = 3 | C = 5 | D = B+C = 8 |
| C = 5 | D = 8 | E = C+D = 13 |
| D = 8 | E = 13 | F = D+E = 21 |
| E = 13 | F = 21 | G = E+F = 34 |
| F = 21 | G = 34 | H = E+G = 55 |
| G = 34 | H = 55 | I = G+H = 89 |
| H = 55 | I = 89 | J = H+I = 144 |
| I = 89 | J = 144 | K = I+J = 233 |
| J = 144 | K = 233 | L = J+K = 377 |
| K = 233 | L = 377 | M = K+L = 610 |

Portanto O+P+M = 3+5+610 = 618.

(*b*) A primeira regra nos permite concluir que:

C = A+B = 66 e G = E+F = 363.

Entretanto, podemos usar a igualdade C = A+B para concluir que G = 5A+8B. De fato,

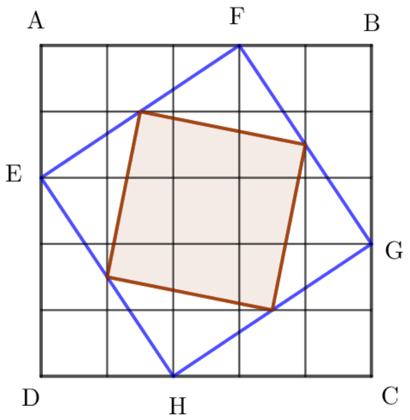
(1) D = B+C = B + (A+B) = A + 2B.
(2) E = C+ D = (A+B) + (A+2B) = 2A + 3B.
(3) F = D+ E = (A+2B) + (2A+3B) = 3A + 5B.
(4) G = E+ F = (2A+3B) + (3A+5B) = 5A + 8B.

Assim, só precisamos resolver o sistema

$$\begin{cases} \mathrm{C} = \mathrm{A} + \mathrm{B} & = 66, \\ \mathrm{G} = 5\mathrm{A} + 8\mathrm{B} & = 363. \end{cases}$$

Da primeira equação segue que A = 66 - B. Substituindo na segunda equação, temos 5(66 - B)+8B = 363. Logo, 3B = 33. Assim, B =11. Substituindo o valor de B=11 na primeira equação, obtemos A = 55.

2. (20 pontos) O quadrado ABCD da figura está dividido em 25 quadradinhos de mesmo tamanho. O quadrado sombreado tem os vértices sobre os pontos médios das arestas do quadrado EFGH.



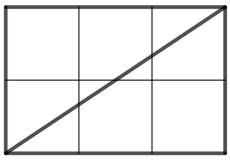

a) A área do quadrado EFGH corresponde a que fração da área do quadrado ABCD?

b) Se a área do quadrado ABCD é igual 100 $cm^2$. Qual é o comprimento da diagonal do quadrado sombreado?

**Solução**

Vamos assumir que cada quadrado menor tenha área igual a $u^2\, cm^2$ sendo $u$ o comprimento de seu lado em centímetros.

$(a)$ Observe que a área do quadrado ABCD é igual a área do quadrado EFGH acrescida da área dos quatro triângulos retângulos AFE, BGF, CHG e DEH. Além disso, esses triângulos são congruentes (assim possuem a mesma área) e a união de um par destes triângulos determina um retângulo da forma



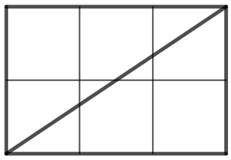
constituído de 6 quadrados. Como temos 4 de tais triângulos podemos formar dois pares, obtendo assim 6+6=12 quadrados pequenos.

Como a área do quadrado ABCD é igual $25u^2\, cm^2$, segue que a área do quadrado EFGH é igual $25 - 12 = 13u^2\, cm^2$.

Portanto.

$$\frac{\text{área do quadrado EFGH}}{\text{área do quadrado ABCD}} = \frac{\text{área de 13 quadradinhos}}{\text{área de 24 quadradinhos}} = \frac{13u^2}{25u^2} = \frac{13}{25}.$$

($b$) Observe que o lado do quadrado EFGH é exatamente a diagonal do retângulo



cujo comprimento é $3u$ e cuja largura é $2u$.

