

Séries e Equações Diferenciais Ordinárias

Prof. Milton de L Oliveira

24 de abril de 2020

Capítulo 1

Sequências

1.1 Sequências Numéricas

Uma sequência numérica é uma função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ que a cada número natural n associa um número real a_n , isto é, $f(n) = a_n$. O termo a_n diz-se o n -ésimo termo da sequência ou termo geral da sequência.

Example 1. 1. $1, 1/2, 1/3, \dots, a_n = 1/n$

2. $-1, 1, -1, 1, \dots, b_n = (-1)^n$

3. $x_n = \frac{-n}{n+1}$ é o termo geral da sequência $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(n) = -\frac{n}{n+1}$.

4. $f(n) = \begin{cases} 1/n, & n \text{ par} \\ -1/n^2, & n \text{ ímpar,} \end{cases} -1, 1/2, -1/9, 1/4, \dots$

Se considerarmos $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \dots\} \subset \mathbb{N}$ a restrição de $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ a $f : \mathbb{N}' \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de subsequência ou subsucessão da sequência original $f(n)$.

Example 2. 1. A sequência $a_n = (-1)^n$ tem como subsequências $a_{2n} = 1$ e $a_{2n-1} = -1$.

2. A sequência $\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \dots$ é uma subsequência da sequência $a_n = \frac{1}{n}$.

Observe que poderíamos denotá-la por $b_n = \frac{1}{n+4}$, $n \in \mathbb{N}$ ou ainda

$b_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}'$ onde $\mathbb{N}' = \{5, 6, 7, \dots\}$.

De forma geral, fixado $p \in \mathbb{N}$, então a sequência com termo geral $b_n = a_{n+p}$ é uma subsequência de $\{a_n\}$, onde consideramos para domínio o subconjunto $\mathbb{N}' = \{1 + p, 2 + p, 3 + p, \dots\}$.

Definition 3. Uma sequência $\{a_n\}$ é dita **limitada superiormente** quando existir um número real M , denominado cota superior da sequência que satisfaz

$$a_n \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Definition 4. Uma sequência $\{a_n\}$ é dita **limitada inferiormente** quando existir um número real m , denominado cota inferior da sequência que satisfaz

$$a_n \geq m, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Definition 5. Uma sequência $\{a_n\}$ é dita **limitada** quando ela for limitada superiormente e inferiormente, isto é, quando existir uma constante positiva C , tal que

$$|a_n| \leq C, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

É claro que se M for uma cota superior de uma dada sequência $\{a_n\}$, então qualquer número real maior do que M também será cota superior da sequência $\{a_n\}$. A menor dessas cotas superiores será chamada de **supremo** da sequência $\{a_n\}$ e a denotamos por $\sup\{a_n\}$. Analogamente, definimos o ínfimo da sequência $\{a_n\}$ e denotamos por $\inf\{a_n\}$, que é a maior das cotas inferiores da sequência. Note que para cada $\epsilon > 0$ o número real $\alpha = \sup\{a_n\} - \epsilon$ é menor que o supremo da sequência $\{a_n\}$ e, portanto, não pode ser cota superior dessa sequência, por esse motivo, deve existir um n_0 tal que $\alpha < a_{n_0}$. Para o ínfimo ocorre fato análogo, ou seja, sendo $\beta = \inf\{a_n\} + \epsilon$ existe algum termo da sequência tal que $\beta > a_{n_0}$.

Example 6. 1. A sequência $\{a_n\} = n$ é limitada inferiormente, mas não é limitada superiormente, $\inf a_n = 1$.

2. A sequência $a_n = 1 - n^2$ é limitada superiormente, mas não é limitada inferiormente e $\sup a_n = 0$.

3. A sequência $a_n = (-1)^n$ é limitada, sendo $\sup a_n = 1$ e $\inf a_n = -1$.

4. A sequência $a_n = 1/n$ é limitada, $\sup a_n = 1$ e $\inf a_n = 0$.

5. A sequência $a_n = (-1)^n n$ não é limitada superiormente nem inferiormente.

1.1.1 Indução Matemática

Se uma propriedade qualquer P vale para $n = 1$ e supomos ela válida para n e provamos que P vale para $n + 1$, então P vale para todo $n \in \mathbb{N}$. Esse é o princípio de Indução Matemática.

Example 7. *Seja $n! = 1.2.3 \cdots n$. Provemos que $n! \geq 2^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

De fato, sabemos que $1! \geq 2^{1-1}$, assim essa propriedade vale para $n = 1$, suponha que ela vale para n , isto é, $n! \geq 2^{n-1}$. Considere agora, $(n + 1)! = (n + 1)n!$, desse modo,

$$(n + 1)! = (n + 1)n! \geq (n + 1)2^{n-1} \geq (1 + 1)2^{n-1} = 2^n$$

Logo, a propriedade vale para $n + 1$, e, portanto, vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

Example 8. *Provemos que $A_n = 3(n^2 + n)$ é divisível por 6, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

De fato, temos que para $n = 1$ $A_1 = 3(1^2 + 1) = 6$ que divide 6. Suponha que $A_n = 3(n^2 + n)$ seja divisível por 6, isto é, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $A_n = 6k$. Agora considere,

$$A_{n+1} = 3[(n + 1)^2 + (n + 1)] = 3(n^2 + n) + 3[(2n + 1) + 1] = 6k + 6(n + 1)$$

Logo, A_{n+1} é divisível por 6. Por indução, essa propriedade vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

1.2 Sequências Monótonas

Definition 9. *Uma sequência $\{a_n\}$ é dita **crescente** ou **não decrescente** quando $a_n \leq a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$. Se $a_n < a_{n+1}$ ela é dita **estritamente crescente**.*

Definition 10. *Uma sequência $\{a_n\}$ é dita **decrescente** ou **não crescente** quando $a_n \geq a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$. Se $a_n > a_{n+1}$ ela é dita **estritamente decrescente**.*

Definition 11. *Uma sequência é dita **monótona** se ela é crescente ou decrescente.*

Example 12. 1. *As sequências $a_n = n$ e $b_n = \ln n$ são crescentes, enquanto que, $c_n = -n^3$ e $d_n = 1/n$ são decrescentes.*

2. *A sequência $a_n = (-1)^n$ não é monótona, isto é, ela não é crescente nem decrescente. É uma sequência alternada.*

3. A sequência $a_n = \frac{n}{n+1}$ é crescente. De fato, note que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n+2} \frac{n+1}{n} = \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n} \geq 1, \forall n.$$

A **monotonicidade** de alguma sequências pode ser deduzida por investigação do sinal da derivada da função extensão. Isto é, se $f(x)$ satisfaz $f(n) = a_n$. Por exemplo, para a sequência, $f(n) = \frac{n}{n+1}$, podemos analisar a função $f(x) = \frac{x}{x+1}$ e como, $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ que é positiva, logo, $f(x)$ é crescente e, por sua vez, $f(n)$ também é crescente.

Example 13. Para a sequência $a_n = \frac{n!}{1.3.5 \cdots (2n-1)}$ não é possível definir a função extensão. Mas note que,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1.3.5 \cdots (2n-1)}{1.3.5 \cdots (2n-1)(2n+1)} \frac{(n+1)!}{n!} = \frac{n+1}{2n+1} < 1$$

logo, $a_n > a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ o que implica que a_n é decrescente.

1.3 Sequências Convergentes

Definition 14. Dizemos que $\{a_n\}$ converge para um número real l se dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - l| < \epsilon$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Neste caso, denotamos $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$. E dizemos que a_n é **convergente**. Caso contrário, se tal limite não existe, dizemos que a sequência $\{a_n\}$ é **divergente**.

Note que;

$$|a_n - l| < \epsilon$$

se, e somente se,

$$-\epsilon < a_n - l < \epsilon$$

ou,

$$l - \epsilon < a_n < l + \epsilon$$

isto é,

$$a_n \in (l - \epsilon, l + \epsilon).$$

Um número finito de termos não altera a convergência nem a divergência de uma sequência.

Theorem 15. Uma sequência convergente $\{a_n\}$ não pode ter dois limites.

Demonstração. De fato, se supomos que a_n converge e $l_1 = \lim a_n$ e $l_2 = \lim a_n$ com $l_1 \neq l_2$ então (suponha $l_1 > l_2$)

$$l_1 - l_2 = |l_1 - l_2| = |l_1 - a_n + a_n - l_2| \leq |l_1 - a_n| + |a_n - l_2| < 2\epsilon$$

agora tome $\epsilon = (l_1 - l_2)/2 > 0$, desse modo, obtemos, $l_1 - l_2 < l_1 - l_2$ o que é absurdo. $\square$

Example 16. 1. Vamos mostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. Dado $\epsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \frac{1}{\epsilon}$. Logo, se $n > n_0$ então $\frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \epsilon$, $\forall n > n_0$ e assim $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

2. Consideremos a sequência $a_n = \frac{n}{n+1}$. Neste caso, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$. Dado $\epsilon > 0$, note que

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \epsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \epsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\epsilon} - 1$$

Escolhendo o primeiro n_0 tal que $n_0 > \frac{1}{\epsilon} - 1$ então para todo $n > n_0$ temos

$$n > \frac{1}{\epsilon} - 1 \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \epsilon \Rightarrow \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \epsilon.$$

3. A sequência $b_n = r^n$, onde $r \in \mathbb{R}$, fixo, tal que $-1 < r < 1$, converge para zero. Escolha $r \neq 0$, dado $\epsilon > 0$, como $0 < |r| < 1$, temos que $\ln |r|$ está definido, é diferente de zero, e $\ln |r| < 0$. Assim

$$|r^n - 0| = |r|^n < \epsilon \Leftrightarrow n \ln |r| < \ln \epsilon \Leftrightarrow n > \frac{\ln \epsilon}{\ln |r|}$$

Escolha n_0 maior ou igual a $\frac{\ln \epsilon}{\ln |r|}$ assim $|r^n| < \epsilon$ o que implica em $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$.

4. Existem sequências (não limitadas) cujos termos crescem indefinidamente à medida que n aumenta, por exemplo, a sequência $a_n = n$. Nesse caso, dizemos que a sequência tem limite infinito e denotamos $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, isso significa que dado $K > 0$ qualquer, existe n_0 tal que $a_n > K$ para todo $n > n_0$. Para a sequência $b_n = -n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$.

5. Se $|r| > 1$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} |r|^n = +\infty$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n$ não existe.

6. Se $a_n = (-1)^n$ e como, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = 1$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n-1} = -1$, logo, o limite de a_n não existe.

Theorem 17. *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração. Seja (a_n) uma sequência convergente com limite l . Isto é, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$ ou dado $\epsilon > 0$, $\exists n_0$ tal que $|a_n - l| < \epsilon$, $\forall n > n_0$ ou seja,

$$-\epsilon < a_n - l < \epsilon, \quad \forall n > n_0$$

ou

$$|a_n| < |l| + \epsilon, \quad \forall n > n_0$$

considere $M = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_0}|, |l| + \epsilon\}$ então

$$|a_n| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

segue que (a_n) é limitada. □

A recíproca não é verdadeira pois, por exemplo, a sequência $b_n = \sin n$ é limitada mas $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n$ não existe.

Theorem 18. *Sejam (a_n) uma sequência limitada e (b_n) uma sequência que converge a zero então $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$.*

Demonstração. Como (a_n) é limitada então existe $M > 0$ tal que $|a_n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, como $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ então dado $\epsilon > 0$, existe n_0 tal que $|b_n| < \frac{\epsilon}{M}$, $\forall n > n_0$. Desse modo,

$$|a_n b_n| = |a_n| |b_n| \leq M \frac{\epsilon}{M} < \epsilon, \quad \forall n > n_0$$

logo, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$. □

Example 19. *A sequência $\frac{1}{n} \sin n$ converge a zero. Pois, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ e $|\sin n| \leq 1$. E pelo teorema 18 temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$.*

Theorem 20. *Temos que o $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ se, e somente se, $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$.*

Note que se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ então necessariamente, o $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |L|$. (Isso porque $||a_n| - |L|| \leq |a_n - L|$). Mas, se $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|$ existe isso não implica que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ exista. Pois, $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$ não existe, mas $\lim_{n \rightarrow \infty} |(-1)^n| = 1$.

Theorem 21. *Se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = l$ e (b_n) é tal que $a_n \leq b_n \leq c_n$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = l$.*

Demonstração. De fato, $|a_n - l| < \epsilon$ e $|c_n - l| < \epsilon$ então

$$l - \epsilon < a_n < l + \epsilon, \quad \forall n > n_1$$

$$l - \epsilon < c_n < l + \epsilon \quad \forall n > n_2$$

tome $n_0 = \max n_1, n_2$ então

$$l - \epsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < l + \epsilon, \quad \forall n > n_0$$

logo,

$$l - \epsilon < b_n < l + \epsilon, \quad \forall n > n_0$$

ou $|b_n - l| < \epsilon, \quad \forall n > n_0.$ □

Theorem 22. Se $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função tal que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$, então a sequência $a_n = f(n)$, $n > a$ é convergente e $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = l$. Se $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \pm\infty$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \pm\infty$.

