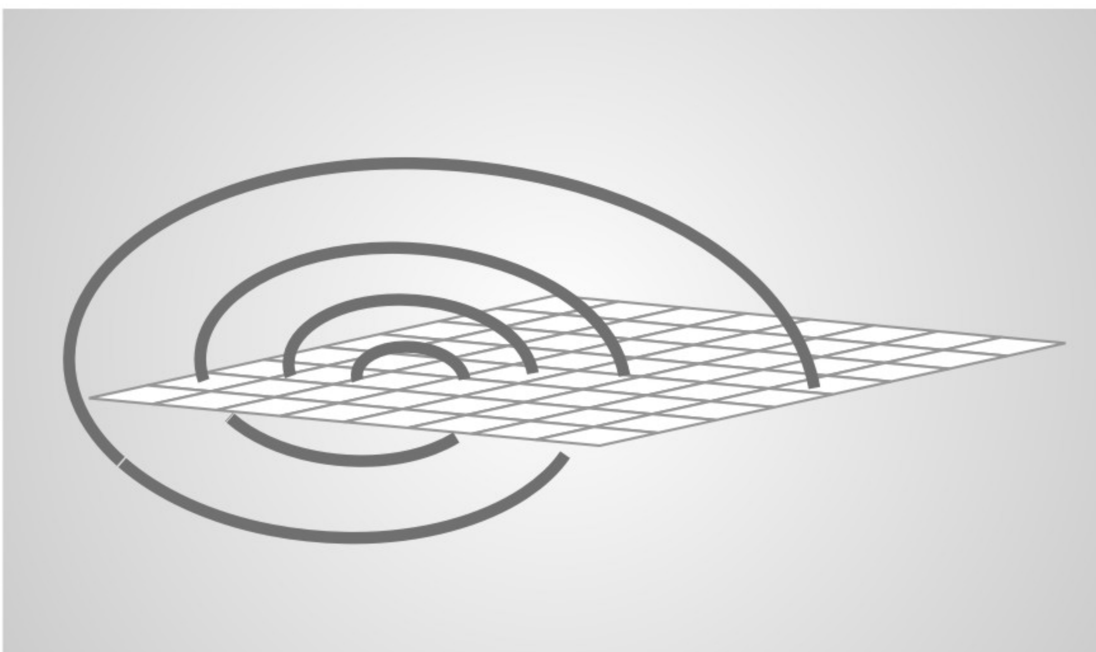
# Séries e Equações Diferenciais

**Marivaldo P Matos**



## Exercícios Complementares

## Exercícios Complementares 1.2

**1.2A** Dê exemplo de uma seqüência $\{a_n\}$, não constante, para ilustrar cada situação abaixo:

(a) limitada e crescente (b) limitada e decrescente

(c) limitada e não monótona (d) não limitada e não crescente

(e) não limitada e não monótona (f) monótona e não limitada.

**1.2B** Em cada caso abaixo, encontre os quatro primeiros termos da seqüência:

(a) $a_n = \dfrac{1}{2n-1}$ (b) $b_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ (c) $c_n = (-1)^n n$.

**1.2C** Esboce o gráfico da seqüência de termo geral $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ e verifique quantos pontos da forma $(n, a_n)$ estão fora da faixa horizontal determinada pelas retas $y = 4/5$ e $y = 6/5$.