Portanto, segue do Teorema de Pitágoras que o comprimento $L$ do lado do quadrado EFGH é dado por:

$$L = \sqrt{(3u)^2 + (2u)^2} = \sqrt{13u^2} = \sqrt{13}u.$$

Agora, seja $\ell$ o comprimento do lado do quadrado sombreado. Como seus vértices são os pontos médios dos lados do quadrado EFGH segue que:

$$\ell = \frac{L}{2} = \frac{13}{2}u.$$

Usando mais uma vez o Teorema de Pitágoras segue que a diagonal do quadrado sombreado tem comprimento $\sqrt{2}\ell$, ou equivalentemente,

$$\frac{13\sqrt{2}}{2}u.$$

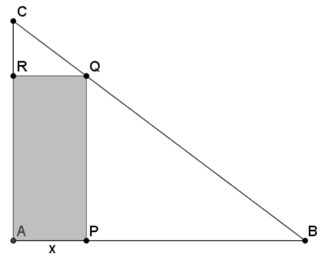
Tendo em consideração que a área do quadrado ABCD é igual 100 $cm^2$. E também essa área é igual a $25u^2$, temos que

$$25u^2 = 100 \Longrightarrow u^2 = 4 \Longrightarrow u = 2.$$

Portanto, o comprimento da diagonal do quadrado sombreado é igual a $13\sqrt{2}\,cm$.

3. (20 pontos) No triângulo retângulo $ABC$, o cateto $AB$ mede 4 $cm$ e o cateto $AC$ mede 3 $cm$.

A uma distância $x$ do ponto $A$ encontra-se o ponto $P$ sobre o lado $AB$ e a partir dele são demarcados os pontos $Q$ e $R$ sobre os lados $BC$ e $AC$, respectivamente, de modo que $APQR$ forme um retângulo, conforme a figura abaixo.




a) Calcule a área da região delimitada pelo retângulo $APQR$ para $x = 1$.

b) Encontre a expressão de $f(x)$, para $0 < x < 4$, onde $f(x)$ fornece a área da região delimitada pelo retângulo $APQR$ quando o ponto $P$ está a uma distância $x$ de $A$.

c) Explique por que a área do retângulo $APQR$ nunca ultrapassa a metade da área do triângulo $ABC$.

**Solução**

(a) Utilizando semelhança entre os triângulos $PBQ$ e $ABC$ , concluimos que

$$\frac{PQ}{4-1} = \frac{3}{4} \Rightarrow PQ = \frac{9}{4}.$$

Como a área do retângulo $APQR$ é o produto entre os lados $AP$ e $PQ$ e $AP = 1$, concluimos que esta área é igual a $9/4$.

(b) Utilizando semelhança entre os triângulos $PBQ$ e $ABC$ , concluimos que

$$\frac{PQ}{4-x} = \frac{3}{4} \Rightarrow PQ = \frac{12-3x}{4}.$$

Como a área do retângulo $APQR$ é o produto entre os lados $AP$ e $PQ$ e $AP = x$, concluimos que esta área é dada, em função de $x$, por

$$f(x) = \frac{x(12-3x)}{4} = \frac{-3x^2+12x}{4} = \frac{-3x^2}{4} + 3x.$$

(c) Como a área do retângulo $APQR$ é dada pela função polinomial do segundo grau $f(x) = \dfrac{-3x^2}{4} + 3x$, podemos encontrar seu valor máximo, $y_v$, pela fórmula $-\Delta/4a$, com $\Delta = b^2 - 4ac$. Substituindo $a = -3/4$, $b = 3$ e $c = 0$, obtemos

$$y_v = \frac{-3^2}{-3} = 3.$$

Note que a área do triângulo $ABC$ é igual a $(3 \cdot 4)/2 = 6$. Portanto a área do retângulo nunca ultrapassa a metade da área do triângulo $ABC$.

4. (20 pontos) O professor Pitágoras foi ao shopping com seu amigo Felipe e ao chegar lá percebeu que tinha esquecido sua carteira em casa. Para não ter que voltar, teve a ideia de enviar um PIX para Felipe de um valor entre $R\$ \, 10,00$ e $R\$ \, 99,99$ para que Felipe, que tinha dinheiro em sua carteira, lhe devolvesse o mesmo valor em espécie. Porém, ao entregar o dinheiro a Pitágoras, Felipe se confundiu e trocou os reais e os centavos, dando um valor errado ao professor Pitágoras, que guarda o dinheiro no seu bolso (que estava vazio) sem se dar conta do equívoco.

   Após Felipe ir embora, o professor Pitágoras compra um chocolate no valor de $R\$ \, 1,72$ e ao fazer isso percebe que o dinheiro que está no seu bolso é três vezes o valor do PIX.

   **Pergunta:** Se o valor verdadeiro do PIX era de $x$ reais e $y$ centavos, encontre $x$ e $y$.

   **Observação:** Como exemplo, se o valor original do PIX era $R\$ \, 30,84$ então Felipe ao se confundir deu na verdade $R\$ \, 84,30$ ao professor Pitágoras.

**Solução**

Suponha que o valor do PIX era de $x$ reais e $y$ centavos. Assim,

$$10 \leq x \leq 99 \qquad \text{e} \qquad 0 \leq y \leq 99.$$

Para resolver o problema é conveniente trabalhar com centavos. Deste modo, o valor do PIX era de $100x + y$ centavos. Portanto, Felipe deu $100y + x$ centavos ao professor Pitágoras.

