Exercícios Complementares 3.4

3.4A Falso ou Verdadeiro? Justifique.

(a) se $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$ é convergente, então $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ é absolutamente convergente no intervalo $[-1, 1]$;

(b) se uma série de potências é absolutamente convergente em um dos extremos de seu intervalo de convergência, então ela também converge absolutamente no outro extremo;

(c) se uma série de potências converge em um extremo de seu intervalo de convergência e diverge no outro, então a convergência naquele extremo é condicional;

(d) se R é o raio de convergência de $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, então $\sqrt{R}$ é o raio de convergência de $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{2n}$;

(e) se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = L > 0$, então a série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ tem raio de convergência $1/L$;

(f) se $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ tem raio de convergência $R > 0$, então R também é o raio de convergência das séries $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1}$ e $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (x-a)^{n+1}$;

(g) uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ pode convergir apenas em dois valores de x.

(h) se $R > 0$ é o raio de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$, então R é também o raio de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^{n+p}$.

(i) se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = L > 0$, então as séries $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^{2n}$ e $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^{2n+1}$ têm raio de convergência $1/\sqrt{L}$;

(j) Se $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ tem raio de convergência 2 e $\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$ tem raio de convergência 3, então o raio de convergência de $\sum_{n=0}^{\infty} (c_n + d_n) x^n$ é $R = 2$.

3.4B Em cada caso determine o intervalo de convergência da série de potências:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n (x-3)^n$ (b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{(-4)^n}$ (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n)} x^{2n+1}$

(d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} x^n$ (e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n(x-1)^{2n}}{3^{2n-1}}$ (f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n)} x^{n}$

(g) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^n}{n(\ln n)}$ (h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+5)^{n-1}}{n^2}$ (i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}$

(j) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n! x^n$ (k) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^n}{(2n)!} x^{2n}$ (l) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n} x^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n+1)}$

(m) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(3-x)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ (n) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(1-x)^n}{(n+1)3^n}$ (o) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{arctg} n$

(p) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(5^n + 5^{-n})(x+1)^{3n-2}}{n^2}$ (q) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n 2^n x^n}{(n+1)^3}$ (r) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}(x-3)^{4n}}{n^{1/n}}$.

3.4C Comece com a fórmula $\dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$, válida para $|x| < 1$, e represente cada função por uma série de potências de x. Em cada caso determine raio e o intervalo de convergência.

(a) $\dfrac{1}{(1-x)^3}$ (b) $\dfrac{x}{(1+x^2)^2}$ (c) $\dfrac{1}{1-x^4}$ (d) $\dfrac{1}{1-4x}$

(e) $\dfrac{1}{2+x}$ (f) $\dfrac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$ (g) $\ln(1-x)$ (h) $\dfrac{x^3}{(1-x^4)^2}$

(i) $\dfrac{x}{1-x^2}$ (j) $\dfrac{x^2-3}{x-2}$ (k) $\dfrac{x}{2-3x}$ (l) $\dfrac{1}{6-x-x^2}$.

3.4D. Represente a função $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ por uma série de potências de x.

3.4E Use a série de e^x dada em (3.8) e calcule o valor da soma $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n! 2^n}$.

3.4F Use uma expansão em série de potências de x para $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ e mostre que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2^n} = 2$.

3.4G Encontre uma série de potências para representar a função $\dfrac{e^x - 1}{x}$ e, por derivação termo a termo, prove que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{(n+1)!} = 1$.

3.4H Encontre uma expansão em série de potências de x para $x^2 e^{-x}$ e, derivando o resultado, prove que $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n (n+2) 2^{n+1}}{n!} = 8$.

3.4I Derive duas vêzes, termo a termo, uma série de potências que representa a função

$\exp\left(-x^2\right)$ e mostre que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}(2n+1)}{n!2^n} = 1.$

3.4J Dado um número inteiro positivo k, considere a k-ésima função de Bessel de $1^{\underline{a}}$ espécie $J_k(x)$, definida por:

$$J_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+k}.$$

(a) mostre que o erro cometido ao aproximar $J_0(x)$, $0 \le x \le 1$, pelo polinômio $1 - \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x^4}{64} - \dfrac{x^6}{2304}$, é inferior a 10^{-5};

(b) mostre que $J_0' = -J_1$ e $\int x^3 J_2(x)\,dx = x^3 J_3(x)$;

(c) esboce os gráficos das somas parciais $S_3(x)$ de $J_0(x)$ e de $J_1(x)$, no intervalo $0 \le x \le 2$.