**1.2D** Dê exemplo de uma seqüência limitada e não monótona que possui uma subseqüência crescente.

**1.2E** Expresse pelo seu termo geral cada seqüência dada abaixo:

(a) $1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots$ (b) $1/2, 1/4, 1/8, 1/16, \ldots$ (c) $1, 0, 1, 0, 1, \ldots$

(d) $0, 2, 0, 2, 0, 2, 0, \ldots$ (e) $1, 9, 25, 49, 81, \ldots$ (f) $0, 3, 2, 5, 4, \ldots$

(g) $2, 1, 3/2, 1, 4/3, 1, \ldots$ (h) $0, 3/2, -2/3, 5/4, -4/5, \ldots$ (i)$1, 3/2, 2, 5/2, 3, \ldots$

(j) $-4, -2, -4, -2, \ldots$ (k) $1/2, -1/4, 1/6, -1/8, \ldots$ (l) $1, 10, 2, 10^2, 3, 10^3, \ldots$

**1.2F** Classifique as seqüências do Exercício 1.2E quanto à limitação e monotonia e selecione de (e), (f) e (l) uma subseqüência crescente. Qual daquelas seqüências possui um subseqüência constante? *Recorde-se que: (i) toda seqüência é uma subseqüência dela própria e (ii) uma seqüência possui uma subseqüência constante quando essa constante se repetir uma infinidade de vêzes!*

**1.2G** Considere as funções $f(x) = \cos x$, $g(x) = \operatorname{sen} x$ e $h(x) = (1+x)^{-1}$. Encontre expressões para as derivadas de ordem $n$ dessas funções, no ponto $x = 0$.

**1.2H** Determine o sup e o inf das seguintes seqüências:

$$\left\{-n^2+n\right\}, \left\{\frac{2^n}{n!}\right\}, \left\{\frac{2}{3n-4}\right\}, \left\{1-\frac{1}{n}\right\}, \{\ln n\}, \left\{\frac{3n^2}{n^2+n}\right\}, \{(-2)^n\}.$$

**1.2I** Dê exemplo de uma seqüência $\{a_n\}$ não constante, crescente e limitada superiormente. Por observação de seus termos, estude o comportamento da seqüência quando $n \to \infty$. Faça a mesma análise com uma seqüência decrescente e limitada inferiormente.

**1.2J** Dê exemplo de uma seqüência $\{a_n\}$ cuja distância entre quaisquer dois termos consecutivos é igual 4.

**1.2K** Dê exemplo de uma seqüência $\{a_n\}$ com as seguintes características: os termos de ordem par estão entre 3 e 4, os termos de ordem ímpar estão entre 4 e 5, mas todos *se aproximam* do número 4, à medida que o índice $n$ vai aumentando.

**1.2L** Considere a seqüência de termo geral $a_n = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{sen} \frac{(2n+2)\pi}{3}$. Escreva os 10 primeiros termos da seqüência $(a_n)$ e calcule $a_{201}$.

## Exercícios Complementares 1.4

**1.4A** Falso ou verdadeiro? Procure justificar as afirmações falsas com um contra-exemplo.

(a) toda seqüência convergente é limitada;

(b) toda seqüência limitada é convergente;

(c) toda seqüência limitada é monótona;

(d) toda seqüência monótona é convergente;

(e) a soma de duas seqüências divergentes é divergente;

(f) toda seqüência divergente é não monótona;

(g) se uma seqüência convergente possui uma infinidade de termos nulos, seu limite é zero;

(h) toda seqüência divergente é não limitada;

(i) se uma seqüência possui uma subseqüência convergente, ela própria converge;

(j) toda seqüência alternada é divergente;

(k) toda seqüência decrescente limitada é convergente e seu limite é zero;

(l) se uma seqüência $\{a_n\}$ diverge, então $\{|a_n|\}$ também diverge;

(m) se a seqüência $\{|a_n|\}$ converge então $\{a_n\}$ também converge;

(n) se a seqüência $\{|a_n|\}$ converge para zero, então $\{a_n\}$ também converge para zero;

(o) se $a_n \leq b_n$, $\forall n$, $\{a_n\}$ crescente e $\{b_n\}$ convergente, então $\{a_n\}$ converge;

(p) se $\{a_n\}$ é convergente, então $\{(-1)^n a_n\}$ também converge;

(q) a seqüência $\{a_n\}$ definida por $a_1 = 1$ e $a_{n+1} = \dfrac{na_n}{n+1}$ é convergente;

(r) a seqüência $\{a_n\}$ definida por $a_1 = 1$ e $a_{n+1} = 1 - a_n$ é convergente;

(s) se $a_n \neq 0$, $\forall n$, e $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l < 1$, então $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

**1.4B** Dê exemplo de duas seqüências $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ tais que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ e $\{a_n b_n\}$ seja divergente. Por que isso não contradiz o Critério 1.3.9?