Example 23. Considere a sequência $a_n = \frac{n+1}{n+2}$ e calcule o $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Note que a função $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$ é tal que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x+2} = 1$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$.

Example 24. Para calcular o $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n}$. Tomamos a função $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ e como

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

segue que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0$.

1.3.1 Propriedades do Limite

Sejam $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sequências convergentes limites l e r , respectivamente. Então:

1. $a_n \pm b_n$ converge para $l \pm r$;
2. ca_n converge para cl ;
3. $|a_n|$ converge para $|l|$;
4. a_nb_n converge para lr ;
5. se $r \neq 0$ então $\frac{a_n}{b_n}$ converge para $\frac{l}{r}$.

Vamos provar uma das propriedades acima, por exemplo, pode ser a propriedade 4. Suponha que $a_n \rightarrow l$ e $b_n \rightarrow r$ então dado $\epsilon > 0$, existe n_0 tal que $|a_n - l| < \epsilon$ e $|b_n - r| < \epsilon$ para todo $n > n_1$ e $n > n_2$, assim, se $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, temos que para $n > n_0$

$$|a_n b_n - lr| < |a_n b_n - a_n r + a_n r - lr| \leq |a_n| |b_n - r| + |r| |a_n - l| < M\epsilon + |r|\epsilon = (M + |r|)\epsilon.$$

Example 25. Analise sobre a convergência das sequências a seguir:

$$(a) a_n = \frac{3n+1}{5n} + \frac{(-1)}{n} \quad (b) b_n = \cos \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad (c) c_n = \frac{n^2 + 3}{4n^2 - 2n + 1}.$$

Theorem 26. Toda sequência monótona limitada é convergente.

Demonstração. Suponha (a_n) uma sequência crescente e limitada. Segue que existe $M > 0$ tal que

$$|a_n| \leq M, \quad \forall n$$

isto é, $a_n \leq M$. Logo, M é uma cota superior para (a_n) , seja $l = \sup a_n$ então l é a menor das cotas superiores de (a_n) , assim $l - \epsilon$ não é cota superior de (a_n) então existe n_1 tal que

$$l - \epsilon < a_{n_1} \leq l.$$

Como (a_n) é crescente então $a_n > a_{n_1}$ para todo $n > n_1$, segue que,

$$l - \epsilon < a_n < l + \epsilon, \quad \forall n > n_1$$

isto é,

$$|a_n - l| < \epsilon, \quad \forall n > n_1$$

o que implica em $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$. □

Example 27. Vimos que a sequência cujo termo geral é $a_n = \frac{n!}{1.3.5 \cdots (2n-1)}$ é decrescente. Veriquemos que ela também é limitada.

De fato, temos que

$$0 < a_n = \frac{1}{1} \frac{2}{3} \frac{3}{5} \cdots \frac{n}{2n-1} \leq 1.1.1 \cdots 1 = 1, \quad \forall n$$

Logo, pelo teorema 26 a_n é convergente. Além disso, $\inf a_n = 0$. Logo, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{1.3.5 \cdots (2n-1)} = 0$.

Theorem 28. *Se uma sequência (a_n) converge para um l então todas as subsequências dela convergem para l .*

Demonstração. Se pelo menos uma das subsequências de (a_n) digamos (a_{n_k}) tivesse um outro limite $r \neq l$ então $a_{n_k} \rightarrow r$ e $a_n \rightarrow l$ com $l \neq r$, mas isto contradiz o fato de limite ser único. $\square$

Example 29. *A sequência $(-1)^n$ possui subsequências tais que $(-1)^{2k} \rightarrow 1$ e $(-1)^{2k-1} \rightarrow -1$. Logo, $(-1)^n$ não converge. Por outro lado, a sequência $\frac{(-1)^n}{n}$ converge para zero, pois $|(-1)^n| \leq 1$ e $\frac{1}{n} \rightarrow 0$. Assim, $\frac{(-1)^n}{n} \rightarrow 0$.*

Theorem 30. *Teste da Razão para sequências Se uma sequência (a_n) de termos positivos satisfaz à condição $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l < 1$ então ela converge para zero.*

Demonstração. Seja $l < r < 1$ tal que $0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} < r, \forall n > n_0$. Como $r < 1$ então $0 < a_{n+1} < a_n r < a_n$ o que implica em a_n ser decrescente para $n \geq n_0$. Assim $0 < a_n \leq a_{n_0}, \forall n > n_0$ o que implica em (a_n) ser limitada. Logo, (a_n) é convergente. Suponha, por absurdo, que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = s \neq 0$ então

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}}{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = \frac{s}{s} = 1.$$

Mas, $l < 1$. $\square$

Example 31. *As sequências $a_n = \frac{n!}{n^n}, b_n = \frac{r^n}{n!}, c_n = \frac{n!}{1.3.5 \cdots (2n-1)}, d_n = \frac{n^p}{2^n}$ convergem todas a zero.*

De fato, para a sequência a_n temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)(n+1)} \frac{n^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e} < 1$$

aqui usou-se o limite fundamental:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Para a sequência b_n temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{(n+1)} n!}{(n+1)! r^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r}{n+1} = 0,$$

e, para a sequência d_n temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_{n+1}}{d_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \rightarrow \infty \frac{(n+1)^p 2^n}{2(n+1) n^p} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^p = \frac{1}{2} < 1$$

aqui usou-se o fato que se uma função f é contínua num intervalo que contém os termos da sequência (a_n) então $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n) = f(l)$. se $a_n \rightarrow l$. Nesse caso, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^p = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n}\right)^p = 1^p = 1$$

Example 32. Considere a sequência $a_n = n^{1/n}$ e calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n}$.

Temos que $n^{1/n} = \exp\left(\frac{1}{n} \ln n\right)$ daí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp\left(\frac{1}{n} \ln n\right) = \exp\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln n\right) = \exp 0 = 1.$$

Capítulo 2

Séries Numéricas

2.1 Séries Numéricas

Dada uma sequência $\{a_n\}$ de números reais, a soma infinita

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

será representada por $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Tais somas infinitas são chamadas de **séries infinitas** ou, simplesmente, **séries**.

Example 33. 1. A soma $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$ que é representada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \text{ é uma série geométrica.}$$

2. A soma infinita $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$ representamos por $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é conhecida como a **série harmônica**.

Dada uma série infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, as **somas parciais** dessa série são:

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_1 + a_2, \quad S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \quad \cdots, \quad S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Formamos então uma sequência de somas parciais $\{S_n\}$, se $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$,

$S \in \mathbb{R}$ então dizemos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **converge** e sua **soma** é S , isto

é, $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Se $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ não existe então dizemos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **diverge**.

Example 34. Seja $r \in \mathbb{R}$ e considere a série $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$, vamos analisar sobre a convergência ou divergência dessa série.

Seja $\{S_n\}$ a sequência de somas parciais de ordem n da série $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$, isto é,

$$S_n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n$$

temos que

$$rS_n = r + r^2 + \cdots + r^n + r^{n+1}$$

daí

$$(1 - r)S_n = 1 - r^{n+1}$$

ou

$$S_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

como $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ se $|r| < 1$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n$ não existe se $|r| > 1$, então concluímos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ converge e sua soma é $S = \frac{1}{1 - r}$ se $|r| < 1$ e, diverge se $|r| > 1$. No caso em que $|r| = 1$ a essa série também diverge, pois $\sum_{n=1}^{\infty} 1^n = 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots = +\infty$ e $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ não existe.

Conclusão a série $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ converge se $|r| < 1$ e diverge se $|r| \geq 1$. De forma análoga, a série $\sum_{n=1}^{\infty} ar^n$ converge para $\frac{a}{1 - r}$ se $|r| < 1$ e diverge se $|r| \geq 1$, tal série é chamada de **série geométrica**.

Example 35. A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ é uma série geométrica com $a = 1$ e $r = \frac{1}{2} < 1$,

portanto converge e sua soma é $S = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$.

Theorem 36 (Teste do n-ésimo termo). Se uma série $\sum a_n$ converge então $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Demonstração. Temos que

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

como $\sum a_n$ converge então $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S$ daí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

□

Example 37. 1. A série $\sum (-1)^n$ diverge pois $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$ não existe, logo, pelo teste do n -ésimo termo a série $\sum (-1)^n$ não pode convergir.

2. A série $\sum \frac{n}{n+1}$ diverge, pois $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$.

Consideremos a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n}$. Note que, $\frac{1}{n^2 + n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ e

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 1$$

portanto, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n}$ converge para 1. Tal série é conhecida como **séries de termos encaixantes**. De um modo geral, a série de termos encaixantes pode ser dada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1})$$

se b_n convergir então $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) = b_1 - \lim_{n \rightarrow \infty} b_{n+1}$. Note que se uma série $\sum a_n$ converge então necessariamente $\lim a_n = 0$. Mas se $\lim a_n = 0$ não implica que $\sum a_n$ convirja.

Um exemplo de série que satisfaz o fato de $\lim a_n = 0$ mas que ela diverge é a série harmônica que será estudada na próxima subseção.

2.1.1 A série harmônica

A série harmônica é série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Temos que

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

$$S_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

Logo,

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \quad (2.1)$$

se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ fosse convergente então as sequências de somas parciais $\{S_n\}$ e $\{S_{2n}\}$ convergiriam e teriam o mesmo limite, e dessa forma, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} - S_n = 0$. Mas, isto é impossível, pois a desigualdade em (2.1) implica em $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}$. Logo, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

O acréscimo ou omissão de um número finito de termos não altera a convergência ou divergência de uma série. Podemos daí deduzir que uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se, e somente se, $\lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{n=p}^{\infty} a_n = 0$. Esse é o critério de Cauchy dado abaixo.

Theorem 38 (Critério de Cauchy). *Uma série $\sum a_n$ converge se, e somente se, dado $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que*

$$|S_n - S_m| < \epsilon, \quad \forall n > m \geq n_0.$$

Theorem 39. *Se as séries $\sum a_n$ e $\sum b_n$ diferem apenas em uma quantidade finita de termos então ou ambas convergem ou ambas divergem.*

Demonstração. Por hipótese, existe um índice n_0 tal que $a_n = b_n$, $\forall n \geq n_0$. Logo:

$$S_n = a_1 + \cdots + a_{n_0} + b_{n_0+1} + \cdots + b_n$$

$$T_n = b_1 + \cdots + b_{n_0} + b_{n_0+1} + \cdots + b_n$$

daí

$$S_n = S_{n_0} - T_{n_0} + T_n$$

e $\lim S_n = S$ então $\lim T_n = S + T_{n_0} - S_{n_0}$, e se $\lim S_n$ não existe então $\lim T_n$ também não existe. $\square$

Example 40. *As séries $\sum \frac{1}{n}$ e $\sum \frac{1}{n-5}$ são divergentes e as séries $\sum \frac{1}{n^2+n}$ e $\sum \frac{1}{2^n}$ são convergentes.*

Como consequência do Teorema 39 as séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ são ambas convergentes ou ambas divergentes.

Theorem 41 (Propriedades das séries). *Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ séries numéricas e seja $\alpha \in \mathbb{R}$.*

1. Se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ convergem então $\sum(a_n + b_n)$ convergem e $\sum \alpha a_n$ converge.
2. Se $\sum a_n$ converge e $\sum b_n$ diverge então $\sum(a_n + b_n)$ diverge.
3. Se $\sum a_n$ diverge e $\alpha \neq 0$ então $\sum \alpha a_n$ diverge.

Se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ divergem nada podemos afirmar sobre $\sum(a_n + b_n)$. Tal soma pode convergir ou não. Exemplo, $\sum(\frac{1}{n} + \frac{-1}{n}) = 0$ converge, mas $\sum(\frac{1}{n} + \frac{1}{n}) = \sum \frac{2}{n}$ diverge.

2.2 Séries de termos positivos

Uma série $\sum a_n$ é uma série de termos positivos se $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Note que quando $\sum a_n$ é uma série de termos positivos então a sequência de somas parciais (S_n) dessa série é crescente, isto é,

$$S_1 \leq S_2 \leq \cdots \leq S_n \leq \cdots$$

logo, para que a série $\sum a_n$ convirja bast mostrar que (S_n) é limitada.

Theorem 42 (Teste de comparação). *Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ séries de termos positivos. Temos que:*

1. se $a_n \leq b_n$, para todo n e se $\sum b_n$ converge então $\sum a_n$ converge.
2. se $a_n \geq b_n$, para todo n e se $\sum b_n$ diverge então $\sum a_n$ diverge.

Demonstração. Suponha que $\sum a_n$ e $\sum b_n$ sejam séries de termos positivos, com $\sum b_n$ convergente e suponha que

$$a_n \leq b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

seja $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ e $T_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ então

$$S_n \leq T_n$$

como $\sum b_n$ converge então $\lim T_n$ existe. Logo (T_n) é limitada, desse modo, existe $M > 0$ tal que $T_n \leq M$. Assim,

$$S_n \leq M, \quad \forall n$$

segue (S_n) é convergente, logo $\sum a_n$ converge. Por outro lado, se $\sum b_n$ diverge e $a_n \geq b_n$, $\forall n$, então

$$S_n \geq T_n, \quad \forall n$$

como $\sum b_n$ diverge então $\lim T_n = +\infty$. Desse modo, $\lim S_n \geq \lim T_n \Rightarrow \lim S_n = +\infty$ o que implica $\sum a_n$ diverge. $\square$

Example 43. *Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \sqrt{n}}$ diverge.*

De fato, note que

$$n + \sqrt{n} < 2n \Rightarrow \frac{1}{n + \sqrt{n}} > \frac{1}{2n}$$

como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ diverge então pelo teste de comparação segue que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \sqrt{n}}$ também diverge.