3.4K Mostre que $\ln x = \ln 2 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}(x-2)^n}{n2^n}$, $0 < x < 4$.

3.4L Usando a representação $\ln(1-t) = -\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{t^{n+1}}{n+1}$, $|t| < 1$, calcule $\ln(1.2)$ com 3 casas decimais e compare o valor com o resultado obtido em uma calculadora.

3.4M Integrando termo a termo de 0 até x a série de potências de $\ln(1-t)$ dada no exercício precedente, mostre que $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{x^n}{n(n-1)} = x + (1-x)\ln(1-x)$. Para que valores de x esta representação é válida?

3.4N Integrando de $x = 0$ até $x = 1$ uma série de potências que representa a função xe^x, mostre que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n!(n+2)} = \dfrac{1}{2}$.

3.4O Desenvolva as funções $f(x) = \dfrac{1}{1-3x}$ e $g(x) = \dfrac{1}{3-2x}$ em séries de potências de x, determine os respectivos intervalos de convergência e em seguida obtenha séries para representar $f'(x)$ e $\int_0^x g(t)\,dt$.

3.4P Com auxílio da série de potências de arctg x, mostre que:

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}$$

e aproxime $\frac{\pi}{4}$ usando os cinco primeiros termos da série de arctg x, estimando o valor do erro.

3.4Q Se a probabilidade P_n de um fóton receptor absorver exatamente n fótons é dada por $P_n = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$, $\lambda > 0$, mostre que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P_n = 1$.

3.4R Represente as integrais $\int_0^x \frac{\ln\,(1-t)}{t}dt$ e $\int_0^x \frac{e^t - 1}{t}dt$ por séries de potências de x, indicando o intervalo de convergência de cada uma delas. Em cada caso o integrando em $t = 0$ é definido pelo limite quando $t \to 0$.

3.4S Usando uma série de potências adequada, aproxime cada integral dada abaixo com 4 casas decimais:

(a) $\int_0^{1/3} \frac{dx}{1+x^6}$ (b) $\int_0^{1/2} \text{arctg}\left(x^2\right) dx$ (c) $\int_0^{0.5} e^{-x^3} dx$ (d) $\int_0^1 \frac{\text{sen}\, x}{x} dx$.

3.4T Seja $f(x) = 2 + 3x + 4x^2 + \cdots = \sum\limits_{n=2}^{\infty} n x^{n-2}$, definida para $|x| < 1$. Integrando duas vezes, sucessivamente, esta série de 0 até x, identifique a função f como sendo $\frac{2-x}{(1-x)^2}$.

3.4U Identifique a função definida pela série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)\, x^n$. Idem para $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)\, x^n}{2^{n+1}}$.

3.4V *Falha na derivação termo a termo.* Mostre que a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}\,(nx)}{n^2}$ converge absolutamente em qualquer x e, ainda assim, a série de derivadas diverge quando $x = 2n\pi$.

Exercícios Complementares 3.6

3.6A Represente as seguintes funções em séries de potências de x:

(a) $f(x) = e^{-x^2}$ (b) $f(x) = x\,\text{sen}\, x$ (c) $f(x) = 3^{x+1}$

(d) $f(x) = \ln\left(1 + x^2\right)$ (e) $f(x) = x^2\,\text{sen}\, x$ (f) $f(x) = \cos^2 x$

(g) $f(x) = e^{4-x}$ (h) $f(x) = \text{sen}^2\, x$ (i) $f(x) = \text{senh}\, x$

(j) $f(x) = \text{sen}\, 4x$ (k) $f(x) = \cosh x$ (l) $f(x) = \cos 3x$

3.6B Em estatística a função $E(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ recebe o nome de *Função Erro*. Encontre a Série de Maclaurin da função $E(x)$.