**1.4C** Usando a definição de limite, prove que:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2n-1} = \dfrac{1}{2}$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen}\left(n^5+n\right)}{n} = 0$ (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2+1}{n^2} = 3$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5+n}{2+3n} = \dfrac{1}{3}$ (e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5}{2+3n} = 0$ (f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(2+\dfrac{1}{n}\right) = 2$.

**1.4D** Calcule o limite das seguintes seqüências:

(a) $\dfrac{n-1}{n+1}$ (b) $n \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$ (c) $\dfrac{\ln n}{e^n}$ (d) $\dfrac{4n^2-3n}{n^2+5n-6}$ (e) $\dfrac{n^2}{n+1} - \dfrac{n^2}{n+2}$

(f) $\left(1+\dfrac{1}{3n}\right)^n$ (g) $\dfrac{\sqrt{n!}+e^{2n}}{5\sqrt{n!}-e^n}$ (h) $\dfrac{n}{e^n}$ (i) $\dfrac{3n\sqrt{n}+1}{7-2n\sqrt{n}}$ (j) $\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n$

(k) $n^{\frac{1}{n}}$ (l) $\dfrac{1}{3^{n+1}} + \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-3}$ (m) $\dfrac{2^n}{e^n}$ (n) $\sqrt[n]{n^2+n}$ (o) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

(p) $\sqrt[n]{a}\,, a > 0$ (q) $\dfrac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}$ (r) $\dfrac{n!}{3^{n+1}}$ (s) $\dfrac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$ (t) $\dfrac{\sqrt[3]{n^2}\operatorname{sen}\left(n^2\right)}{n+2}$

**1.4E** Em cada caso verifique se a seqüência é convergente ou divergente:

(a) $\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n}$ (b) $\dfrac{2^n}{n!}$ (c) $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n}}$ (d) $\dfrac{2^n}{1+2^n}$

(e) $\dfrac{n^2}{2n-1}-\dfrac{n^2}{2n+1}$ (f) $\dfrac{(-1)^n}{n}$ (g) $\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots\cdot (2n-1)}{n!2^n}$ (h) $\dfrac{n}{2^n}+\dfrac{(-1)^n}{n}$

(i) $\dfrac{n^n}{n!}$ (j) $\dfrac{n}{2^n}$ (k) $\dfrac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots\cdot (2n-1)}$ (l) $\dfrac{n^2}{\ln(n+1)}$

(m) $\ln(e^n-1)-n$ (n) $1+(-1)^n$ (o) $\sqrt[8]{n^2+1}-\sqrt[4]{n+1}$ (p) $\operatorname{sen}(n\pi/2)$

**1.4F** Prove que $\lim\limits_{n\to\infty}(3^n+4^n)^{1/n}=4$. Se $a,b\geq 0$, mostre que $\lim\limits_{n\to\infty}(a^n+b^n)^{1/n}=\max\{a,b\}$.

**1.4G** Se $|r|<1$, use o Critério da Razão 1.3.17 para mostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} nr^n=0$. Se $r>1$, mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} r^n=\infty$. E se $r<-1$?

**1.4H** Mostre que $\left(1+r+r^2+\cdots+r^{n-1}\right)(1-r)=1-r^n$. Se $|r|<1$, use essa relação e deduza que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+r+\cdots+r^{n-1}\right)=\frac{1}{1-r}.$$

Agora, identifique a seqüência $\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots$ com aquela de termo geral $a_n=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}$ e calcule seu limite.

