Exercícios Complementares 2.2

2.2A O que significa uma série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ser divergente?

2.2B Falso ou Verdadeiro? Justifique.

(a) se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, então $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge;

(b) se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, então $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$;

(c) se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge e $a_n \geq 0, \forall n$, então $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}$ converge;

(d) se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, então $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ diverge;

(e) se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ divergem, então $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ diverge;

(f) se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge e $a_n \neq 0, \forall n$, então $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{a_n}$ converge;

(g) se $\{a_n\}$ é uma seqüência constante, então $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge;

(h) se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, então $\sum\limits_{n=100}^{\infty} a_n$ converge.

2.2C Por observação do limite do termo geral, verifique que as séries abaixo são divergentes:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right)$ (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} [1 + (-1)^n]$ (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^3}{n^3 + n^2 + 4}$

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{\cos n}$ (e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{n}\right)$ (f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{2^n}$.

2.2D Encontre uma série cuja n-ésima soma vem dada por:

(a) $S_n = \dfrac{2n}{3n+1}$ (b) $S_n = \dfrac{n^2}{n+1}$ (c) $S_n = \dfrac{1}{2^n}$

2.2E Em cada série abaixo, calcule a n-ésima soma parcial e o valor da soma da série no caso de ela convergir.

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ (b) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}4\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$ (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3}{9n^2+3n-2}$

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$ (e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ (f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{1}{2^{n-2}}-\dfrac{1}{3^{n+2}}\right]$

(g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{3^n}\right)$ (h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{4n^2-1}$ (i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{(4n-3)(4n+1)}$

(j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left[\dfrac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right]$ (k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^{n+1}}{3^{2n}}$ (l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{2^n\operatorname{sen}(n\pi+\pi/2)}{3^{2n-2}}\right]$.

2.2F Encontre os valores de x que tornam a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{2n}$ convergente e calcule o valor da soma. Idem para a série $\dfrac{1}{2}+\dfrac{x-3}{4}+\dfrac{(x-3)^2}{8}+\cdots+\dfrac{(x-3)^n}{2^{n+1}}+\cdots$

2.2G Expresse cada decimal periódica como uma série e ache a fração ordinária que ela representa:

(a) $0,232323\ldots$ (b) $5,146146146\ldots$ (c) $3,2394394\ldots$ (d) $2,718288288\ldots$.

2.2H Deixa-se cair uma bola de borracha de uma altura de 10 metros. A bola repica aproximadamente metade da distância após cada queda. Use uma série geométrica para aproximar o percurso total feito pela bola até o repouso completo.

2.2I A extremidade de um pêndulo oscila ao longo de um arco de 24 centímetros em sua primeira oscilação. Se cada oscilação é aproximadamente $5/6$ da oscilação precedente, use uma série geométrica para obter uma aproximação da distância total percorrida pelo pêndulo até entrar em repouso total.

2.2J Administra-se a um indivíduo uma dose de Q unidades de um certo remédio. A quantidade que permanece na corrente sangüínea ao final de t minutos é Qe^{-kt}, onde k é uma constante positiva. Admitindo que a mesma dose seja administrada em intervalos sucessivos de T minutos, mostre que a quantidade de remédio $R(n)$ imediatamente após a n-ésima dose vem dada por:

$$R(n)=\sum_{j=0}^{n-1}Qe^{-jkT}.$$

Encontre uma cota superior para a quantidade de remédio na corrente sangüínea após um número arbitrário de doses e ache o menor tempo entre as doses, de modo que a quantidade de remédio $R(n)$ não exceda um nível de risco M, $M>Q$.

2.2K Suponha que cada unidade monetária introduzida na economia recircule do seguinte modo: 85% da unidade original são gastos; em seguida, 85% daqueles 0,85 são gastos, e assim por diante. Determine o impacto econômico (o total gasto) se \$ 1.000.000,00 forem introduzidos na economia.

2.2L Em um programa de erradicação de epidemia, liberam-se diariamente na população N moscas macho esterilizadas, e 90% dessas moscas sobrevivem a um determinado dia. Após n dias, mostre que o número de moscas esterilizadas na população é dado por:

$$N^* = N + (0.9)\,N + (0.9)^2\,N + ... + (0.9)^{n-1}\,N$$

e determine o número de moscas esterilizadas que devem ser liberadas a cada dia, se o objetivo do programa, a longo alcance, é manter 20.000 moscas esterilizadas na população.