3.6C Determine as constantes a_0, a_1, a_2, a_3 e a_4, de modo que:

$$3x^4 - 17x^3 + 35x^2 - 32x + 17 = a_4(x-1)^4 + a_3(x-1)^3 + a_2(x-1)^2 + a_1(x-1) + a_0.$$

3.6D Para cada função f dada abaixo, encontre sua expansão de Taylor em torno do ponto indicado:

(a) $f(x) = \sqrt{x}\,;\ a = 9$ (b) $f(x) = \operatorname{tg} x\,;\ a = 0$ (c) $f(x) = \cos x\,;\ a = \pi/3$

(d) $f(x) = e^x\,;\ a = 4$ (e) $f(x) = \sqrt[3]{x}\,;\ a = 1$ (f) $f(x) = \operatorname{sen} x\,;\ a = \pi/6$

(g) $f(x) = \dfrac{1}{x^2};\ a = 1$ (h) $f(x) = \dfrac{1}{3x};\ a = 2$ (i) $f(x) = \dfrac{1}{2x+1};\ a = 3$.

3.6E Qual a Série de Maclaurin do polinômio $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$?

3.6F Encontre uma série de potências de x para representar a função $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x}$ e, usando o resultado, conclua que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x} = 0$.

3.6G Determine uma série de potências de $x+1$ para a função $f(x) = e^{2x}$ e uma série de potências de $x-1$ para $g(x) = \ln x$.

3.6H Uma função $f(x)$ tem as seguintes propriedades: $f(x) > 0,\ f'(x) = 2xf(x)\,, \forall x \in \mathbb{R}$, e $f(0) = 1$. Encontre uma série de potências que represente a função $f(x)$. Idem para uma função $g(x)$ com as propriedades: $g(0) = 0,\ g'(0) = 1$ e $g''(x) = -g(x)\,,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

3.6I Preencha a seguinte tabela com os valores das derivadas indicadas, considerando as seguintes funções $f(x) = x \operatorname{sen} x,\ g(x) = \cos\left(x^2\right),\ h(x) = \ln\left(1+x^2\right)$ e $p(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$:

$f^{(15)}(0)$	$f^{(28)}(0)$	$g^{(16)}(0)$	$h^{(20)}(0)$	$p^{(17)}(0)$

3.6J Encontre o valor aproximado de $e^{-0.04}$, com erro menor do que 5×10^{-4}.

3.6K Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-1/x^2\right), & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Use indução e mostre que $f^{(n)}(0) = 0$, $\forall n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. A função f não pode ser representada por uma Série de Maclaurin numa vizinhança de $x = 0$? É a função f analítica em $x = 0$?

3.6L Suponha que uma função par tenha representação em série de potências $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Mostre que os coeficientes $c_{2n-1} = 0$, $\forall n = 1, 2, 3, \ldots$. E se a função fosse ímpar?

Exercícios Complementares 3.8

3.8A Usando a série binomial para $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, mostre que:

$$\text{arcsen}\, x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{n!\,(2n+1)\,2^n} x^{2n+1}, \;\; |x| < 1.$$

3.8B Usando a série binomial para $\sqrt[3]{1+x}$, calcule o valor de $\sqrt[3]{25}$ com 3 casas decimais e compare o valor com o resultado obtido em uma calculadora.

3.8C Calcule $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^3}\,dx$ com 4 casas decimais.

3.8D Para que valores de x podemos substituir $\operatorname{sen} x$ por x, sem que o erro supere 5×10^{-4}?

3.8E Substituindo $\cos x$ por $1 - x^2/2$, $|x| < 0.1$, qual a estimativa do erro?

3.8F Se $|x| < 0.01$, qual o erro cometido ao substituir $\sqrt{1+x}$ por $1 + x/2$?