Assim, chegamos na equação:

$$100y + x - 172 = 3(100x + y)$$

ou seja

$$97y - 299x = 172.$$

Portanto

$$y = \frac{299x + 172}{97} = \frac{(3.97 + 8)x + (2.97 - 22)}{97} = 3x + 2 + \frac{8x - 22}{97}.$$

e $y$ é um número inteiro tal que $0 \leq y \leq 99$ para algum inteiro $x$ que pertence ao intervalo $10 \leq x \leq 99$. Deste modo, vemos que $\frac{8x-22}{97}$ é um número inteiro e $8x - 22$ deve ser múltiplo de 97. Agora, como 97 é ímpar, então $4x - 11$ divide 97 para algum $10 \leq x \leq 99$.

Agora, como $10 \leq x \leq 99$, temos que $29 \leq 4x - 11 \leq 407$. Por inspeção, vemos que os únicos múltiplos de 97 entre 29 e 407 são $97, 197, 291, 388$.

Analisaremos agora quatro casos:

- $4x - 11 = 97 \implies x = 27$
- $4x - 11 = 194 \implies x = \frac{205}{4}$
- $4x - 11 = 291 \implies x = \frac{151}{2}$
- $4x - 11 = 388 \implies x = \frac{399}{4}$

Como $x$ deve ser um número inteiro, concluímos que

$$x = 27 \qquad \text{e} \qquad y = \frac{299x + 172}{97} = 85.$$

Portanto, o valor original do cheque era de $R\$ \, 27,85$.

5. (20 pontos) Encontre todos os inteiros positivos $a$ e $b$ tais que

$$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=\frac{4}{67}.$$

**Solução**

Começamos notando que como $a$, $b$ são inteiros positivos, temos que

$$\frac{1}{a}\leq\frac{4}{67}\Longrightarrow a\geq 17$$

e

$$\frac{2}{b}\leq\frac{4}{67}\Longrightarrow b\geq 34.$$

Agora, escrevemos a igualdade como

$$b+2a=\frac{4ab}{67}. \tag{1}$$

Assim, vemos que 67 deve dividir pelo menos um dos números $a$ ou $b$ (pois $b+2a$ é inteiro).

Separamos em dois casos:

• 67 divide $a$.

Neste caso, $a=67k$, para algum inteiro positivo $k$. Logo, por (1), temos

$$\frac{2}{b}=\frac{4}{67}-\frac{1}{67k}=\frac{4k-1}{67},$$

ou seja

$$b=2\frac{67k}{4k-1}.$$

Como $4k-1$ claramente não divide 2 e nem divide $k$, temos que $4k-1$ deve dividir 67. Como 67 é primo, temos que

$$4k-1=67\Longrightarrow k=17.$$

Deste modo, vemos que

$$a=1139 \qquad b=34$$

é solução do problema.

• 67 divide $b$.

Neste caso, $b=67k$, donde

$$b+2a=\frac{4ab}{67}\Longrightarrow 4ak=67k+2a. \tag{2}$$

Como $4ak$ é par e $2a$ também é par, vemos para que ocorra a igualdade $4ak=67k+2a$, que $k$ deve ser par. Assim, temos que $k=2m$. Portanto, de (2), temos

$$4am=67m+a\Longrightarrow 4m=\frac{67m}{a}+1.$$

Portanto, ou $a$ divide 67 ou $a$ divide $m$. Se $a$ dividisse 67, como 67 é primo, então teríamos que $a=1$ ou $a=67$, o que não pode ocorrer. De fato,

Se $a=1$:

$$1+\frac{2}{b}=\frac{4}{67} \quad \text{(Falso, pois } b \text{ é inteiro positivo)}$$

Se $a = 67$:

$$\frac{1}{67} + \frac{2}{b} = \frac{4}{67} \quad \Longrightarrow \quad \frac{2}{b} = \frac{3}{67} \quad \Longrightarrow \quad b = \frac{2.67}{3} \quad \text{(Falso, pois } b \text{ é inteiro positivo)}$$

Assim, vemos que $a$ deve dividir $m$, ou seja, $m = ap$, com $p$ inteiro positivo. Temos

$$b = 67k = 2.67.m = 2.67.a.p \tag{3}$$

Portanto,

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = \frac{4}{67} \Longrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{67.a.p} = \frac{4}{67},$$

donde

$$67 + \frac{1}{p} = 4a$$

e concluímos que $p = 1$.

Deste modo, de (3), vemos que $b = 2.67.a$. Substituindo mais uma vez,

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{2.67.a} = \frac{4}{67} \Longrightarrow 4a = 67 + 1 \Longrightarrow a = 17.$$

Portanto,

$$a = 17 \qquad b = 2.67.17 = 2278$$

é solução do problema.

**Resposta:** As únicas soluções do problema são:

$$a = 1139 \qquad b = 34$$

e

$$a = 17 \qquad b = 2278.$$