Example 44. *Análise sobre a convergência ou divergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + n^2}$.*

Solução: Note que $n^3 + n^2 > n^2 + n$ o que implica em

$$\frac{1}{n^3 + n^2} < \frac{1}{n^2 + n}, \quad \forall n$$

como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n}$ converge então pelo teste de comparação a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + n^2}$ converge.

Theorem 45 (Teste da Integral). *Seja $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e supomos que f é positiva e decrescente então:*

1. *a série $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ é convergente se $\int_1^{\infty} f(x)dx$ for convergente,*
2. *a série $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ é divergente se $\int_1^{\infty} f(x)dx$ for divergente.*

Demonstração. Seja $f(x)$ função monótona decrescente e positiva. Temos que

$$f(2) + f(3) + \cdots + f(n) \leq \int_1^n f(x)dx \leq f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1)$$

ou

$$S_n \leq f(1) + \int_1^n f(x)dx$$

ou ainda

$$S_n \leq f(1) + \int_1^n f(x)dx \leq f(1) + \int_1^{\infty} f(x)dx$$

logo S_n é limitada então S_n é convergente, portanto, $\sum f(n)$ converge. De modo análogo, como

$$\int_1^n f(x)dx \leq S_{n-1}$$

se $\int_1^{\infty} f(x)dx = +\infty$ então $\lim S_{n-1} = +\infty$, logo, $\sum f(n)$ diverge. $\square$

Exemplo 46. 1. Seja $f(x) = \frac{1}{x^2}$ temos que $f(x)$ é positiva e decrescente

já que $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$. A integral $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ converge e, portanto, $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

2. $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ atende às condições expostas mas $\int_2^\infty \frac{1}{x \ln x} = \lim_{B \rightarrow \infty} [\ln(\ln x)]_2^B = +\infty$, logo $\sum \frac{1}{n \ln n}$ diverge.

3. Tomando $f(x) = xe^{-x^2}$, $\int_1^\infty xe^{-x^2} dx = \frac{1}{2e}$ o que implica $\sum ne^{-n^2}$ converge.

A série $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p}$ é uma **p-série**. Analisemos sobre a convergência ou divergência dessa série. Temos o seguinte resultado.

Theorem 47. A p-série $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p}$ converge se $p > 1$ e diverge se $p \leq 1$.

Demonstração. Calculemos a integral,

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx = \lim_{B \rightarrow \infty} \int_1^B \frac{1}{x^p} dx = \lim_{B \rightarrow \infty} [B^{1-p} - 1], \quad p \neq 1$$

se $p < 1$, temos que o $\lim_{B \rightarrow \infty} B^{1-p} = +\infty$, se $p > 1$ então $\lim_{B \rightarrow \infty} B^{1-p} = 0$. $\square$

Theorem 48 (Forma limite do teste de comparação). Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ duas séries de termos positivos e seja $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$.

1. se $l > 0$ então ou ambas as séries $\sum a_n$ e $\sum b_n$ convergem ou ambas divergem

2. se $l = 0$ e $\sum b_n$ converge então $\sum a_n$ converge.

3. se $l = +\infty$ e $\sum b_n$ diverge então $\sum a_n$ diverge.

Demonstração. Fixado $\epsilon = l/2$ podemos encontrar n_0 tal que

$$\frac{l}{2} b_n \leq a_n \leq \frac{3}{2} l b_n, \quad \forall n \geq n_0$$

assim, usando o teste de comparação provamos a primeira parte do teorema.

Pois se $\sum b_n$ converge então $\sum (\frac{3}{2}l)b_n$ também converge e como $a_n \leq (\frac{3}{2}l)b_n$

para todo n segue o resultado. Por outro lado, se $\sum b_n$ diverge como $\frac{l}{2}b_n \leq a_n$ para todo n , segue que $\sum a_n$ diverge, já que $\sum (l/2)b_n$ diverge. $\square$

Example 49. Considere a série $\sum \frac{6\sqrt{n}}{5n+4}$. Ela converge ou diverge?

Solução: Para encontrar uma série que possamos comparar com a série dada olhamos os termos que dominam no numerador e denominador da série original, neste caso, escolhemos $\sum \frac{\sqrt{n}}{n} = \sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ para comparar com a série dada, já sabemos que a série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ é uma p-série com $p = 1/2 < 1$ logo, diverge. E como $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6\sqrt{n}}{5n+4} \sqrt{n} = \frac{6}{5} > 0$ então pela forma limite do teste de comparação segue que $\sum \frac{6\sqrt{n}}{5n+4}$ diverge.

Example 50. As séries $\sum e^{-n^2}$ e $\sum \sin^4(\frac{1}{n})$ convergem ou divergem?

Solução: Como $\lim e^{-n^2}/1/n^2 = 0$ e $\lim \frac{\sin^4(\frac{1}{n})}{1/n^4} = 1$ então ambas as séries convergem, pela forma limite do teste de comparação, já que as séries $\sum 1/n^2$ e $\sum 1/n^4$ convergem.

Theorem 51 (Reagrupamento). *O reagrupamento de séries de termos positivos que sejam convergentes não altera a convergência da série.*

Dadas duas séries $\sum a_n$ e $\sum b_n$ convergentes então $\sum a_n b_n$ não é necessariamente convergente. Além disso,

$$\sum a_n b_n \neq \sum a_n \sum b_n = \sum c_n$$

onde

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n a_j b_{n-j}$$

Example 52. Temos que a série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge mas $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \sum 1/n$ diverge.

2.3 Séries Alternadas

Séries do tipo $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ ou $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{(n-1)} a_n$ com os termos $a_n \geq 0$ para todo n é dita **série alternada**. Ou seja,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = -a_1 + a_2 + \cdots + (-1)^n a_n + \cdots$$

Theorem 53 (Critério de Leibniz). *Seja $\{a_n\}$ uma sequência de termos positivos com as propriedades:*

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.
2. $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq \dots$, isto é, (a_n) monótona decrescente.

Então a série alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge.

Demonstração. Considere a série alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$, temos que

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2n-1} - a_{2n})$$

ou seja, (S_{2n}) é monótona crescente, e reagrupando seus termos temos

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_3 - a_4) - \dots - (a_{2n-1} - a_{2n}) \leq a_1$$

logo, (S_{2n}) é limitada, segue que existe $S = \lim S_{2n}$. Agora, como

$$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$$

passando o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} + \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = S + 0$$

logo, o $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, portanto $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ converge. $\square$

Example 54. A série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge, pois o $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ e $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$, $\forall n$.

Example 55. A série $\sum \frac{(-1)^n}{n5^n}$ converge pelo teste de Leibniz.

Example 56. A série $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2-5}$ converge também pelo Teste de Leibniz.

Theorem 57. O erro que se comete ao se aproximar a soma da série $\sum (-1)^n a_n$ por S_n é de a_{n+1} .

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned} |S_n - S| &= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k \right| = |(-1)^{n+1} a_{n+1} + (-1)^{n+2} a_{n+2} + \dots| \\ &= |(-1)^{n+1} [a_{n+1} - a_{n+2} + \dots]| \\ &= a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + \dots \leq a_{n+1}. \end{aligned}$$

$\square$

Example 58. Para a série do exemplo 94 temos que

$$S_4 = -\frac{1}{5} + \frac{1}{50} - \frac{1}{325} + \frac{1}{2500} \approx -0,18$$

o erro cometido para essa aproximação foi $a_5 = \frac{1}{15625} \approx 64 \times 10^{-6}$

2.4 Convergência Absoluta

Uma série $\sum a_n$ **converge absolutamente** se a nova série $\sum |a_n|$ converge. Por exemplo, a série $\sum \frac{(-1)^n}{2^n}$ converge absolutamente pois a série $\sum \frac{1}{2^n}$ é uma série geométrica de razão $r = 1/2$ e, portanto, convergente.

Theorem 59 (Convergência absoluta). *Se uma série $\sum a_n$ é absolutamente convergente então ela é convergente.*

Demonstração. Suponha que $\sum a_n$ converge absolutamente então $\sum |a_n|$ converge. Podemos considerar $b_n = a_n + |a_n|$ como $-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$ então

$$0 \leq b_n \leq 2|a_n|$$

Logo, $\sum b_n$ converge pelo teste de comparação. Então

$$\sum a_n = \sum (a_n + |a_n|) - \sum |a_n|$$

converge. □

Uma série $\sum a_n$ tal que $\sum |a_n|$ diverge é dita **condicionalmente convergente**. Por exemplo, a série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge pelo teste das séries alternadas mas a série $\sum |\frac{(-1)^n}{n}| = \sum \frac{1}{n}$ diverge. Logo, a série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ é condicionalmente convergente.

Example 60. *A série $\sum \frac{\sin n}{n^2}$ converge ou diverge?*

Solução: Note que

$$|\sin n| \leq 1$$

daí

$$\frac{|\sin n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

portanto $\sum \frac{|\sin n|}{n^2}$ converge, pelo teste de comparação, logo, a série $\sum \frac{\sin n}{n^2}$ converge absolutamente.

2.5 Teste da Razão e da Raíz

Theorem 61 (Teste da Razão). *Consideremos uma série $\sum a_n$ com $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$.*

1. *se $l < 1$ então a série $\sum a_n$ converge absolutamente.*
2. *se $l > 1$ ou $l = \infty$ então $\sum a_n$ diverge.*

3. se $l = 1$ nada se pode concluir.

Demonstração. Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l < 1$ então existe um número real $0 < r < 1$ tal que

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < r, \quad \forall n > n_0$$

desse modo

$$|a_{n_0+k}| \leq r^k |a_{n_0}|, \quad \forall k \geq 1$$

Como $\sum r^k$ é convergente então $\sum |a_{n_0}| r^k$ também converge e $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} |a_n|$ converge pelo teste de comparação, logo, $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente, o que implica que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente (um número finito de termos não altera a convergência ou divergência da série). Se, por outro lado, $l > 1$, então $|a_{n+1}| > |a_n|$ e se, $a_{n_0} \neq 0$ para algum n_0 então, $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| \neq 0$ o que nos dá $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$. Logo, $\sum a_n$ diverge (teste do n -ésimo termo). $\square$

Example 62. Considere a série as séries $\sum \frac{3^n}{n!}$ e $\sum \frac{3^n}{n^2}$ analise sobre a convergência ou divergência dessas séries.

Solução: Pelo teste da razão, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n+1} = 0 < 1$$

então a série $\sum \frac{3^n}{n!}$ converge pelo teste da razão. E como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1)^2} \frac{n^2}{3^n} = 3 > 1$$

então a série $\sum \frac{3^n}{n^2}$ diverge pelo teste da razão.

Example 63. Considere a série $\sum (-1)^n \frac{n^2 + 4}{2^n}$ ela converge ou diverge?

Solução: Usando o teste da razão temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} [(n+1)^2 + 4]}{2^{n+1}} \frac{2^n}{(-1)^n (n^2 + 4)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{n^2 + 2n + 5}{n^2 + 4} \right) = \frac{1}{2} < 1$$

o que implica que a série converge.

Theorem 64 (Teste da Raíz). Seja $\sum a_n$ uma série numérica. Seja $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$. Temos que

1. se $l < 1$ então $\sum a_n$ converge absolutamente.
2. se $l > 1$ então $\sum a_n$ diverge.
3. se $l = 1$ nada se conclui.

Demonstração. Suponha $l < 1$ então existe $0 < r < 1$ tal que

$$\sqrt[n]{|a_n|} < r, \quad \forall n > n_0$$

ou

$$|a_n| < r^n, \quad \forall n > n_0$$

como $\sum r^n$ converge segue que $\sum |a_n|$ converge e, portanto, $\sum a_n$ converge absolutamente. Por outro lado, se $l > 1$ então existe $r > 1$ tal que

$$\sqrt[n]{|a_n|} > r, \quad \forall n > n_0$$

ou

$$|a_n| > r^n, \quad \forall n > n_0$$

como $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = +\infty$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = +\infty$ o que implica $\sum a_n$ diverge (Por quê?). $\square$

Example 65. Considere a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$. Pelo teste da raiz: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2} = \frac{1}{2} < 1$. Logo, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ converge absolutamente.

Example 66. A série $\sum \frac{n^n}{2^n}$ diverge pois, usando o teste da raiz, temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} = +\infty$.

Example 67. A série $\sum \frac{1}{n}$ diverge e a série $\sum \frac{1}{n^2}$ convergente mas $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$, e o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{2/n}} = 1$. Se usarmos o teste da razão para essas mesmas séries obtemos resultados semelhantes do limite, ou seja, o limite será igual a 1. Por isso, quando $l = 1$ o resultado é inconclusivo, pois a série tanto pode convergir como divergir.

