	UFPB - CCEN - Departamento de Matemática **Séries & EDO - 08.2 Prof. MPMatos** **Exame N. 1 <u>Sequências & Séries Numéricas</u>**

Gabarito

01. (2,0 pontos) Falso (F) ou verdadeiro (V). Justifique as afirmativas falsas.

(a) Se $\lim n^2 a_n = 1$, então $\lim a_n = 0$.

(b) Se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ são séries de termos positivos convergentes, então $\sum a_n b_n$ converge.

(c) Se $\sum a_n$ converge, então $\sum \sqrt{n} a_n$ converge.

(d) Se (a_n) é divergente e (b_n) é limitada, então $(a_n b_n)$ diverge.

(e) A seqüência (a_n) definida pela recorrência: $a_1 = 1$ e $a_{n+1} = 1 - a_n$ é convergente.

<u>Solução</u>:

(a) Verdadeiro. Temos

$$a_n = \underbrace{\left(1/n^2\right)}_{\substack{\downarrow \\ 0}} \underbrace{\left(n^2 a_n\right)}_{\substack{\downarrow \\ 0}} \longrightarrow 0$$

(b) Verdadeiro. Denote por S_n e R_n as n-ésimas soma de $\sum a_n$ e $\sum b_n$, respectivamente. Se U_n é a n-ésma soma de $\sum a_n b_n$, então:

$$0 \leq U_n \leq S_n R_n,$$

de onde resulta que a seqüência (U_n) – e conseqüentemente a série $\sum a_n b_n$ – converge.

(c) Falso. Considere $a_n = (-1)^n / \sqrt{n}$.

(d) Falso. Considere $a_n = (-1)^n$ (divergente) e $b_n = 1/n$ (limitada). A seqüência $a_n b_n$ converge para zero.

(e) Falso. A seqüência a_n é na verdade 1,0,1,0,1,0,... que é divergente (a subseqüência par e ímpar convergem para valores distintos).

---

02. Assinale a alternativa correta.

1) Se $a_n = \dfrac{2}{3n-4}$, então o valor de $\sup a_n + 2 \inf a_n$ é igual a:

(a) 3 $\boxed{\text{(b)}}$ -3 (c) 1 (d) -1.

2) As séries $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}^2(1/n)$ e $\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{sen}(1/n)$ são respectivamente:

(a) Convergente e Convergente

$\boxed{\text{(b)}}$ Convergente e Divergente

(c) Divergente e Divergente

(d) Divergente e Convergente.

3) Se S_n é a n-ésima soma parcial da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de termos positivos, então:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente se $\{S_n\}$ for monótona;

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é sempre convergente;

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente quando $\lim\limits_{n\to\infty} S_n \neq 0$;

$\boxed{\text{(d)}}$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente se $\{S_n\}$ for limitada.

4) Com respeito à série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^p}{n^p}$ pode-se afirmar que:

(a) Ela converge absolutamente seja qual for o valor de p;

(b) Ela converge condicionalmente seja qual for o valor de p;

$\boxed{\text{(c)}}$ Ela converge absolutamente se $p > 1$;

(d) Ela converge condicionalmente se $p \leq 1$.

5) Se $0 < x < 1$, o valor da soma da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$ é:

(a) $\dfrac{x}{1-x}$ (b) $\dfrac{1}{1-x}$ (c) x $\boxed{\text{(d)}}$ $\dfrac{x}{(1-x)^2}$.

---

03. (2,0 pontos) Complete os espaços:

(a) Se (a_n) é uma seqüência monótona e limitada, então (a_n) é convergente.

(b) Se $\lim \sqrt{n}\, a_n = \infty$, então a série $\sum a_n$ é divergente.

(c) A série geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} (1-x)^{n-1}$ converge para $1/x$, se $0 < x < 2$.

(d) Se $\lim |a_{n+1}/a_n| < 1$, então a série $\sum a_n$ é absolutamente convergente.

(e) O Critério de Leibniz é aplicado com sucesso às séries do tipo $\sum (-1)^n b_n,\ b_n > 0$, sendo (b_n) uma seqüência monótona decrescente e convergindo para zero.

---

04. (2,0 pontos) Considere a seqüência $a_n = \dfrac{n}{(n+1)!}$.

(a) Mostre por indução que $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1 - \dfrac{1}{(n+1)!},\quad \forall n \in \mathbb{N}$.

(b) Calcule o valor da soma infinita $\sum_{n=3}^{\infty} \dfrac{n}{(n+1)!}$.

Solução:

(a) Passo 1: Para $n = 1$ a sentença é: $a_1 = 1 - \dfrac{1}{2!}$ que é claramente verdadeira.

Passo 2: Suponhamos que $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1 - \dfrac{1}{(n+1)!}$ e mostremos que

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} = 1 - \frac{1}{(n+2)!}.$$

De fato:

$$\begin{aligned}\underbrace{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} + a_{n+1} &= \underbrace{1 - \frac{1}{(n+1)!}} + \frac{n+1}{(n+2)!} = 1 - \left[\frac{n+1-1}{(n+2)!}\right] \\ &= 1 - \frac{1}{(n+2)!}.\end{aligned}$$

(b) No ítem (a) mostramos que $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1 - \dfrac{1}{(n+1)!}$ e, sendo assim:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = -a_1 - a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = -\frac{1}{2} - \frac{2}{6} + \lim S_n = \boxed{1/6}$$

---

05. (2,0 pontos) Use o critério especificado e investigue a convergência das séries:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n}{\sqrt[3]{n^3+1}}$ (Critério da Comparação)

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n}{n^2+3}$ (Critério de Leibniz)

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n}$ (Critério da Razão)

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\dfrac{3n}{2n+1}\right)$ (Critério do n-ésimo Termo)

Solução:

(a) $a_n = \dfrac{3n}{\sqrt[3]{n^3+1}} \geq \dfrac{3n}{\sqrt[3]{n^3+26n^3}} = \dfrac{3n}{\sqrt[3]{27n^3}} = 1 = b_n$. Como a série de prova $\sum b_n$ é divergente, então $\sum a_n$ diverge.

(b) Seja $b_n = \dfrac{n}{n^2+3}$. Então:

- $b_n > 0,\ \forall n$;
- $b_n = \dfrac{n}{n^2\left(1+3/n^2\right)} = \dfrac{1}{n\left(1+3/n^2\right)} \longrightarrow 0$, quando $n \to \infty$;
- (b_n) é decrescente, para $n > 3$. De fato, a função extensão $f(x) = \dfrac{x}{x^2+3}$ tem derivada $f'(x) = \dfrac{-x+3}{\left(x^2+3\right)^2} < 0$, para $x > 3$ e, portanto, (b_n) decresce a partir de $n = 3$.

Pelo Critério de Leibniz, a série alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ é convergente.

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{n!}\right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+1/n)^n} = \frac{1}{e} < 1.$

Pelo Critério da Razão a série $\sum a_n$ converge absolutamente.

(d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{3n}{2n+1}\right) = \ln(3/2) \neq 0$ e, sendo assim, a série $\sum a_n$ é divergente.