**1.4I** Seja $\{b_n\}$ uma seqüência convergente, com $b_n\neq 0$, $\forall n$, e $\lim\limits_{n\to\infty} b_n\neq 0$. A partir da definição de limite, mostre que a sequência $\{1/b_n\}$ é limitada. Isto foi usado na demonstração da Propriedade 1.3.7(e).

**1.4J** Mostre que $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2^2})\cdot\operatorname{sen}(\frac{\pi}{3^2})\cdot\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4^2})\cdot\ldots\cdot\operatorname{sen}(\frac{\pi}{n^2})\right]=0$. (não use o produto de limites!)

**1.4K** Considere a seqüência cujos termos são definidos pela recorrência: $a_1=5$ e $a_{n+1}=\sqrt{a_n}$. Estes termos podem ser gerados em uma calculadora, introduzindo-se o número 5 e pressionando-se a tecla $\boxed{\sqrt{x}}$.

(a) Descreva o comportamento de $\{a_n\}$ quando $n$ aumenta;

(b) Convença-se de que $a_n=5^{1/2^n}$ e calcule $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

**1.4L** Em uma calculadora uma seqüência é gerada introduzindo-se um número e pressionando-se a tecla $\boxed{1/x}$. Em que condições a seqüência tem limite?

**1.4M** Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função derivável com $f(0)=0$. Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} nf(\frac{1}{n})$. Quanto vale $\lim\limits_{n\to\infty} n\ \mathrm{arctg}(\frac{1}{n})$?

**1.4N** Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função derivável tal que $f(x)>-1,\ \forall x$, e $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$. Dê exemplo de uma tal função e calcule o limite da seqüência $a_n=\dfrac{\ln(1+f(n))}{f(n)}$.

**1.4O** Considere a seqüência $(a_n)$ definida pela recorrência: $a_1=1$ e $a_n=a_{n-1}+\cos a_{n-1}$, para $n\geq 2$. Mostre que $(a_n)$ é monótona limitada e, portanto, convergente e que $\lim a_n=\pi/2$.

**1.4P** Uma população estável de 35.000 pássaros vive em três ilhas. Cada ano, 10% da população da ilha $A$ migra para ilha $B$, 20% da população da ilha $B$ migra para a ilha $C$ e 5% da população da ilha $C$ migra para ilha $A$. Denotando por $A_n, B_n$ e $C_n$, respectivamente, os números de pássaros nas ilhas $A, B$ e $C$, no $n$-ésimo ano antes da ocorrência da migração e admitindo a convergência das seqüências $\{A_n\},\{B_n\}$ e $\{C_n\}$, dê uma aproximação do número de pássaros em cada ilha após muitos anos.

## Exercícios Complementares 1.6

**1.6A** Use o Método de Indução Finita para provar as seguintes relações:

(a) $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$;

(b) $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$;

(c) $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$;

(d) $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\frac{1}{3}(4n^3-n)$;

(e) $(1+x)\left(1+x^2\right)\left(1+x^4\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+x^{2^n}\right)=\dfrac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}$, o ponto de partida é $n=0$;

(f) $\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left[\dfrac{(k+1)^2}{k(k+2)}\right]=\ln 2+\ln\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)$.

**1.6B** Mostre que $n\left(n^2+5\right)$ é divisível por 6. (sug. use o Exemplo 1.5.3).

**1.6C** Uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ satisfaz a: $f(xy)=f(x)+f(y),\ \forall x,y$. Prove que $f(a^n)=nf(a)$.

**1.6D** Represente por $\binom{n}{k}$ o coeficiente binomial $\dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$, onde $k$ e $n$ são números inteiros positivos e $k \le n$. Mostre que:

(a) $\dbinom{n}{k-1} + \dbinom{n}{k} = \dbinom{n+1}{k}$;

(b) $(x+y)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k} x^k y^{n-k}$ .