Capítulo 3

Séries de Potências

3.1 Séries de Potências

Uma série de potências de x é uma série do tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

Example 68. A série

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

é uma série de potências de x . Observe que ela é uma série geométrica de razão $r = x$. Como a série geométrica só converge se $|r| < 1$ então a série $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ só converge se $|x| < 1$. Neste caso, sua soma é $S = \frac{1}{1-x}$. Podemos então afirmar que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots, \quad |x| < 1.$$

Dada uma série de potências de x , $\sum a_n x^n$, usando o teste da razão temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |x|l < 1$$

logo, $|x| < \frac{1}{l} = R$, R é o raio de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Theorem 69. Seja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ uma série de potências de x . Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge para um certo $c \neq 0$ e diverge para um certo $d \neq 0$ com $|c| < |d|$. Então $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge absolutamente para todo x tal que $|x| < |c|$ e diverge para todo x tal que $|x| > |d|$.

Demonstração. Seja a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ tal que ela converge para $x = c$ e diverge para $x = d$ com $|c| < |d|$. Considere x tal que $|x| < |c|$ temos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |x|^n = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n c^n| \left(\frac{|x|}{|c|} \right)^n$$

como $\sum_{n=0}^{\infty} a_n c^n$ converge então devemos ter que $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n c^n| = 0$, podemos então tomar n_0 tal que $|a_n c^n| < 1$ para todo $n > n_0$ desse modo,

$$|a_n| |x|^n = |a_n c^n| \left(\frac{|x|}{|c|} \right)^n < \left(\frac{|x|}{|c|} \right)^n, \quad \forall n > n_0$$

como $|x| < |c|$ então $\left| \frac{x}{c} \right| < 1$ e a série $\sum_{n=n_0}^{\infty} \left| \frac{x}{c} \right|^n$ é uma série geométrica convergente. Desse modo, a série $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n| |x|^n$ converge, o que implica que a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge absolutamente para todo $|x| < |c|$. Agora suponha que x seja tal que $|x| > |d|$ se, por absurdo, supomos que exista algum x_1 com $|x_1| > |d|$ e $\sum a_n x_1^n$ convirja, então pelo que acabamos de mostrar essa série deve convergir para todo x tal que $|x| < |x_1|$ assim, como, $|d| < |x_1|$ então $\sum a_n d^n$ converge, o que é um absurdo. Então para todo x tal que $|x| > |d|$ a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ diverge. $\square$

Theorem 70. *Seja $\sum a_n x^n$ uma série de potências de x . Então somente uma das alternativas abaixo deve ocorrer.*

1. A série converge somente para $x = 0$ ($R=0$)
2. A série converge para todo x real. ($R=\infty$)
3. Existe $R > 0$ tal que a série $\sum a_n x^n$ converge para todo x tal que $|x| < R$ e diverge para todo x tal que $|x| > R$.

Demonstração. Se não ocorre a primeira nem a segunda situação então existe um $x_1 \neq 0$ onde $\sum a_n x_1^n$ converge e um $x_2 \neq 0$ com $|x_1| < |x_2|$ onde $\sum a_n x_2^n$ diverge. Seja

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid \sum a_n x^n \text{ converge}\}$$

é claro que $|x_2|$ é uma cota superior de S , tomemos então $R = \sup S$. Provemos que se $|x| < R$ então $x \in S$. De fato, se $|x| < R$ então x não pode ser cota superior de S já que R é a menor das cotas superiores, então deve ter um elemento x_0 de S tal que $|x| \leq |x_0|$ então pelo teorema anterior $x \in S$. Também se x não pertencesse a S então $\sum a_n x^n$ divergiria e x seria uma cota superior de S o que contradiz o fato de R ser a menor delas, já que $|x| < R$. Por outro lado, se $|x| > R$ então $\sum a_n x^n$ deve divergir, pois se $\sum a_n x^n$ convergisse R não seria uma cota superior de S o que é absurdo já que $R = \sup S$. $\square$

R é o raio de convergência da série $\sum a_n x^n$. Já o **intervalo de convergência** da série é um dos seguintes intervalos:

$$(-R, R), (-R, R], [-R, R), [-R, R]$$

fora desses intervalos a série sempre diverge. E o intervalo $(-R, R)$ é sempre o intervalo de convergência absoluta da série.

Theorem 71. *Seja $\sum a_n x^n$ uma série de potências de x . Se essa série tem raio de convergência R . Então ela pode ser derivada termo a termo ou integrada termo a termo, isto é,*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) &= \frac{d}{dx} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots) \\ &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \end{aligned}$$

e

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$$

essas novas séries obtidas têm o mesmo raio de convergência da série original.

Example 72. *Obtenha uma série de potências de x que represente a função*

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}.$$

Solução: Observe que

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1+x} \right) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

como

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$$

usando o teorema 71 obtemos

$$-\frac{1}{(1+x)^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1+x} \right) = -1 + 2x - 3x^2 + \cdots + (-1)^n n x^{n-1} + \cdots \quad |x| < 1.$$

Example 73. *Obtenha uma série de potências de x que represente a função $\ln(1+x)$.*

Solução: Note que

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt$$

como

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n, \quad |t| < 1$$

o que nos leva a

$$\ln x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad |x| < 1$$

O intervalo de convergência dessa série é $(-1, 1]$. Isso, porque quando escolhermos $x = -1$ na série de $\ln(1+x)$ obtemos a série numérica $-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ que é divergente, por outro lado, se fazemos $x = 1$ na série de $\ln(1+x)$ obtemos a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ que converge pelo teste de Leibniz.

Example 74. A série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ é absolutamente convergente para todo x real. Que função essa série representa?

Solução: De fato, vemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1$$

então pelo teste da razão essa série converge absolutamente para todo x real. Suponha que a série acima represente uma função $f(x)$, ou seja, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Derivando a função $f(x)$ obtemos

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{x^{n-1}}{n!}$$

ou

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

ou ainda

$$f'(x) = f(x)$$

daí

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 1$$

integrando a igualdade acima obtemos

$$\ln f(x) = x + c_0$$

ou

$$f(x) = Ce^x, \quad (C = e_0^c \text{ é uma constante})$$

como $f(0) = 1$ obtemos $C = 1$ e $f(x) = e^x$, portanto, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$.

Uma série de potências de $x - x_0$ é uma série do tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots$$

Todos os resultados que obtivemos para as séries de potências de x são válidos para as séries de potências de $x - x_0$ com as devidas adaptações.

Example 75. *Da série*

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad |x| < 1$$

obtemos

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad |x| < 1$$

integrando termo a termo, de 0 a x para $|x| < 1$, temos

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| \leq 1$$

Example 76. *Considere a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^{n+1}}{n}$ analisemos sobre o intervalo de convergência dessa série.*

Solução: Usando o teste da razão

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x-3)^{n+2}}{n+1} \frac{n}{(x-3)^{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |x-3| \frac{n}{n+1} = |x-3|$$

essa série converge absolutamente se $|x-3| < 1$, que equivale a $2 < x < 4$ e diverge fora desse intervalo. No caso em que $|x-3| = 1$ que corresponde a

$x = 2$ e $x = 4$, quando substituimos $x = 2$ nessa série obtemos $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ que converge e para $x = 4$ obtemos a série $\sum \frac{1}{n}$ que diverge. Logo, o intervalo de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^{n+1}}{n}$ é o intervalo $2 \leq x < 4$.

3.2 Séries de Taylor

Quando uma função é representada por uma série de potências então podemos ter

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

Levantamos então as seguintes questões: que relação há entre $f(x)$ e os coeficientes da série a_n ? Em que situação essa série representa realmente a função $f(x)$? Em relação à primeira questão temos que se $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e se $f(x) \in C^\infty$ então $f(0) = a_0$ e, como $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ então $f'(0) = a_1$, como $f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$ então $f''(0) = 2! a_2$, e assim por diante, seguindo esse mesmo raciocínio obtemos $f^{(n)}(0) = n! a_n$ então podemos concluir que

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

essa série é conhecida como **série de Maclaurin** da função f . A **série de Taylor** de f em torno de um ponto x_0 é

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \cdots$$

onde os $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, para todo $n \geq 0$, aqui usa-se a convenção de que $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$. A série de Maclaurin de uma função f nada mais é que a sua série de Taylor em torno do ponto $x = 0$.

Example 77. Achar a série de Maclaurin da função $f(x) = \sin x$.

Solução: Temos que

$$\begin{cases} f(x) = \sin x \Rightarrow f(0) = \sin 0 = 0 \\ f'(x) = \cos x \Rightarrow f'(0) = \cos 0 = 1 \\ f''(x) = -\sin x \Rightarrow f''(0) = -\sin 0 = 0 \\ f'''(x) = -\cos x \Rightarrow f'''(0) = -\cos 0 = -1 \\ f^{(iv)}(x) = \sin x \Rightarrow f^{(iv)}(0) = \sin 0 = 0 \end{cases}$$

só os termos ímpares são diferentes de zero, analisemos esses termos

$$\begin{cases} f^{(1)}(0) = f^{(2 \cdot 0 + 1)}(0) = (-1)^0 = 1 \\ f^{(3)}(0) = f^{(2 \cdot 1 + 1)}(0) = (-1)^1 = -1 \\ f^{(5)}(0) = f^{(2 \cdot 2 + 1)}(0) = (-1)^2 = 1 \\ \vdots \\ f^{(2 \cdot k + 1)}(0) = (-1)^k \end{cases}$$

assim

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

Essa é a série de Maclaurin da função $f(x) = \operatorname{sen} x$. Com a série de Maclaurin da função $f(x) = \operatorname{sen} x$ podemos encontrar a série de Maclaurin da função $f(x) = \cos x$, por derivação termo a termo,

$$\cos x = \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

Example 78. Encontre a série de Taylor da função $\ln x$ em torno de $x = 1$.

Solução: Temos

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \ln x \Rightarrow f(1) = \ln 1 = 0 \\ f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(1) = 1 \\ f''(x) = \frac{-1}{x^2} \Rightarrow f''(1) = -1 \\ f'''(x) = \frac{2}{x^3} \Rightarrow f'''(1) = 2 \\ f^{(iv)}(x) = -\frac{3!}{x^4} \Rightarrow f^{(iv)}(1) = -3! \\ \vdots \\ f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n} \Rightarrow f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1} (n-1)! \end{array} \right.$$

logo,

$$\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^n (x-1)^n}{n} + \cdots$$

com $|x-1| < 1$.

3.2.1 Polinômios de Taylor

O **polinômio de Taylor** de uma função $f(x)$ em torno de $x = a$ é

$$P_{n,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

O **polinômio de Maclaurin** de f é:

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

que é o polinômio de Taylor de f em torno do ponto $x = 0$. Por exemplo, o polinômio de Maclaurin de $f(x) = \exp x$ é

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

Theorem 79 (Fórmula de Taylor com resto). *Seja $f(x)$ uma função de classe C^∞ num intervalo que contém a . Dado qualquer x nesse intervalo existe um número real ξ entre a e x tal que*

$$f(x) = P_{n,a}(x) + R_n(x)$$

onde $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^n$, e

$$P_{n,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Além disso, a sequência $P_{n,a}(x)$ converge para $f(x)$ quando $n \rightarrow \infty$ se, e somente se, $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$.

Demonstração. Considere a função $G : [a, x] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$G(t) = f(x) - [f(t) + f'(t)(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n] - R_n(x) \frac{(x-t)^{n+1}}{(x-a)^{n+1}}$$

com a e x fixos, onde $R_n(x) = f(x) - P_{n,a}(x)$. Observe que G satisfaz as seguintes propriedades:

1. $G(a) = f(x) - P_{n,a}(x) - R_n(x) = 0$
2. $G(x) = 0$
3. G é contínua no intervalo fechado $[a, x]$ e derivável no intervalo aberto (a, x) .

Logo, pelo teorema de Rolle existe um ξ tal que ξ está entre a e x tal que $G'(\xi) = 0$. Mas

$$G'(t) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n - (n+1)R_n(x) \frac{(x-t)^n}{(x-a)^{n+1}}$$

e, portanto, $G'(\xi) = 0$ implica em $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^n$.

Note que a soma parcial de ordem n da série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$ é $S_n = P_{n,a}(x)$. Logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{n,a}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x) - R_n(x)] = f(x)$$

Logo,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

□

Example 80. *Mostre que a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ realmente representa a função $f(x) = e^x$ para todo x real.*

Solução: Já vimos que $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Falta mostrar que esta série realmente representa a função exponencial e^x . Pela Fórmula de Taylor com resto, temos que

$$e^x = P_n(x) + R_n(x)$$

onde

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

e

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x)^{n+1} = \frac{e^{\xi} x^{n+1}}{(n+1)!}$$

onde ξ está entre 0 e x . Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{e^{\xi} x^{n+1}}{(n+1)!} \right| = 0.$$

Logo, realmente a série representa a função e^x .

Example 81. *Análise se a série da função $f(x) = \sin x$ realmente a representa.*

Solução: Temos que

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -1, \dots$$

Além disso,

$$f^{(n+1)}(\xi) = \begin{cases} \pm \sin \xi, & n \text{ par} \\ \pm \cos \xi, & n \text{ ímpar} \end{cases}$$

e o resto

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

e, $\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(x)| = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ e portanto, a série do $\sin x$ representa essa função.