2.2M Dois atletas disputam 10 provas de percurso em 10 etapas sucessivas. Os tempos de cada etapa são os mesmos e a tabela a seguir mostra as distâncias, em km, percorridas por cada um deles nas quatro etapas iniciais:

	etapa 1	etapa 2	etapa 3	etapa 4
atleta A	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
atleta B	$\frac{1}{2}$	$\frac{2!}{2\times 3!}$	$\frac{3!}{3\times 4!}$	$\frac{4!}{4\times 5!}$

Se a vitória é dada àquele que alcançou o maior percurso, qual foi o atleta vencedor?

2.2N Com auxílio do Exercício 1.6L calcule o valor da soma $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{(n+1)!}$.

2.2O Considere a seqüência de Fibonacci $\{a_n\}$ definida no Exemplo 1.5.5. Mostre que:

(a) $\dfrac{1}{a_{n-1}a_{n+1}} = \dfrac{1}{a_{n-1}a_n} - \dfrac{1}{a_n a_{n+1}}, \ \forall n \geq 2;$

(b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{a_{n-1}a_{n+1}} = 1$ e $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{a_n}{a_{n-1}a_{n+1}} = 2.$

Exercícios Complementares 2.4

2.4A Use o teste da Comparação ou Comparação no Limite para determinar a convergência ou a divergência das séries abaixo:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4+n^2+1}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\cos n}{n^2}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{arctg } n}{n}$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$ (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n2^n}$ (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \text{sen}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ (j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ (k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+n^2}{n^3+1}$ (l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{5n^2+1}}$

(m) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4n^3-5n}}$ (n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+4}$ (o) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{1+3^n}$ (p) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n2^n}$

(q) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^2}$ (r) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ (s) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ (t) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

2.4B Verifique que a função que estende o n-ésimo termo de cada série dada abaixo, atende às hipóteses do Teste da Integral e em seguida decida sobre a convergência da série:

(a) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3}{n(\ln n)^2}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)^2}$ (c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{n^3+1}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$ (f) $\sum_{n=4}^{\infty} (\frac{1}{n-3}-\frac{1}{n})$ (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{arctg } n}{n^2+1}$ (h) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n\sqrt{n^2-1}}$

2.4C Determine todos os números reais α e β que tornam as séries $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+n^2}{n(\ln n)^{\alpha}}$ e $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\beta}\ln n}$ convergentes.

2.4D Observando a demonstração do Teste da Integral, verifique a relação:

$$\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < 1 + \ln n.$$

Usando esse fato, estime o número de termos da série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ que devem ser somados para que se tenha $S_n > 100$. $\left[\text{resposta: } n > e^{100} - 1 \simeq 2.688 \times 10^{43}\right]$.

2.4E Em cada caso abaixo, determine o menor número de termos que devem ser somados para aproximar a soma da série com um erro menor do que E.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$; $E = 0.001$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$; $E = 0.01$ (c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$; $E = 0.01$.

2.4F Se $\{a_n\}$ é uma seqüência de termos positivos e $\lim_{n\to\infty} n^p a_n = l > 0$, prove que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se $p > 1$ e diverge se $0 < p \leq 1$.

2.4G Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ são séries de termos positivos convergentes, mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ é também convergente.

2.4H Falso ou Verdadeiro? Justifique:

(a) se $a_n > 0$, $\forall n$, e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente, então $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{a_n}$ diverge;

(b) se $a_n > 0$, $\forall n$, e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente, então $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ é convergente;

(c) se $a_n > 0$, $\forall n$, e $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}a_n = 1$, então a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge;

(d) se $a_n > 0$, $\forall n$, e $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, então a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{\sqrt{n}}$ converge;

(e) se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ são séries de termos positivos divergentes, então a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ também diverge;

(f) se $a_n > 0$, $\forall n$, e $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, então a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

2.4I A série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{n^2+n} - \ln \dfrac{n}{n+1} \right)$ é convergente ou divergente?

2.4J Mostre que $\dfrac{\pi}{4} \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+1} \leq \dfrac{1}{2} + \dfrac{\pi}{4}$.