**1.6E** Demonstre a seguinte regra de Leibniz para derivação:

$$[fg]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}.$$

**1.6F** Seja $r \ge 0$ um número real. Mostre que $(1+r)^n \ge 1 + nr + \dfrac{n\,(n-1)}{2} r^2$ e deduza a partir daí a desigualdade de Bernoulli: $(1+r)^n \ge 1 + nr$.

**1.6G** Se $r$ é um número real $\neq 1$, mostre que $1 + r + r^2 + ... + r^{n-1} = \dfrac{1-r^n}{1-r}$. De forma mais geral, você pode demonstrar que se $x$ e $y$ são números reais, então:

$$x^n - y^n = (x-y)\left(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1}\right), \; n \in \mathbb{N}.$$

**1.6H** Mostre que $\dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)} \ge \dfrac{1}{2n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

**1.6I** Mostre que $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{(\ln x)^n} = \infty$, $\forall n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

**1.6J** Uma seqüência $\{b_n\}$ é definida por: $b_1 = -1$ e $b_n = \dfrac{(1-n)\,b_{n-1}}{n^2}$, $n \ge 2$. Use o Método de Indução Finita e prove que $b_n = \dfrac{(-1)^n}{n!n}$.

**1.6K** Considere a seqüência de *Fibonacci*: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ e $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, para $n \ge 3$. Mostre que

$$a_n = \frac{1}{2^n \sqrt{5}} \left[ \left(1 + \sqrt{5}\right)^n - \left(1 - \sqrt{5}\right)^n \right].$$

**1.6L** Considere a seqüência $a_n = \dfrac{n}{(n+1)!}$ e mostre por indução que

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$$

**1.6M** Em cada caso abaixo, encontre o primeiro inteiro positivo $n_0$ para o qual a sentença é verdadeira e, usando a extensão do Método de Indução, prove que a sentença matemática é verdadeira para qualquer número inteiro maior do que $n_0$ :

(a) $10^n \leq n^n$ (b) $n^2 + 18 \leq n^3$ (c) $5 + \log_2 n \leq n$ (d) $2n + 2 \leq 2^n$

(e) $2^n \leq n!$ (f) $n + 12 \leq n^2$ (g) $n \log_2 n + 9 \leq n^2$ (h) $n^2 \leq 2^n$.

## Respostas e Sugestões

### Exercícios 1.2

**1.2A** (a) $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ (b) $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ (c) $\{(-1)^n\}$ (d) $\{-n\}$ (e) $\{(-1)^n n\}$ (f) $\{n\}$

**1.2B**

(a) $1, 1/3, 1/5, 1/7$ (b) $\sqrt{2}-1, \sqrt{3}-\sqrt{2}, 2-\sqrt{3}, \sqrt{5}-2$ (c) $-1, 2, -3, 4$

**1.2C** Os termos $a_1, a_2$ e $a_3$ estão fora da faixa; o termo $a_4$ está na fronteira e a partir do quinto todos os termos estão dentro da faixa.

**1.2D** A seqüência $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ é limitada e não monótona e a subseqüência $a_{2n-1} = \dfrac{-1}{2n-1}$ é crescente.

**1.2E**

(a) $1/n$ (b) $1/2^n$ (c) $[1+(-1)^{n+1}]/2$ (d) $1+(-1)^n$ (e) $(2n-1)^2$ (f) $(-1)^n+n$ (g) $\dfrac{(-1)^{n-1}+n+2}{n+1}$ (h) $(-1)^n+1/n$ (i) $\dfrac{n+1}{2}$ (j) $-3+(-1)^n$ (k) $\dfrac{(-1)^{n+1}}{2n}$ (l) $[1+(-1)^n]\dfrac{10^{n/2}}{2}+[1+(-1)^{n+1}]\dfrac{n+1}{4}$

**1.2F** Limitada: (a), (b), (c), (d), (g), (j) e (k); Crescente: (d); Decrescente: (a) e (b). Em (e), (f) e (l) as subseqüências pares são crescentes e (c), (d), (g) e (j) são as únicas que possuem subseqüências constantes.