Remark 82. Uma função $f(x)$ é **analítica** em $x = a$ quando ela puder ser representada por sua série de Taylor em algum intervalo aberto em torno de a .

Um outro resultado que podemos deduzir da fórmula $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ é que se aproximarmos o valor de $f(x)$ por $P_n(x)$ o erro que cometemos é da ordem de $|R_n(x)|$.

Example 83. Encontre o valor aproximado de $e^{-0.04}$ com erro menor que 5×10^{-4} .

Solução: Temos que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$$

se aproximarmos

$$e^{-0.04} \approx 1 - 0.04 + \frac{(0.04)^2}{2!}$$

então o erro que cometemos será de

$$|R_3(-0.04)| \leq \frac{|(-0.04)^3|}{3!} \approx \frac{0.000064}{3!}.$$

3.2.2 Série Binomial

Binômio de Newton

$$(x + y)^k = x^k + kx^{k-1}y + \frac{k(k-1)}{2!}x^{k-2}y^2 + \cdots + y^k$$

ou simbolicamente,

$$(x + y)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} x^j y^{k-j};$$

onde

$$\binom{k}{j} = \frac{k!}{j!(k-j)!}$$

fazendo nesta fórmula $y = 1$, obtemos

$$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{k(k-1)\dots(k-j+1)}{j!}x^j + \dots + x^k$$

Motivado por essa fórmula, procuramos um desenvolvimento em série de potências para a função $f(x) = (1+x)^\alpha$, onde α é um número real qualquer. A **série binomial** é definida como

$$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \dots$$

o n -ésimo termo dessa série é

$$a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |x| \frac{|\alpha-n|}{n+1} = |x|$$

portanto, a série binomial converge absolutamente quando $|x| < 1$ e diverge se $|x| > 1$. Se tal série converge para uma função g então devemos ter que

$$g(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

e, por derivação termo a termo

$$g'(x) = \alpha + \alpha(\alpha-1)x + \dots + \frac{n\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^{n-1} + \dots$$

desse modo,

$$g'(x) + xg'(x) = \alpha g(x)$$

ou

$$(1+x)g'(x) - \alpha g(x) = 0$$

daí

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{g(x)}{(1+x)^\alpha} \right] = \frac{(1+x)g'(x) - \alpha g(x)}{(1+x)^{\alpha+1}}$$

ou

$$\frac{g(x)}{(1+x)^\alpha} = c$$

e como $g(0) = 1$ então $g(x) = (1+x)^\alpha$.

Example 84. Ache a série binomial da função $\sqrt{1+x}$.

Solução: Como $\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2}$ então

$$\begin{aligned}(1+x)^{1/2} &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \cdots + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}x^n + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \cdots + (-1)^n \frac{1.3\cdots(2n-3)}{2^n n!}x^n + \cdots\end{aligned}$$

Capítulo 4

Séries de Fourier

4.1 Introdução

As séries de Fourier são ferramentas muito importante na resolução de Equações Diferenciais Parciais. Podemos aplicá-las em diversas equações da Física-Matemática, principalmente nas equações de Onda, Calor e Laplace. Vamos desenvolver neste capítulo toda a teoria para calcular as séries de Fourier de algumas funções e depois aplicar o método desenvolvido para resolver as equações acima citadas.

4.2 Funções Periódicas

Definition 85. Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é periódica de período T se $f(x + T) = f(x)$ para todo x .

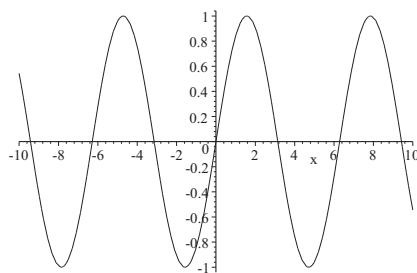
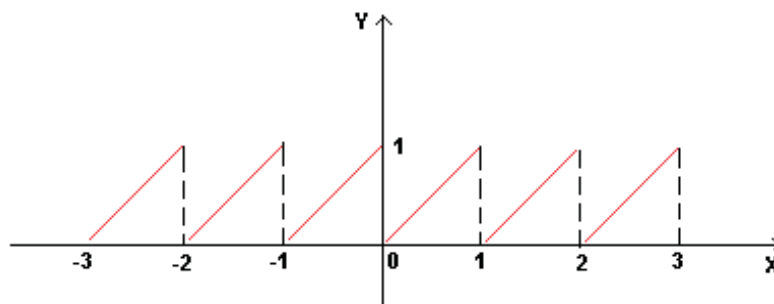
Example 86. A função $\sin x$ é periódica de período 2π . Observe a figura 4.1.

Example 87. A função $f(x) = x - [x]$, onde $[x]$ representa o maior inteiro, menor do que ou igual a x , é periódica de período 1. Veja o gráfico de f dado pela figura 4.2.

Observação:

Se T é um período para a função f , então $2T$ também é um período, pois:

$$f(x + 2T) = f(x + T) = f(x)$$

Figura 4.1: $y = \text{sen } x$ Figura 4.2: $f(x) = x - [x]$

E em geral, kT é um período, onde k é um inteiro. Para $k = 0$, temos que 0 é um período da f . Mas isso não tem interesse pois 0 é período de qualquer função. O menor período positivo é chamado o período fundamental.

Example 88. O período fundamental T da função $\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ pode ser determinado do seguinte modo. Devemos ter:

$$\text{sen} \frac{n\pi(x+T)}{L} = \text{sen} \frac{n\pi x}{L}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Usando a seguinte propriedade trigonométrica, $\text{sen}(a+b) = \text{sen } a \text{sen } b + \text{sen } b \text{sen } a$, devemos ter:

$$\text{sen} \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi T}{L} + \text{sen} \frac{n\pi T}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} = \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \quad (4.1)$$

Fazendo $x = \frac{L}{2n}$, na igualdade acima obtemos:

$$\text{sen} \frac{\pi}{2} \cos \frac{n\pi T}{L} = \text{sen} \frac{\pi}{2}$$

O que implica:

$$\cos \frac{n\pi T}{L} = 1 \quad (4.2)$$

, e daí, usando a identidade: $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, obtemos:

$$\sin \frac{n\pi T}{L} = 0 \quad (4.3)$$

Como estamos interessados no menor valor positivo de T que satisfaça (4.2) e (4.3), simultaneamente, então $\frac{n\pi T}{L} = 2\pi$, isto é, o período fundamental de $\sin \frac{n\pi x}{L}$ é: $T = \frac{2L}{n}$. (De maneira análoga obtemos que o período fundamental de $\cos \frac{n\pi x}{L}$ é também $\frac{2L}{n}$.)

4.3 Coeficientes de Fourier

Se uma função $f(x)$ for expressa com:

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (4.4)$$

é de se esperar que os coeficientes a_n e b_n estejam intimamente ligados à função f .

Vamos supor que a igualdade acima se verifique, e que a série em (4.4) convirja uniformemente.

Como consequência da Proposição 1, f deve ser contínua (e portanto, pode ser integrada termo a termo), e deve ser periódica de período $2L$ (pois o período fundamental de $\cos \frac{\pi x}{L}$ é $2L$, e $2L$ é período para as demais funções seno e co-seno que aparecem na série). Assim, usando a Proposição 2, podemos integrar ambos os lados de (4.4) para obter:

$$\int_{-L}^L f(x) dx = \frac{1}{2}a_0 \int_{-L}^L dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx + b_n \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right) \quad (4.5)$$

por outro lado,

$$\int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} dx = 0$$

pois,

$$\int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{L}{n\pi} \int_{-n\pi}^{n\pi} \sin u du = -\frac{L}{n\pi} (\cos u) \Big|_{-n\pi}^{n\pi} = 0$$

de modo análogo segue que

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx = 0$$

segue da igualdade (4.5) e do exposto acima que

$$\int_{-L}^L f(x) dx = \frac{1}{2} a_0 \int_{-L}^L dx$$

segue que

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx \quad (4.6)$$

Para calcularmos os demais coeficientes usamos as seguintes relações:

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx = 0, \text{ se } n, m \geq 1 \quad (4.7)$$

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx = \begin{cases} L, & \text{se } n = m \geq 1 \\ 0, & \text{se } n \neq m, n, m \geq 1 \end{cases} \quad (4.8)$$

$$\int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx = \begin{cases} L, & \text{se } n = m \geq 1 \\ 0, & \text{se } n \neq m, n, m \geq 1 \end{cases} \quad (4.9)$$

por questões de esclarecimento vamos provar uma dessas relações, para $n = m \geq 1$ temos:

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \cos^2 \frac{n\pi x}{L} dx &= \frac{L}{n\pi} \int_{-n\pi}^{n\pi} \cos^2 u du = \frac{L}{2n\pi} \int_{-n\pi}^{n\pi} (\cos 2u + 1) du \\ &= \frac{L}{2n\pi} \left[\left(\frac{1}{2} \sin 2u \right) + (u) \right]_{-n\pi}^{n\pi} = \frac{L}{2n\pi} [n\pi - (-n\pi)] = \frac{L}{2n\pi} [2n\pi] = L \end{aligned}$$

Analogamente mostram-se as outras relações.

Agora, multiplicando (4.4) por $\cos \frac{m\pi x}{L}$, com $m \geq 1$ fixo, e integrando de $-L$ a L , obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{m\pi x}{L} dx &= \frac{1}{2} a_0 \int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} dx + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx + b_n \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx \right) \end{aligned}$$

Do somatório acima obtemos

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{m\pi x}{L} dx &= \frac{1}{2} a_0 \int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} dx \\ &+ (a_1 \int_{-L}^L \cos \frac{\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx + b_1 \int_{-L}^L \sin \frac{\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx + \dots \\ &+ a_m \int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx + b_m \int_{-L}^L \sin \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx + \dots) \end{aligned}$$

Usando as relações (4.7), (4.8) e (4.9) expostas acima concluímos que:

$$\int_{-L}^L f(x) \cos \frac{m\pi x}{L} dx = 0 + (0 + \dots + a_m L + b_m 0 + \dots + 0 + \dots)$$

o que nos dá

$$\int_{-L}^L f(x) \cos \frac{m\pi x}{L} dx = a_m L \quad (4.10)$$

De modo análogo, multiplicando (4.4) por $\sin \frac{m\pi x}{L}$, com $m \geq 1$ fixo, e integrando de $-L$ a L , obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{m\pi x}{L} dx &= \frac{1}{2} a_0 \int_{-L}^L \sin \frac{m\pi x}{L} dx + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx + b_n \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx \right) \end{aligned}$$

daí

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{m\pi x}{L} dx &= \frac{1}{2} a_0 \int_{-L}^L \sin \frac{m\pi x}{L} dx \\ &+ (a_1 \int_{-L}^L \cos \frac{\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx + b_1 \int_{-L}^L \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx + \dots \\ &+ a_m \int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx + b_m \int_{-L}^L \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx + \dots) \end{aligned}$$

Novamente das relações (4.7), (4.8) e (4.9) temos:

$$\int_{-L}^L f(x) \sin \frac{m\pi x}{L} dx = 0 + (0 + \dots + a_m 0 + b_m L + \dots + 0 + \dots)$$

segue que

$$\int_{-L}^L f(x) \sin \frac{m\pi x}{L} dx = b_m L \quad (4.11)$$

Finalmente, de (4.6), (4.10) e (4.11) obtemos:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, n \geq 0 \quad (4.12)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, n \geq 1 \quad (4.13)$$

Definition 89. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$, integrável e absolutamente integrável em cada intervalo limitado; em particular, $\int_{-L}^L |f(x)| dx < \infty$. Os números a_n , para $n \geq 0$, e b_n , para $n \geq 1$, dados em (4.12) e (4.13) são definidos como os coeficientes de Fourier da função f . (A exigência da integrabilidade e integrabilidade absoluta de f é necessária para que as expressões (4.12) e (4.13) façam sentido.)*

Obs.:

$$\begin{aligned} |a_n| &= \left| \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \right| \\ &\leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)| \left| \cos \frac{n\pi x}{L} \right| dx \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)| dx, \end{aligned}$$

o que dá sentido à integral.

4.4 Série de Fourier

Dada uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periódica de período $2L$, integrável e absolutamente integrável, que possa ser escrita na forma:

$$f(x) \simeq \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right), \quad (4.14)$$

a expressão do lado direito é a série de Fourier de f .

Que relação há entre f e sua série de Fourier? Será que a igualdade sempre ocorre?

Vamos estudar as condições suficientes para que a função f seja igual à sua série de Fourier.

Definition 90. Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ será seccionalmente contínua se ela tiver apenas um número finito de descontinuidades (todas de primeira espécie) em qualquer intervalo limitado. Em outras palavras, dados $a < b$, existem $a \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n \leq b$, tais que f é contínua em cada intervalo aberto (a_j, a_{j+1}) , $j = 1, \dots, n-1$, e existem os limites $f(a_j + 0) = \lim_{x \rightarrow a_j^+} f(x)$ e $f(a_j - 0) = \lim_{x \rightarrow a_j^-} f(x)$.