Exercícios Complementares 2.6

2.6A Aproxime a soma da série pela soma parcial S_4. Estime o erro.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n3^n}$ (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n}{(2n)!}$ (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2}$ (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2+n}$

2.6B Use a Estimativa do Erro para aproximar a soma da série com quatro casas decimais e com erro menor do que $E = 5 \times 10^{-1}$. Diga em cada caso quando a aproximação é por falta ou por excesso:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2}$ (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^n}$ (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^3+1}$.

2.6C Verifique que as séries abaixo atendem às condições do Critério de Leibniz e conclua que elas são convergentes:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2+7}$ (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n}{2^n}$ (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n^2}{n^3+2}$ (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n}{n^2+n}$.

2.6D Determine os valores inteiros de p que faz com que cada série abaixo seja convergente.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{n^p}$ (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{n+p}$ (c) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n (\ln n)^p}{n}$.

2.6E Seja $\{b_n\}$ a seqüência definida por: $b_n = 1/n$, se for ímpar, e $b_n = 1/n^2$, se n for par. Mostre que a série $\sum (-1)^n b_n$ é divergente e explique porquê o Critério de Leibiniz não se aplica nesse caso.

Exercícios Complementares 2.8

2.8A Falso ou Verdadeiro? Justifique:

(a) se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, então $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge;

(b) se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente, então $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{1+a_n^2}$ converge;

(c) se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge, então $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente;

(d) se $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, então $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge;

(e) se $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, então $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge;

(f) se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente, $a_n \neq 0$, então $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|}$ diverge;

(g) se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ são divergentes, então $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ é divergente;

(h) se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ são convergentes, então $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ é convergente;

(i) para todo inteiro positivo k a série alternada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[k]{n}}$ converge.

2.8B Usando o Teste da Raiz, verifique que as séries dadas abaixo convergem:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-n}{3n+1}\right)^n$ (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n$ (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{5^n}$ (d) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-5)^{n+1}}{(\ln\, n)^n}$.

2.8C Suponha que a seqüência $\{a_n\}$ seja convergente e tenha limite l. Considere as seqüências $\{a_n^+\}$ e $\{a_n^-\}$ definidas por: $a_n^+ = \frac{1}{2}(a_n + |a_n|)$ e $a_n^- = \frac{1}{2}(a_n - |a_n|)$

(a) Calcule $\lim a_n^+$ e $\lim a_n^-$;

(b) Se $\sum a_n$ converge absolutamente, mostre que $\sum a_n^+$ e $\sum a_n^-$ convergem;

(c) Se $\sum a_n$ converge condicionalmente, mostre que $\sum a_n^+$ e $\sum a_n^-$ divergem.

2.8D *Estratégia para testar a convergência.* Nos fundamentos teóricos estabelecemos vários critérios para testar a convergência ou divergência de uma série numérica; a dificuldade é: qual o teste adequado a uma determinada série. Essa dificuldade também surge quando se integra funções. Não há regra que estabeleça qual critério se aplica a qual série. Como sugestão, apresentamos um roteiro que poderá ajudar na investigação.

1. Se $\lim a_n \neq 0$ ou a seqüência $\{a_n\}$ é divergente o critério do n-ésimo termo deve ser usado para concluir que a série $\sum a_n$ diverge;

2. Se a série é da forma $\sum \alpha r^{n-1}$ ela é uma série geométrica, que converge para $\alpha/(1-r)$ se $|r| < 1$ e diverge se $|r| \geq 1$;

3. Se a série é da forma $\sum (b_n - b_{n+1})$ ela é uma série de encaixe, que converge para $b_1 - \lim b_n$, se $\{b_n\}$ convergir. Se $\{b_n\}$ divergir a série de encaixe também diverge;

4. Se a série é da forma $\sum 1/n^p$ ela é uma p-série e será convergente apenas quando $p > 1$;

5. Tente o Teste da Razão seguindo o esquema:

$$
\begin{tikzcd}
 & \boxed{l<1} \arrow[rr] & & \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge abs.}} \arrow[r] & \boxed{\text{Fim}} \\
\boxed{l=\lim\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \boxed{l>1 \text{ ou } l=\infty} \arrow[rr] & & \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverge}} \arrow[r] & \boxed{\text{Fim}} \\
 & \boxed{l=1} \arrow[r] & \boxed{?} \arrow[r] \arrow[dr] & \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|} \arrow[r] & \boxed{\text{Critérios Comparação / Integral}} \\
 & & & \boxed{\text{Alternada}} \arrow[r] & \boxed{\text{Critério de Leibniz}}
\end{tikzcd}
$$

Teste a convergência das séries:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2^n + 3^n)^{1/n}}{n}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{\sqrt{n^3+1}}$ (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n3^{2n}}{5^{n-1}}$ (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos n}{n^2}$

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+2}$ (j) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$ (k) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^n n!$ (l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+2)}$

2.8E Escreva os cinco primeiros termos e em seguida teste a convergência das séries:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{n!}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3n-2)}$.