Respostas e Sugestões

Exercícios 3.4

3.4A (a) V (b) V (c) V (d) V (e) V (f) V (g) F

3.4B (a) $\{3\}$ (b) $(-2,2)$ (c) $(-1,1)$ (d) $(-1,1)$ (e) $(-2,4)$ (f) $(-1,1)$ (g) $(-1,1]$ (h) $[-6,-4]$ (i) $(-\infty,\infty)$ (j) $\{0\}$ (k) $(-\infty,\infty)$ (l) $(-\infty,\infty)$(m) $(2,4]$ (n) $(-2,4]$ (o) $(-1,1)$ (p) $|x+1| \le 1/\sqrt[3]{5}$ (q) $\left[\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right]$ (r) $(2,4)$

3.4C

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(n+1)(n+2)x^n}{2}$; $|x|<1$ (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} nx^{2n-1}$; $|x|<1$

(c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{4n}$; $|x|<1$ (d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 4^n x^n$; $|x|<1/4$

(e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^n}{2^{n+1}}$; $|x|<2$ (f) $-\sum\limits_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^{2n}$; $|x|<1$

(g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{-x^{n+1}}{n+1}$; $|x|<1$ (h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{4n-1}$; $|x|<1$

(i) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{2n+1}$; $|x|<1$ (j) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{3x^n - x^{n+2}}{2^{n+1}}$; $|x|<2$

(k) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{3^n x^{n+1}}{2^{n+1}}$; $|x|<2/3$ (l) $\dfrac{1}{5}\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left[\dfrac{(-1)^n}{3^{n+1}} + \dfrac{1}{2^{n+1}}\right] x^n$; $|x|<2$

3.4D $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{n/2}}{n!}$; $x \ge 0$. **3.4E** $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ **3.4F** $\dfrac{1}{(1-x)^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{1-x}\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$; $|x|<1$. Faça $x = 1/2$.

3.4G $\dfrac{e^x-1}{x} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{x^{k-1}}{k!} \Rightarrow \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right) = \sum\limits_{k=2}^{\infty} \dfrac{(k-1)x^{k-2}}{k!} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{nx^{n-1}}{(n+1)!}$. Agora faça $x = 1$.

3.4J (a) $R = \infty$ (b) $J_0 \simeq S_3(x)$, com erro menor do que $a_4 = 6.7 \times 10^{-6}$ **3.4L** $\ln(1.2) \simeq 0.1822$

3.4O $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$; $|x|<1/3$; $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^n x^n}{3^{n+1}}$; $|x|<3/2$

$f'(x) \sum\limits_{n=1}^{\infty} n3^n x^{n-1}$; $|x|<1/3$; $\int_0^x g(t)\,dt = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^n t^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}}$; $|t|<3/2$

3.4P Observe que $\dfrac{\pi}{6} = \operatorname{arctg}\left(1/\sqrt{3}\right)$ e $\dfrac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1$. Na série $\operatorname{arctg} x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$; $|x| \le$

1, faça $x = 1/\sqrt{3}$ e $x = 1$ para obter, respectivamente:

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\, 3^n} \quad \text{e} \quad \frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \simeq 0.835; \;\; E < a_6 \simeq 0.0909.$$

3.4R $\ln(1-t) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1} \Rightarrow \frac{\ln(1-t)}{t} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n+1} \Rightarrow \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$,

representação válida para $|x| < 1$.

$$\frac{e^t - 1}{t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{n!} \Rightarrow \int_0^x \frac{e^t - 1}{t} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!n}, \text{ representação válida em qualquer } x \text{ real.}$$

3.4S (a) 0.3299 (b) 0.0413 (c) 0.4849 (d) 0.9460

3.4U $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$, $|x| < 1$ e $g(x) = \frac{4-x}{(2-x)^2}$, $|x| < 2$.

Exercícios 3.6

3.6A

(a) $e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$; $x \in \mathbb{R}$

(b) $x \operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{(2n+1)!}$; $x \in \mathbb{R}$

(c) $3^{x+1} = 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 3)^n x^n}{n!}$; $x \in \mathbb{R}$

(d) $\ln(1+x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{n+1}$; $|x| < 1$

(e) $x^2 \operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{(2n+1)!}$; $x \neq 0$

(f) $\cos^2 x = 1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!}$; $x \in \mathbb{R}$

(g) $e^{4-x} = e^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$; $x \in \mathbb{R}$

(h) $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!}$; $x \in \mathbb{R}$

(i) $\operatorname{senh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$; $x \in \mathbb{R}$.