Observação: Toda função contínua é seccionalmente contínua.

Example 91. $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, não é seccionalmente contínua, pois sua descontinuidade em $x = 0$ é de segunda espécie.

Example 92. A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq 1 \\ \frac{1}{n}, & \text{se } \frac{1}{n+1} \leq x \leq \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \dots \\ 0, & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

não é seccionalmente contínua, apesar de todas as descontinuidades serem de primeira espécie; acontece, porém, que, no intervalo $(0, 1)$, há um número infinito de tais descontinuidades.

Exemplos de funções seccionalmente contínuas:

Example 93. A função sinal de x , definida por

$$\text{sign} x = \begin{cases} +1, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ -1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Example 94. A função

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{se } x \geq 0; \\ 0, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Example 95. A função

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq x < \pi \\ 0, & \text{se } -\pi \leq x < 0 \\ \text{e periódica de período } 2\pi \end{cases}$$

Definition 96. Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ será seccionalmente diferenciável se ela for seccionalmente contínua e se a função derivada f' for também seccionalmente contínua.

Observe que a derivada f' não está definida em todos os pontos: com certeza $f'(x)$ não existe nos pontos x onde f é descontínua; e mais, $f'(x)$ pode não existir, mesmo em alguns pontos onde f é contínua.

Example 97. As funções dos exemplos (93) - (??) anteriores são seccionalmente diferenciáveis. Vamos pegar o exemplo (94):

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se } x \geq 0; \\ 0, & \text{se } x < 0. \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq 0; \\ 0, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Example 98. A seguinte função é contínua, mas não seccionalmente diferenciável:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & \text{se } |x| \leq 1 \\ \text{e periódica de período } 2 \end{cases}$$

pois nos pontos onde f' é descontínua, a descontinuidade é de segunda espécie, pois pela regra da cadeia, temos: $f = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow f' = (-2x) \frac{1}{2} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, daí, $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, que é descontínua em $|x| = 1$ com ela sendo de segunda espécie.

Agora enunciamos um resultado que fornece condições suficientes para a convergência da série de Fourier de uma função f .

Theorem 99. (Fourier) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função seccionalmente diferenciável e periódica de período $2L$. Então a série de Fourier da função f , dada em (4.14), converge, em cada ponto x , para:

$$\frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)] = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (4.15)$$

Exercício 1 Calcular a série de Fourier da função f definida no exemplo 3 acima e traçar o gráfico da função definida por essa série. Compare esse gráfico com o gráfico da função.

Resolução:

Cálculo dos coeficientes: $a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx \Rightarrow$ onde o período da função é $2L$, daí,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 0 dx + \int_0^{\pi} 1 dx \right) = \frac{1}{\pi} (\pi - 0) = 1$$

para $n \neq 0$, temos:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, n \geq 0; \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx,$$

daí,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 0 \cos(nx) dx + \int_0^{\pi} 1 \cos(nx) dx \right),$$

resolvendo a integral, temos:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \cos(nx) dx &= \frac{1}{\pi} \int_0^{n\pi} \cos u \frac{du}{n} \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin u}{n} \right]_0^{n\pi} = \frac{1}{n\pi} [\sin(n\pi) - \sin(0)] = 0 \end{aligned}$$

e

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 0 \sin(nx) dx + \int_0^{\pi} 1 \sin(nx) dx \right),$$

de modo análogo para b_n , temos

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} 1 \sin(nx) dx &= \frac{1}{\pi} \int_0^{n\pi} \sin u \frac{du}{n} = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\cos u}{n} \right]_0^{n\pi} \\ &= -\frac{1}{n\pi} [\cos(n\pi) - \cos(0)] = \frac{1}{n\pi} [1 - \cos(n\pi)], \end{aligned}$$

ou, para $k = 1, 2, \dots$:

$$b_{2k} = \frac{1}{2k\pi} [1 - \cos(2k\pi)] = 0$$

e

$$b_{2k-1} = \frac{1}{(2k-1)\pi} \{1 - \cos[(2k-1)\pi]\} = \frac{2}{(2k-1)\pi} \quad (4.16)$$

A série de Fourier de f será:

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)\pi} \operatorname{sen}[(2k-1)x]$$

Pelo Teorema de Fourier, o gráfico da função definida pela série é dado pela figura 4.3 abaixo.

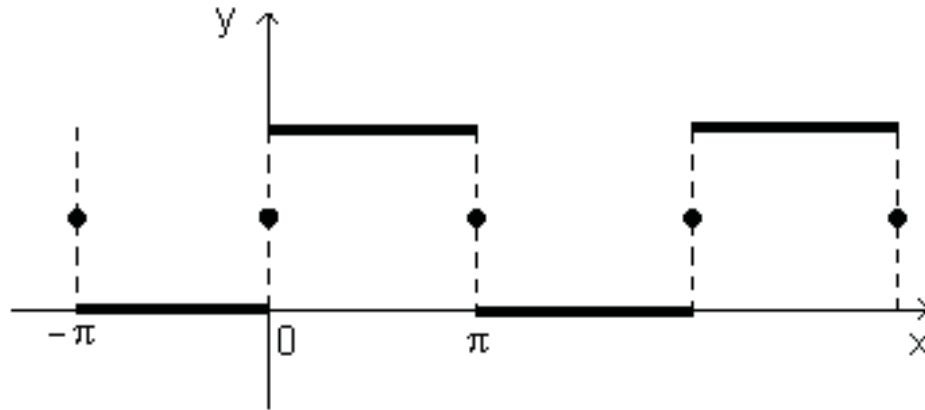


Figura 4.3: Gráfico da série de Fourier da função do exemplo 95

Exercício 2 Use os resultados do Exercício 1 para obter uma expressão em série para $\frac{\pi}{4}$.

Resolução: No ponto $x = \frac{\pi}{2}$, a série de Fourier é igual a 1, em virtude do Teorema de Fourier:

$$\frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)] = \frac{1}{2} [1 + 1] = 1,$$

logo,

$$1 = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)\pi} \operatorname{sen} \left[(2k-1) \frac{\pi}{2} \right]$$

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)} \operatorname{sen} \left[(2k-1) \frac{\pi}{2} \right]$$

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)} \operatorname{sen} \left[(2k-1) \frac{\pi}{2} \right],$$

ou, finalmente,

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)},$$

que é conhecida como uma série de alternada que converge pelo teste de Leibniz.

4.5 Séries de Fourier de funções pares e ímpares

Definition 100. Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é par se $f(x) = f(-x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. (Isso significa que o gráfico da função f é simétrico com relação ao eixo dos y).

Definition 101. Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é ímpar se $f(x) = -f(-x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. (Isso significa que o gráfico da função f é simétrico com relação à origem).

Example 102. funções pares: $f(x) = \cos \frac{n\pi x}{L}$; $f(x) = x^{2n}$, para $n = 1, 2, \dots$; outro: $f(x) = |x|$.

Example 103. funções ímpares: $f(x) = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$; $f(x) = x^{2n-1}$, para $n = 1, 2, \dots$; outro: $f(x) = x$.

Proposition 104. 1. A soma de duas funções pares é uma função par

2. A soma de duas funções ímpares é uma função ímpar.

3. O produto de duas funções pares é uma função par.

4. O produto de duas funções ímpares é uma função par.

5. O produto de uma função par por uma função ímpar é uma função ímpar.

Demonstração:

1 Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções pares

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = f(-x) + g(-x) = (f + g)(-x)$$

2 Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções ímpares

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = -f(-x) + [-g(-x)] = -[f(-x) + g(-x)] = -(f + g)(-x)$$

3 Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções pares:

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = f(-x)g(-x) = (fg)(-x)$$

4 Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções ímpares:

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = [-f(-x)][-g(-x)] = [f(-x)g(-x)] = (fg)(-x)$$

5 Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função par e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função ímpar:

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = f(-x)[-g(-x)] = -[f(-x)g(-x)] = -(fg)(-x)$$

Proposition 105. (i) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função par que é integrável em qualquer intervalo limitado. Então:

$$\int_{-L}^L f = 2 \int_0^L f$$

(ii) Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função ímpar e integrável em qualquer intervalo limitado. Então:

$$\int_{-L}^L f = 0$$

Demonstração: Seja f uma função par e considere a integral $\int_{-L}^L f = \int_{-L}^0 f + \int_0^L f$, temos que para $y = -x$

$$\int_{-L}^0 f(x) dx = - \int_L^0 f(-y) dy = + \int_0^L f(-y) dy = \int_0^L f(y) dy.$$

isso mostra que se f é par então

$$\int_{-L}^L f = 2 \int_0^L f$$

Analogamente, seja f uma função ímpar temos que $\int_{-L}^L f = \int_{-L}^0 f + \int_0^L f$, e para $y = -x$ teremos

$$\int_{-L}^0 f(x) dx = - \int_L^0 f(-y) dy = + \int_0^L f(-y) dy = - \int_0^L f(y) dy.$$

que mostra

$$\int_{-L}^L f = 0$$

Da proposição anterior podemos estabelecer os seguintes resultados sobre as séries de fourier de funções pares e ímpares.

(a) Se f for uma função par, periódica de período $2L$, integrável e absolutamente integrável, então:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \geq 0,$$

pois o produto de duas funções pares é uma função par. E,

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx = 0, \quad n \geq 1,$$

pois o produto de uma função par e uma função ímpar é uma função ímpar.

Portanto, a série de Fourier de uma função par é uma série de co-senos.

(b) Se f for uma função ímpar, periódica de período $2L$, integrável e absolutamente integrável, então:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = 0,$$

pois o produto de uma função par e uma função ímpar é uma função ímpar. E,

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx,$$

pois o produto de duas funções ímpares é uma função par.

Assim, a série de Fourier de uma função ímpar é uma série de senos.

4.6 Cálculo de Algumas Séries de Fourier

I) Seja $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periódica de período $2L$ e definida por $f_1(x) = x$, para $-L \leq x < L$. Como f_1 é ímpar, teremos uma série de senos cujos coeficientes são:

$$a_n = 0; \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L x \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx.$$

fazendo a mudança de variável $y = \frac{n\pi x}{L}$, obtemos:

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^{n\pi} \frac{L}{n\pi} y \operatorname{sen}(y) \frac{L}{n\pi} dy = \frac{2L}{n^2\pi^2} \int_0^{n\pi} y \operatorname{sen}(y) dy.$$

Integrando por partes, temos

$$\begin{aligned} \int_0^{n\pi} y \operatorname{sen}(y) dy &= [-y \cos y]_0^{n\pi} + \int_0^{n\pi} \cos(y) dy \\ &= -n\pi \cos(n\pi) - (0) + [\operatorname{sen}(y)]_0^{n\pi} = -n\pi \cos(n\pi) \end{aligned}$$

Logo

$$b_n = \frac{2L}{n^2\pi^2} (-n\pi \cos(n\pi)) \Rightarrow b_n = \frac{2L}{n\pi} (-\cos(n\pi)),$$

como

$$\begin{cases} \text{para } n \text{ ímpar, } \cos(n\pi) = -1 \\ \text{para } n \text{ par, } \cos(n\pi) = 1 \end{cases}$$

então

$$b_n = \frac{2L}{n\pi} (-1)^{n+1}.$$

Portanto a série de Fourier da função f_1 é:

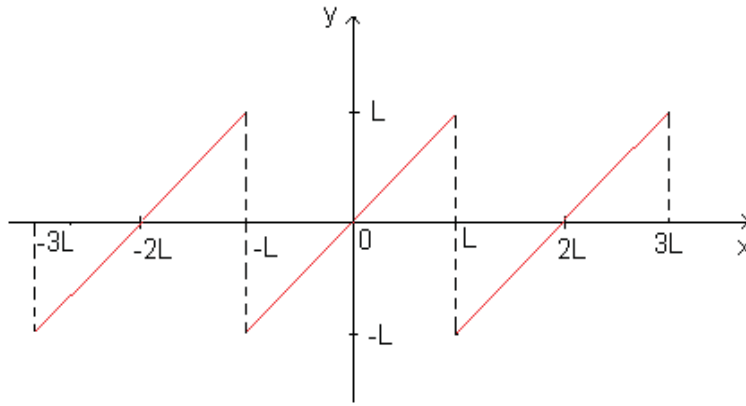
$$f_1(x) \sim \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

e seu gráfico é:

II) Seja $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periódica de período $2L$ e definida por

$$f_2(x) = \begin{cases} L - x, & \text{para } 0 \leq x \leq L; \\ L + x, & \text{para } -L \leq x \leq 0 \end{cases}$$

Como f_2 é uma função par, temos uma série de cossenos, cujos coeficientes são:

Figura 4.4: Gráfico da função f_1

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{L} \int_0^L (L-x) dx = \frac{2}{L} \left[Lx - \frac{x^2}{2} \right]_0^L \\ &= \frac{2}{L} \left(L^2 - \frac{L^2}{2} \right) - 0 = \frac{2}{L} \frac{L^2}{2} = L; \end{aligned}$$

e

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L (L-x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$$

fazendo a mudança de variável $y = \frac{n\pi x}{L}$, obtemos:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{L} \int_0^{n\pi} \left(L - \frac{L}{n\pi} y \right) \cos(y) \frac{L}{n\pi} dy \\ &= \frac{2}{L} \int_0^{n\pi} L \left(\frac{n\pi - y}{n\pi} \right) \cos(y) \frac{L}{n\pi} dy = \\ &= \frac{2L}{n^2 \pi^2} \int_0^{n\pi} (n\pi - y) \cos(y) dy \end{aligned}$$