Respostas e Sugestões

Exercícios 2.2

2.2A A série $\sum a_n$ ser divergente significa que sua "soma" não é um número real. Em outras palavras, isso significa que a seqüência $\{S_n\}$ de suas somas parciais é divergente.

2.2B (a) F (b) F (c) F (d) F (e) F (f) F (g) F (h) V

2.2D (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{(3n-2)(3n+1)} = \dfrac{2}{3}$ (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2+n-1}{n^2+n} = \infty$ (c) $\dfrac{1}{2} - \sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0.$

2.2E (a) 3 (b) $\frac{32}{75}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $-\infty$ (e) 1 (f) $\frac{71}{18}$ (g) $\frac{3}{2}$ (h) $\frac{1}{2}$ (I) $\frac{1}{2}$ (h) $\ln 2$ (k) $\frac{4}{7}$ (h) $\frac{-18}{11}$

2.2F A série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{2n}$ converge para $\dfrac{x^2}{1-x^2}$, se $|x| < 1$ e $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(x-3)^n}{2^{n+1}}$ converge para $\dfrac{1}{5-x}$ se $1 < x < 5$.

2.2G (a) $\frac{23}{99}$ (b) $\frac{514}{999}$ (c) $\frac{16181}{4995}$ (d) $\frac{30173}{11100}$

2.2H 30 m **2.1I.** 144 cm **2.1J.** $\frac{Q}{1-e^{-ct}}$; $T = -\frac{1}{c}\ln(\frac{M-Q}{M})$ **2.1K.** \$ $\frac{85}{15}\times 10^8$ **2.1L.** 2.000.

2.2M O venc*edo*r foi o atleta A, com percurso de $\frac{1023}{1024}\,km$ contra $\frac{10}{11}\,km$ do atleta B.

Exercícios 2.4

2.4A (a) C (b) C (c) C (d) C (e) D (f) C (g) C (h) C (i) C (j) D (k) D (l) C (m) C (n) D (o) C (p) C (q) C (r) C (s) C (t) D

2.4B (a) C (b) C (c) C (d) D (e) C (f) C (g) C (h) C

2.4C A série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n+n^2}{n(\ln n)^{\alpha}}$ é sempre divergente e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\beta}\ln n}$ converge para $\beta > 1$.

2.4E (a) $n = 1001$ (c) $n > e^{100}$ **2.4.** (a) V (b) V (c) V (d) F (e) V (f) F

2.4I Diverge, (ela é a soma de uma série convergente com uma divergente (Teorema 2.1.8(b)).

2.4J Da fig. 2.2 note que: $\int_1^{\infty} \dfrac{1}{1+x^2}dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+1} = \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{2} + \int_1^{\infty} \dfrac{1}{1+x^2}dx$ e agora use:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{B\to\infty} [\arctan x]_{x=1}^{x=B} = \pi/4.$$

Exercícios 2.6

2.6A (a) $8,23 \times 10^{-4}$ (b) $1,3 \times 10^{-6}$ (c) 4×10^{-2} (d) $3,3 \times 10^{-2}$

Exercícios 2.8

2.6A (a) F (b) V (c) F (d) F (e) F (f) V (g) F (h) F (i) V

2.6C (a) C (b) C Abs (c) C Abs (d) D (e) C Abs (f) D (g) D (h) C Abs (i) C Abs (j) C Abs (k) C Abs (l) C Abs

2.6D (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{n!} = 1 + \frac{3}{2} + \frac{15}{6} + \frac{75}{24} + \cdots$. (divergente, porque $\lim a_n = \infty$)
(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n.)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3n-2)} = 2 + \frac{8}{4} + \frac{48}{28} + \frac{384}{308} + \cdots$. (convergente, porque $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2}{3}$)