



UFPB - CCEN - Departamento de Matemática

SÉRIES & EDO - 08.2 prof. MPMatos

Exame N. 2 Gabarito

Prova 1

Dados preliminares que serão utilizados:

Tabela de Integrais:

$$(1) \int \sin nx dx = \frac{-\cos nx}{n} \quad (2) \int x \sin nx dx = \frac{\sin nx}{n^2} - \frac{x \cos nx}{n}$$
$$(3) \int \cos nx dx = \frac{\sin nx}{n} \quad (4) \int x \cos nx dx = \frac{\cos nx}{n^2} + \frac{x \sin nx}{n}$$

Valores particulares de sen e cos:

$$(1) \sin(2n-1)\pi/2 = (-1)^{n-1} \quad (2) \sin n\pi = 0$$
$$(3) \cos n\pi = (-1)^n \quad (4) \cos(2n-1)\pi/2 = 0$$

01. (2,0 pontos) Determine em que valores de x a série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n-1}}{n \ln n}$ é convergente e especifique onde a convergência é absoluta ou condicional.

Solução: O fundamento básico a ser usado é o Teste da Razão: a série converge absolutamente se $L < 1$ e diverge se $L > 1$.

Temos:

$$L = \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |x| \lim \left| \frac{n}{n+1} \cdot \frac{\ln n}{\ln(n+1)} \right| = |x| \lim \frac{n}{n+1} \cdot \lim \frac{n}{n+1} = |x|.$$

Se $|x| < 1$, isto é, $-1 < x < 1$, a série converge absolutamente e a série diverge quando $x < -1$ ou $x > 1$. Esta é a informação contida no Teste da Razão. A convergência da série nos pontos extremos $x = \pm 1$ será investigada em separado.

$x = -1$: neste caso a série é $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n \ln n}$ (divergente)

$x = 1$: neste caso a série é $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$ (condicionalmente convergente)

Conclusão: A série converge quando $-1 < x \leq 1$ e diverge caso contrário. A convergência é absoluta no intervalo $(-1, 1)$ e condicional em $x = 1$.

02. (4,0 pontos) Considere a função real $f(x) = \frac{x+2}{1-2x}$.

(a) Represente f em série de potências de $x+2$ e determine onde a representação é válida;

(b) Por derivação, obtenha uma série de potências para $g(x) = \frac{5}{(1-2x)^2}$;

(c) Se $0 < \theta < \pi/6$, justifique porquê $\frac{2+\sin\theta}{1-2\sin\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (2+\sin\theta)^{n+1}}{5^{n+1}}$;

(d) Use o resultado encontrado em (b) e calcule a soma da série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)4^n}{5^{n+1}}$.

Solução:

(a) Identifiquemos $f(x)$ com a soma de uma série geométrica de razão $r = \frac{2}{5}(x+2)$. De fato:

$$\begin{aligned} \frac{x+2}{1-2x} &= \frac{x+2}{1-2(x+2-2)} = \frac{x+2}{5-2(x+2)} = \frac{x+2}{5} \left[\frac{1}{1-\frac{2}{5}(x+2)} \right] = \\ &= \frac{x+2}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5} \right)^n (x+2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (x+2)^{n+1}}{5^{n+1}} \end{aligned}$$

e a série é convergente somente quando $\left| \frac{2}{5}(x+2) \right| < 1$, isto é, $-\frac{9}{2} < x < \frac{1}{2}$.

(b) Derivando a série obtida em (a), encontramos:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x+2}{1-2x} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (n+1) (x+2)^n}{5^{n+1}} \Rightarrow \frac{5}{(1-2x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (n+1) (x+2)^n}{5^{n+1}}, \quad (3.5)$$

representação válida no intervalo $-\frac{9}{2} < x < \frac{1}{2}$.

(c) Se $0 < \theta < \pi/6$, então $x = \sin\theta$ está entre 0 e 1/2 e, conseqüentemente, esse x se encontra no intervalo de convergência da série encontrada (a). Agora é só substituir na série x por $\sin\theta$.

(d) Considerando $x = 0$ em (3.5), encontramos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n (n+1)}{5^{n+1}} = \boxed{5}$$

03. (4,0 pontos) Considere a função $f(x) = x + \pi$, $-\pi < x < 0$.

(a) Esboce no intervalo $[-3\pi, 3\pi]$ o gráfico da *extensão ímpar* 2π -periódica $\tilde{f}_I$ de f ;

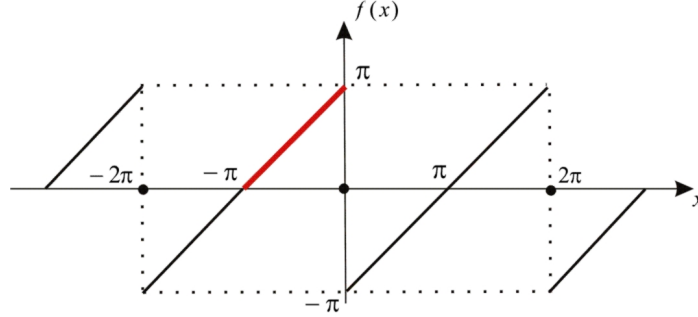
(b) Calcule o valor da expressão $\tilde{f}_I(-2\pi^-) + 3\tilde{f}_I(0^+) - 2\tilde{f}_I(2\pi^-) + \tilde{f}_I(3\pi^-)$.

(c) Determine a série de Fourier da extensão encontrada em (a);

(d) Calcule a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$.

Solução:

(a)



(b) Observando o gráfico concluímos que:

$$\tilde{f}_I(-2\pi^-) + 3\tilde{f}_I(0^+) - 2\tilde{f}_I(2\pi^-) + \tilde{f}_I(3\pi^-) = \pi - 3\pi - 2\pi + 0 = \boxed{-4\pi}$$

(c) A extensão $\tilde{f}_I$ é uma função ímpar e, sendo assim, sua série de Fourier é uma série de senos, isto é, $a_0 = 0$ e $a_n = 0$, $\forall n$. Os coeficientes b_n são calculados assim:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^0 (x + \pi) \sin nx dx = \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin nx}{n^2} - \frac{x \cos nx}{n} \right]_{-\pi}^0 - 2 \left[\frac{\cos nx}{n} \right]_{-\pi}^0 = -\frac{2}{\pi n} [\pi \cos n\pi] - \frac{2}{n} [1 - \cos n\pi] = -\frac{2}{n}. \end{aligned}$$

Logo, a série de Fourier de $\tilde{f}_I$ é:

$$-2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}. \quad (3.6)$$

(d) A série de Fourier (3.6) representa no intervalo $[-\pi, \pi]$ a extensão $\tilde{f}_I$ e considerando que essa extensão é contínua em $x = \pi/2$, obtemos:

$$-\pi/2 = \tilde{f}_I(\pi/2) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/2)}{n} \quad \therefore \quad \boxed{\pi/4 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}}$$