Integrando por partes a integral acima, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^{n\pi} (n\pi - y) \cos(y) dy &= [(n\pi - y) \sin(y)]_0^{n\pi} \\
&- \int_0^{n\pi} -\sin(y) dy = 0 - 0 + [-\cos(y)]_0^{n\pi} \\
&= -\cos(n\pi) - (-\cos 0) \\
&= 1 - \cos(n\pi),
\end{aligned}$$

Logo,

$$a_n = \frac{2L}{n^2\pi^2} (1 - \cos(n\pi))$$

como

$$\begin{cases} \text{para } n \text{ ímpar, } \cos(n\pi) = -1 \\ \text{para } n \text{ par, } \cos(n\pi) = 1 \end{cases}$$

então

$$a_n = \frac{2L}{n^2\pi^2} [1 - (-1)^n]$$

ou seja, para $n = 2k$, temos: $a_{2k} = 0$, $k = 1, 2, \dots$ e para $n = 2k - 1$, temos:

$$a_{2k-1} = \frac{2L}{(2k-1)^2\pi^2} [1 - (-1)] \Rightarrow a_{2k-1} = \frac{4L}{(2k-1)^2\pi^2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Portanto a série de Fourier da função f_2 é:

$$f_2(x) \sim \frac{L}{2} + \frac{4L}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cdot \cos \frac{(2k-1)\pi x}{L}.$$

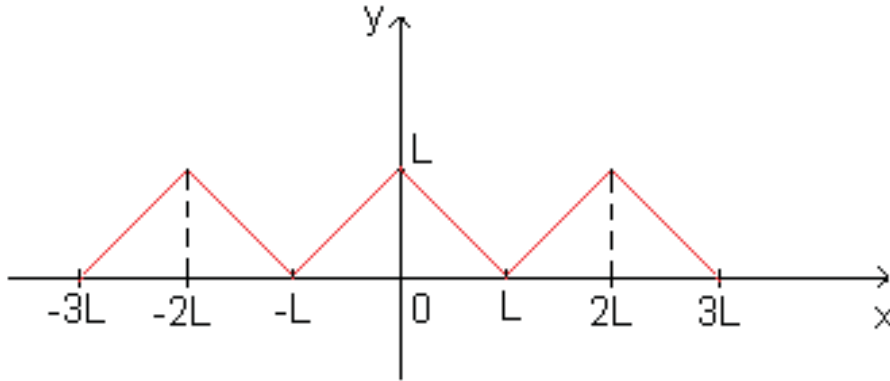
gráfico da função f_2 :

Observe que, em virtude do Teorema de Fourier, o símbolo $\sim$ pode ser substituído por $=$. Usando o Teorema de Fourier, para $x = 0$, obtemos:

$$L - 0 = \frac{L}{2} + \frac{4L}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2},$$

ou seja,

$$\frac{L}{2} = \frac{4L}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \Rightarrow \frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$$



III) Seja $f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periódica de período $2L$ e definida por $f_3(x) = x^2$ para $-L \leq x \leq L$. Como f_3 é par, teremos uma série de cossenos cujos coeficientes são:

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L x^2 dx = \frac{2}{L} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^L = \frac{2}{L} \left(\frac{L^3}{3} \right) - 0 = 2 \frac{L^2}{3};$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L x^2 \cos \frac{n\pi x}{L} dx.$$

fazendo a mudança de variável $y = \frac{n\pi x}{L}$, obtemos:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{L} \int_0^{n\pi} \left(\frac{L}{n\pi} y \right)^2 \cos(y) \frac{L}{n\pi} dy = \\ &= \frac{2}{L} \frac{2L^3}{n^3\pi^3} \int_0^{n\pi} y^2 \cos(y) dy = \frac{2L^2}{n^3\pi^3} \int_0^{n\pi} y^2 \cos(y) dy \end{aligned}$$

Integrando por partes, temos

$$\begin{aligned} \int_0^{n\pi} y^2 \cos(y) dy &= [y^2 \sin(y)]_0^{n\pi} - \int_0^{n\pi} 2y \sin(y) dy \\ &= 0 - 0 - \int_0^{n\pi} 2y \sin(y) dy, \end{aligned}$$

daí,

$$a_n = -\frac{4L^2}{n^3\pi^3} \int_0^{n\pi} y \sin(y) dy$$

Integrando novamente por partes, obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^{n\pi} y \operatorname{sen}(y) dy &= [-y \cos(n\pi)]_0^{n\pi} - \int_0^{n\pi} -\cos y dy \\ &= -n\pi \cos(n\pi) - 0 + [\operatorname{sen} y]_0^{n\pi} \\ &= -n\pi \cos(n\pi)\end{aligned}$$

Logo,

$$a_n = -\frac{4L^2}{n^3\pi^3} [-n\pi \cos(n\pi)] = \frac{4L^2}{n^3\pi^3} [\cos(n\pi)] = \frac{4L^2}{n^2\pi^2} (-1)^n$$

Portanto a série de Fourier da função f_3 é:

$$f_3(x) \sim \frac{L^2}{3} + \frac{4L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{L}.$$

O gráfico da função f_3 é dado pela figura 4.5.

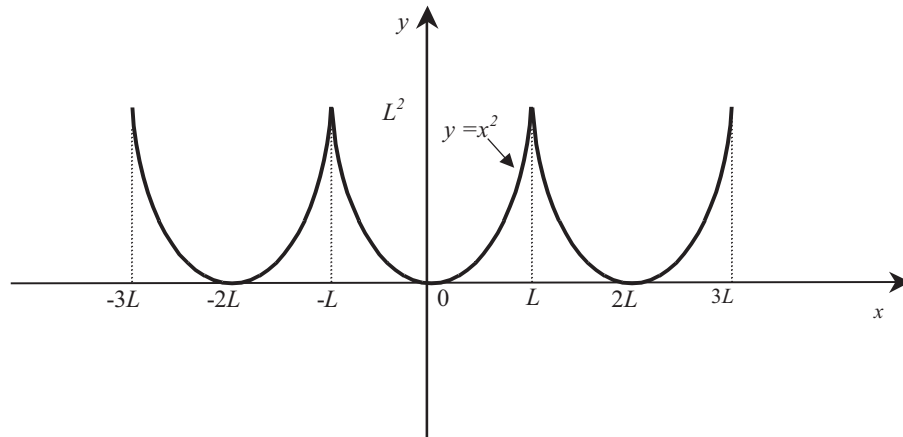


Figura 4.5: Gráfico da função f_3

Observe que, de fato, tem-se $=$ em vez de $\sim$, como consequência do teorema de Fourier. Usando o Teorema de Fourier para $x = L$, obtemos:

$$L^2 = \frac{L^2}{3} + \frac{4L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

pois $(-1)^n$ e $\cos n\pi$ sempre terão o mesmo sinal e assim, pela multiplicação dos dois termos, sempre teremos $+1$.

Ou seja,

$$\begin{aligned} L^2 - \frac{L^2}{3} &= \frac{4L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \Rightarrow \frac{2L^2}{3} = \frac{4L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots \end{aligned}$$

Capítulo 5

Equações Diferenciais Ordinárias

5.1 Introdução

Este primeiro capítulo é uma revisão das equações diferenciais lineares de 1ª e 2ª ordem, oferecemos aqui uma noção do que seja uma equação diferencial e algumas técnicas para resolver alguns problemas simples.

5.2 Equações Diferenciais de 1ª ordem

Uma equação diferencial ordinária de 1ª ordem é uma equação do tipo

$$y' = f(x, y) \quad (5.1)$$

onde $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, é uma função dada e $\Omega \subset (a, b) \times \mathbb{R}$ é um conjunto aberto; x é uma variável independente, pertencente ao intervalo (a, b) , com a, b números reais $a < b$; e $y = y(x)$ é a variável que depende de x . Qualquer função $y = \phi(x)$ que satisfaça a edo (5.1) é dita solução dessa equação. Isto é, se $y = \phi(x)$ é solução então ela satisfaz

$$\frac{d\phi}{dx} = f(x, \phi(x)), \quad a \leq x \leq b. \quad (5.2)$$

Podemos impor uma condição inicial para essa equação, qual seja,

$$y(x_0) = y_0, \quad (5.3)$$

quando consideramos a equação diferencial (5.1) junto com a condição inicial (5.3) então dizemos que se trata um problema de Cauchy. Condições são

colocadas sobre a função f de modo que o problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y), & x \in (a, b) \\ y(x_0) = y_0, & x_0 \in (a, b), y_0 \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (5.4)$$

tenha uma única solução. À priori, a nossa função f pode ser qualquer função de duas variáveis. Mas para se garantir existência de soluções da equação diferencial (5.1) f teria de ser no mínimo contínua. Há dois teoremas importantes sobre existência de soluções que enunciamos a seguir.

Theorem 106 (Picard). *Se f e $\frac{\partial f}{\partial y}$ forem contínuas num domínio retangular $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| < a, |y - y_0| < b\}$ então há um intervalo $|x - x_0| \leq h < a$ no qual existe uma única solução $y = \phi(x)$ satisfazendo a equação diferencial (5.1) e as condições iniciais (5.3).*

Theorem 107 (Peano). *Se f é contínua num domínio retangular $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| < a, |y - y_0| < b\}$ então há um intervalo $|x - x_0| \leq h < a$ no qual existe pelo menos uma solução $y = \phi(x)$ satisfazendo a equação diferencial (5.1) e as condições iniciais (5.3). Mas nesse caso, não se garante unicidade.*

Por exemplo, dada a equação diferencial ordinária

$$y' = xy^{1/2}, \quad y(0) = 0$$

então $y = \frac{x^4}{16}$ é solução dessa equação, pois, $y' = \frac{x^3}{4}$ e $xy^{1/2} = x \left(\frac{x^4}{16}\right)^{1/2} = \frac{x \cdot x^2}{4} = \frac{x^3}{4}$. Note que essa solução não é única, já que $y = 0$ é também uma solução da equação diferencial junto com as condições iniciais.

Example 108. *A relação $x^2 + y^2 = 25$ é uma solução implícita da equação diferencial*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad (5.5)$$

no intervalo $-5 \leq x \leq 5$.

De fato, por diferenciação implícita, temos

$$\frac{d}{dx}[x^2 + y^2] = \frac{d}{dx}(25)$$

ou

$$2x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}.$$

Além disso, resolvendo $x^2 + y^2 = 25$ para y em termos de x obtemos $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$ as duas funções $y = \phi_1(x) = \sqrt{25 - x^2}$ e $y = \phi_2(x) = -\sqrt{25 - x^2}$ são soluções explícitas da edo (5.5) no intervalo $-5 \leq x \leq 5$.

No caso mais simples em que a função f é linear em relação a variável y a nossa equação diferencial de 1ª ordem se apresenta na forma

$$y' = \alpha(x)y + \beta(x) \quad (5.6)$$

onde α e β são funções reais quaisquer definidas no intervalo (a, b) . Se supomos que α e β são funções contínuas em (a, b) então esta equação tem uma resolução bem simples, pois se consideramos primeiro a equação linear homogênea associada à equação (5.6), isto é,

$$y' = \alpha(x)y \quad (5.7)$$

podemos escrever tal equação na forma

$$\frac{y'}{y} = \alpha(x)$$

integrando em x temos

$$\ln y = \int^x \alpha(s)ds + c_1,$$

onde c_1 é uma constante arbitrária, segue que

$$y(x) = Ce^{\int^x \alpha(s)ds} \quad (5.8)$$

é uma solução da equação homogênea (5.7) com $C = e^{c_1}$. Usando agora o método de variação dos parâmetros para y dada em (5.8) temos

$$y' = C'e^{\int^x \alpha(s)ds} + C\alpha(x)e^{\int^x \alpha(s)ds}$$

substituindo tal resultado em (5.6) obtemos

$$C'e^{\int^x \alpha(s)ds} + C\alpha(x)e^{\int^x \alpha(s)ds} = C\alpha(x)e^{\int^x \alpha(s)ds} + \beta(x)$$

segue que

$$C'e^{\int^x \alpha(s)ds} = \beta(x)$$

o que nos dá

$$C' = \beta(x)e^{-\int^x \alpha(s)ds}$$

daí

$$C = C_0 + \int^x \beta(s)e^{-\int^s \alpha(t)dt}ds \quad (5.9)$$

onde C_0 é uma constante arbitrária. Logo, y dada por

$$y(x) = Ce^{\int^x \alpha(s) ds} \quad (5.10)$$

onde C é definida em (5.9) é a solução geral de (5.6).

Vejamos alguns modelos matemáticos de algumas edos que podem ser físicos, biológicos, químicos, etc.

Crescimento Populacional

Modelo de Malthus

Se P representa a população numa certa região num determinado instante t então

$$\frac{dP}{dt} = kP \quad (k \text{ constante de proporcionalidade})$$

Modelo de Verhulst

$$\frac{dP}{dt} = (r - aP)P$$

onde r e a são constantes.