**1.2G** $f^{(n)}(0) = \cos(n\pi/2)$; $g^{(n)}(0) = \operatorname{sen}(n\pi/2)$; $h^{(n)}(0) = (-1)^n n!$

| **1.2H** | $-n^2+n$ | $2^n/n!$ | $2/(3n-4)$ | $(-2)^n$ | $1-1/n$ | $\ln n$ | $3n^2/\left(n^2+n\right)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| sup | $0$ | $2$ | $1$ | $\infty$ | $1$ | $\infty$ | $3$ |
| inf | $-\infty$ | $0$ | $-2$ | $-\infty$ | $0$ | $0$ | $3/2$ |

**1.2I** A seqüência de termo geral $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ é crescente limitada e seus termos se aproximam de 1, quando $n$ tende para $\infty$.

**1.2J** $a_n = 2(-1)^n$ **1.2K** $a_n = 4+(-1)^{n+1}/n$.

### Exercícios 1.4

**1.4A** (a) V (b) F (c) F (d) F (e) F (f) F (g) V (h) F (i) F (j) F (k) F (l) F (m) F (n) V (o) V (p) F (q) V (r) F (s) V

**1.4B** Considerando as seqüências $a_n = 1/n$ e $b_n = n^2$, então a seqüência $a_n b_n = n$ é divergente com limite $\infty$. Nesse caso, a seqüência $b_n$ não é limitada, como exige o Teorema 1.2.9.

**1.4D** (a) 1 (b) $\pi$ (c) 0 (d) 4 (e) 1 (f) $\sqrt[3]{e}$ (g) 1/5 (h) 0 (i) $-3/2$ (j) $e^2$ (k) 1 (l) 0 (m) 0 (n) 1 (o) 0 (p) 1 (q) 1/3 (r) $\infty$ (s) 0 (t) 0

**1.4E** (a) D (b) C (c) C (d) C (e) C (f) C (g) C (h) C (i) D (j) C (k) C (l) D (m) C (n) C (o) D

**1.4H** Para comprovar a relação $\left(1 + r + r + \cdots + r^{n-1}\right)(1 - r) = 1 - r^n$ é suficiente distribuir o produto do lado esquerdo. Se $|r| < 1$, então $r^n \to 0$ e, sendo assim, $\lim \left(r + r^2 + \cdots + r^n\right) = \dfrac{r}{1-r}$. Para $r = 1/2$, obtemos $\lim \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) = 1$ e, conseqüentemente, $\lim a_n = 2$.

**1.4L** A seqüência convergirá se o número $r$ introduzido na calculadora for igual a $\pm 1$.

**1.4M** Usando a definição de derivada, é fácil deduzir que $\lim\limits_{n\to\infty} n f'(1/n) = f'(0)$. Para $f(x) = \operatorname{arctg} x$, temos $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ e daí $f'(0) = 1$. Assim, $\lim\limits_{n\to\infty} n \operatorname{arctg}(1/n) = 1$.

**1.4N** A função $f(x) = -\exp\left(-1/x^2\right)$, para $x \neq 0$ e $f(0) = 0$ atende às condições exigidas e $\lim a_n = 1$.

**1.4P** Temos que $A_{n+1} = 0.9A_n + 0.05C_n$, $B_{n+1} = 0.1A_n + 0.8B_n$ e $C_{n+1} = 0.95C_n + 0.2B_n$. Denotando, respectivamente, por $A, B$ e $C$ os limites das seqüências $\{A_n\}$, $\{B_n\}$ e $\{C_n\}$, encontramos 10.000 na ilha A, 5.000 na ilha B e 20.000 na ilha C.