(j) $\operatorname{sen}(4x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!}$; $x \in \mathbb{R}$

(k) $\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$; $x \in \mathbb{R}$

(l) $\cos(3x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{2n} x^{2n}}{(2n)!}$; $x \in \mathbb{R}$

3.6B Integrando a série obtida em 3.4A(a) de 0 até x, obtemos $E(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!\,(2n+1)}$.

3.6C $a_0 = 6$, $a_1 = -1$, $a_2 = 2$, $a_3 = -5$ e $a_4 = 3$.

3.6D

(a) $\sqrt{x} = 3 + \frac{1}{6}(x-9) + \sum (-1)^{n+1} \dfrac{1.3.5.\ldots.(2n-3)}{n!2^n 3^{2n-1}}(x-9)^n$

(b) $\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{15}x^5 + \cdots$

(c) $\cos x = \dfrac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}(x-\pi/3) - \frac{1}{4}(x-\pi/3)^2 + \frac{\sqrt{3}}{12}(x-\pi/3)^3$

(d) $e^x = e^4.e^{x-4} = e^4 \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(x-4)^n}{n!}$

(e) $\sqrt[3]{x} = 1 + (x-1)/3 - (x-1)^2/3^2 + 5(x-1)^3/3^4 - \cdots$

(f) $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}(x-\frac{\pi}{6}) - \frac{1}{2}\frac{1}{2!}(x-\frac{\pi}{6})^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{3!}(x-\frac{\pi}{6})^3 + \cdots$

(g) $\dfrac{1}{x^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(x-1)^n$; $0 < x < 2$

(h) $\dfrac{1}{3x} = \frac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n (x-2)^n}{2^{n+1}}$

(i) $\dfrac{1}{2x+1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n 2^n (x-3)^n}{7^{n+1}}, \quad -\frac{1}{2} < x < \frac{13}{2}.$

3.6E $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, sendo $a_k = 0$ para $k \geq n+1$.

3.6F $\dfrac{1-\cos x}{x} = \dfrac{1}{x}(1 - \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n)!} = -x + \dfrac{x^3}{4!} - \dfrac{x^5}{6!} + \dfrac{x^7}{8!} - \cdots$ e daí segue que $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1-\cos x}{x}) = 0$.

3.6G $e^{2x} = e^{2(x+1)} \cdot e^{-2} = e^{-2} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^n (x+1)^n}{n!}$; $x \in \mathbb{R}$.

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{(t-1)+1} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^{n+1}}{n+1},\ 0 < x < 2.$$

3.6H $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{n!}, \quad g(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

3.6I Todas as derivadas devem ser obtidas a partir das respectivas séries que representam as funções. Da expansão de Maclaurin, sabemos que os coeficientes c_n das séries são dados por $f^{(n)}(0) = n!c_n$ e com cuidado você deve encontrar:

$$f^{(15)}(0) = 0; \quad f^{(28)}(0) = -28; \quad g^{(16)}(0) = \tfrac{16!}{8!}; \quad h^{(20)}(0) = -\tfrac{20!}{10}; \quad p^{(17)}(0) = \tfrac{16!}{8!}.$$

3.6J Aproxime a série de e^{-x^2} determinada no Exercício 3.4A(a) pela soma parcial $S_3(x)$ e, em seguida, faça $x = 0.2$ para obter $e^{-0.04} \simeq 0.9608$, com erro menor do que 1.06×10^{-5}.

Exercícios 3.8

3.8B $\sqrt[3]{25} = 3\sqrt[3]{25/27} = 3\sqrt[3]{1-2/27}$ e usando a série binomial com $\alpha = 1/3$ e $x = -2/27$, encontramos a aproximação $\sqrt[3]{25} \simeq 2.9262$.

3.8C Considere os três primeiros termos da expansão de $\left(1-x^3\right)^{1/2}$, integre de $x = 0$ até $x = 1$ e obtenha

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^3}dx \simeq 0.8572.$$

3.8D $|x| < \sqrt[5]{0.06} \approx 0.57$ **3.8E** $E < 0.8 \times 10^{-6}$ **3.8F** $E < 1.3 \times 10^{-5}$.