Dcaimento Radioativo

A taxa $\frac{dA}{dt}$ a qual o núcleo de uma substância decai é proporcional à quantidade $A(t)$ da substância remanescente no instante t

$$\frac{dA}{dt} = kA \quad (k < 0)$$

Remark 109. *Uma única equação diferencial pode servir como modelo matemático para vários fenômenos diferentes. Modelos matemáticos são frequentemente acompanhados por determinadas condições laterais. Por exemplo para o modelo de crescimento populacional esperaríamos conhecer a população inicial P_0 e no modelo de decaimento radiativo a quantidade inicial da substância radioativa.*

Lei de Resfriamento de Newton

De acordo com a Lei empírica de Newton do resfriamento, a taxa segundo a qual a temperatura de um corpo varia é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a temperatura do meio que o rodeia, denominada de temperatura ambiente. Nesse caso, se T é a temperatura do corpo e T_m é temperatura do meio ambiente então

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m) \quad (k < 0).$$

Disseminação de uma doença

Uma doença contagiosa espalha-se numa comunidade através do contato entre as pessoas. Seja $x(t)$ o número de pessoas que contraíram a doença e

$y(t)$ o número de pessoas que ainda não foram expostas. É razoável supor que a taxa $\frac{dx}{dt}$ segundo a qual a doença se espalha seja proporcional ao número de encontros ou interações entre esses dois grupos de pessoas. Se supormos que o número de interações é proporcional ao produto xy então

$$\frac{dx}{dt} = kxy$$

k é a constante de proporcionalidade. Se a comunidade tem uma população fixa de N pessoas. O número de y é $y = N - x$. Assim

$$\frac{dx}{dt} = kx(N - x)$$

se no instante inicial haviam x_0 pessoas infectadas então $x(0) = x_0$.

Misturas

No instante $t = 0$, um tanque contém Q_0 kg de sal dissolvido em V_0 litros de água. Uma solução de sal em água com Q_1 kg de sal por litro entra no tanque a uma razão de v litros por minuto e a solução do tanque, bem misturada, sai a mesma razão. Seja $Q(t)$ a quantidade de sal no tanque num instante t . A taxa de variação da quantidade de sal no tanque, no instante t , $\frac{dQ}{dt}$, é igual à taxa na qual o sal entra no tanque, menos a taxa na qual o sal sai do tanque. Logo,

$$\frac{dQ}{dt} = vQ_1 - \frac{v}{V_0}Q(t).$$

Mecânica

A lei do movimento de Newton diz que

$$F = ma$$

F é a força externa, m é massa, a é a aceleração. Para um corpo que cai livremente num vácuo, e bastante próximo da terra, temos que

$$w = mg$$

onde w é o peso do corpo, m é massa do corpo e g é a aceleração da gravidade. Mesmo que a massa do corpo permaneça constante, seu peso, e a aceleração da gravidade, alteram-se com a distância ao centro do campo gravitacional da terra. Para um corpo muito distante da terra

$$w = \frac{k}{(R + x)^2},$$

k constante. Em $x = 0$, temos que $w = mg$ então $k = mgR^2$ e, portanto,

$$w = \frac{mgR^2}{(R + x)^2}.$$

5.3 Equações Diferenciais de 2ª Ordem

Uma equação diferencial de 2ª ordem, na forma mais geral, é uma equação do tipo

$$F(x, y, y', y'') = 0. \quad (5.11)$$

onde x é a variável independente, e $y = y(x)$ é a variável dependente, aqui $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$, $F(x, y, t, w)$ é uma função dada. Em muitas situações de muitos problemas de aplicações (na física, na matemática, etc.) a equação (5.11) se apresenta na seguinte forma

$$y'' = f(x, y, y'). \quad (5.12)$$

Theorem 110. *Se as funções f , f_y e $f_{y'}$ são contínuas numa região aberta R do espaço tri-dimensional xyv e se o ponto (x_0, y_0, y'_0) está em R , então em algum intervalo em torno de x_0 , existe uma única solução $y = \phi(x)$ da equação diferencial (5.12) que satisfaz as condições iniciais*

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0. \quad (5.13)$$

A equação geral linear de segunda ordem pode ser dada no seguinte modo

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = G(x), \quad (5.14)$$

onde P , Q , R e G são funções dadas.

Example 111. *Equação de Legendre de ordem α*

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0$$

Example 112. *Equação de Bessel de ordem ν*

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0.$$

Supondo P , Q , R e G contínuas num certo intervalo $\alpha < x < \beta$, e que P nunca se anula no intervalo, podemos dividir a equação (5.14) por $P(x)$ e obter uma equação da forma

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x). \quad (5.15)$$

Theorem 113. *Se as funções p , q e g são contínuas num intervalo $\alpha < x < \beta$, então existe uma e somente uma função $y = \phi(x)$ que satisfaz a equação diferencial (5.15) e as condições iniciais (5.13).*

5.4 Soluções Fundamentais

A equação

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (5.16)$$

é a equação homogênea associada à equação (5.15).

Theorem 114. *Se $y = y_1(x)$ e $y = y_2(x)$ são soluções da equação diferencial (5.16) então $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, (c_1 e c_2 constantes arbitrárias) é também solução de (5.16).*

Duas soluções y_1 e y_2 de (5.16) formarão um conjunto fundamental de soluções se toda solução de (5.16) puder ser escrita como combinação linear de y_1 e y_2 . O Wronskiano de y_1 e y_2 é dado por

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_2y_1' \quad (5.17)$$

se $W(y_1, y_2) \neq 0$ então y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de solução de (5.16). Isto quer dizer que as soluções y_1 e y_2 são linearmente independentes e toda solução de (5.16) se escreve como combinação linear dessas duas soluções.

5.5 Equações diferenciais com coeficientes constantes

Na equação diferencial (5.14) se fazemos $P(x) = a$, $Q(x) = b$, $R(x) = c$ e $G(x) = 0$, com a , b e c constantes reais então ela se transforma na seguinte equação:

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (5.18)$$

É natural considerar uma solução de (5.18) na forma:

$$y = e^{\alpha x} \quad (5.19)$$

com α sendo uma constante a determinar. Derivando y dada por (5.19) em relação a x , temos

$$\begin{aligned} y'(x) &= \alpha e^{\alpha x} \\ y''(x) &= \alpha^2 e^{\alpha x} \end{aligned}$$

Substituindo os valores de y , y' e y'' em (5.18) obtemos:

$$a\alpha^2 e^{\alpha x} + b\alpha e^{\alpha x} + ce^{\alpha x} = 0$$

que resulta na seguinte igualdade:

$$(a\alpha^2 + b\alpha + c)e^{\alpha x} = 0$$

Como $e^{\alpha x}$ é sempre diferente, devemos ter que:

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = 0 \quad (5.20)$$

A equação (5.20) é conhecida como equação característica associada à equação (5.18). Temos então três casos a considerar: as raízes α de (5.20) são reais e distintas, elas são reais e iguais ou são complexas conjugadas. Quando forem reais e distintas, isto é, α_1 e α_2 satisfazendo a equação (5.20) então temos duas soluções linearmente independentes da equação (5.18), dadas por:

$$y_1(x) = e^{\alpha_1 x}, \quad y_2(x) = e^{\alpha_2 x}.$$

Essas duas soluções formam um conjunto fundamental de soluções da equação (5.18) e, portanto, a solução geral dessa equação é dada pela combinação linear dessas duas soluções, ou seja, y dada por

$$y = c_1 e^{\alpha_1 x} + c_2 e^{\alpha_2 x} \quad (5.21)$$

com c_1 e c_2 constantes arbitrárias, é a solução geral da equação (5.18). Se as raízes forem iguais, isto é, $\alpha_1 = \alpha_2$ então uma solução é da forma $y_1 = e^{\alpha_1 x}$ e a outra solução linearmente independente com essa é dada por $y_2 = x e^{\alpha_2 x}$ que é encontrada usando o método de variação dos parâmetros. Logo a solução geral da equação (5.18) nesse caso, é dada por:

$$y = c_1 e^{\alpha_1 x} + c_2 x e^{\alpha_2 x} \quad (5.22)$$

com c_1 e c_2 constantes arbitrárias. No caso complexo, uma das raízes sendo da forma $\alpha_1 = r_1 + ir_2$ uma solução complexa é da forma

$$y = e^{r_1 + ir_2 x} \quad (5.23)$$

Se queremos as duas soluções reais linearmente independentes da equação (5.18), para esse caso, basta tomar y_1 como sendo a parte real de (5.23) e y_2 como sendo a parte imaginária (5.23), ou seja,

$$y_1 = \cos(r_2 x) e^{r_1 x}, \quad y_2 = \sin(r_2 x) e^{r_1 x} \quad (5.24)$$

E a solução geral de (5.18) é dada por

$$y = c_1 \cos(r_2 x) e^{r_1 x} + c_2 \sin(r_2 x) e^{r_1 x} \quad (5.25)$$

com c_1 e c_2 constantes arbitrárias. Quando estamos resolvendo uma equação diferencial do tipo (5.18) satisfazendo condições iniciais então podemos determinar as constantes c_1 e c_2 , ou seja, elas deixam de ser arbitrárias.

5.5. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS COM COEFICIENTES CONSTANTES 65

Example 115. Considere a equação diferencial

$$y'' - 5y' + 6y = 0 \quad (5.26)$$

com os dados iniciais dados por

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 2. \quad (5.27)$$

A equação característica associada à equação (5.35) é dada por

$$r^2 - 5r + 6 = 0 \quad (5.28)$$

cujas raízes são

$$r_1 = 2, \quad r_2 = 3 \quad (5.29)$$

Logo a solução geral de (5.35) é

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} \quad (5.30)$$

Como queremos que essa solução satisfaça as condições iniciais (5.27) devemos ter:

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 + c_2 = 1 \\ y'(0) &= 2c_1 + 3c_2 = 2 \end{aligned}$$

resolvendo o sistema acima, obtemos, $c_1 = 1$ e $c_2 = 0$. Logo, a única solução da equação (5.35) que satisfaz as condições iniciais (5.27) é $y = e^{2x}$.

Example 116. Considere a equação diferencial

$$y'' - 6y' + 9y = 0 \quad (5.31)$$

A equação característica associada à equação (5.35) é dada por

$$r^2 - 6r + 9 = 0 \quad (5.32)$$

cujas raízes são

$$r_1 = r_2 = 3 \quad (5.33)$$

Logo a solução geral de (5.35) é

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x} \quad (5.34)$$

Example 117. *Considere a equação diferencial*

$$y'' + y = 0 \quad (5.35)$$

A equação característica associada à equação (5.35) é dada por

$$r^2 + 1 = 0 \quad (5.36)$$

cujas raízes complexas são

$$r_1 = i, \quad r_2 = -i \quad (5.37)$$

Logo a solução geral de (5.35) é

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x. \quad (5.38)$$

5.6 Exercícios

1. Resolva as seguintes equações diferenciais lineares com condições iniciais dadas:

$$(a) \quad y'' + y' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

$$(b) \quad y'' + 3y' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

2. Encontre a solução geral das equações diferenciais abaixo:

$$(a) \quad y'' - y' + y = 0,$$

$$(b) \quad y'' + 3y = 0,$$

$$(c) \quad y'' - 9y = 0.$$

3. Mostre que as equações abaixo tem duas soluções linearmente independentes e calcule o Wronskiano de cada uma delas:

$$(a) \quad y'' + y' + 2y = 0,$$

$$(b) \quad y'' + 4y = 0,$$

$$(c) \quad y'' - 8y = 0.$$

4. Considere o *problema não homogêneo* abaixo:

$$ay'' + by' + cy = g, \quad (5.39)$$

onde a , b , c e g são funções de x diferenciáveis. Suponha que y_1 e y_2 são soluções linearmente independentes do problema homogêneo associado ao problema (5.39):

$$ay'' + by' + cy = 0. \quad (5.40)$$

Considere uma solução particular de (5.39) dada por

$$y_p = c_1y_1 + c_2y_2 \quad (5.41)$$

onde c_1 e c_2 são funções de x . Use o método de variação dos parâmetros para encontrar uma solução particular y_p de (5.39). Ou seja, suponha que $c'_1y_1 + c'_2y_2 = 0$, derive (5.41) para obter y'_p e y''_p substitua esses valores em (5.39) para obter o sistema

$$\begin{cases} c'_1y_1 + c'_2y_2 = 0 \\ c'_1y'_1 + c'_2y'_2 = \frac{g}{a} \end{cases} \quad (5.42)$$

Resolva esse sistema para c_1 e c_2 e encontre a solução particular y_p dada por (5.41) onde c_1 e c_2 são soluções de (5.42). Logo a solução geral do problema (5.39) é dada por

$$y(x) = y_p(x) + c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.

5. Aplique o método de variação dos parâmetros do exercício anterior para determinar a solução geral dos problemas não homogêneos abaixo:

(a) $y'' + y = \sin x$,

(b) $y'' - 3y' + y = e^t$,

(c) $y'' - 2y' + 4y = \tan x$.