Exercícios Complementares 6.3

6.3A Usando a Definição 6.1.3 ou o Teorema 6.1.9, mostre que as funções dadas são soluções LI da *edo* indicada.

(a) $y_1(x) = \operatorname{sen} x,\ y_2(x) = \cos x;$ $\qquad y'' + y = 0;$

(b) $y_1(x) = -2,\ y_2(x) = \operatorname{sen} x,\ y_3(x) = 3\cos x;$ $\qquad y''' - y = 0;$

(c) $y_1(x) = e^x,\ y_2(x) = e^{-x},\ y_3(x) = \operatorname{sen} x,\ y_4(x) = \cos x;$ $\qquad y^{(4)} - y = 0;$

(d) $y_1(x) = e^x,\ y_2(x) = e^{2x},\ y_2(x) = e^{3x};$ $\qquad y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0.$

6.3B Encontre a solução geral das seguintes *edo*'s:

(a) $y'' - 3y' + 2y = 0$ (b) $y^{(4)} + 4y = 0$

(c) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$ (d) $8y'' + 4y' + y = 0$

(e) $y^{(4)} + 5y''' = 0$ (f) $y''' - 3y'' + 4y' - 2y = 0$

(g) $y''' - y'' - y' + y = 0$ (h) $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$

6.3C Em cada caso, verifique que as funções dadas são soluções LI da *edo* indicada e determine a solução geral.

(a) $y_1(x) = \cos x$ e $y_2(x) = \operatorname{sen} x;$ $\qquad y^{(4)} - 4y''' + 7y'' - 4y' + 6y = 0;$

(b) $y_1(x) = e^{2x}\cos x$ e $y_2(x) = e^{2x}\operatorname{sen} x;$ $\qquad y^{(4)} - 8y''' + 32y'' - 64y' + 64y = 0;$

(c) $y_1(x) = e^{x}\cos x$ e $y_2(x) = e^{x}\operatorname{sen} x;$ $\qquad y^{(4)} - 6y''' + 19y'' - 26y' + 18y = 0;$

(d) $y_1(x) = e^x$ e $y_2(x) = xe^{-x};$ $\qquad y^{(5)} - y^{(4)} - 2y''' + 2y'' + y' - y = 0;$

(e) $y_1(x) = e^x,\ y_2(x) = e^{-x}$ e $y_3(x) = e^{2x};$ $\qquad y^{(6)} - 5y^{(4)} + 16y''' + 36y'' - 16y' - 32y = 0.$

6.3D Qual a solução geral de uma *edo* linear homogênea com coeficientes constantes, cuja equação característica possui as seguintes raízes: $2, 2, 2, 3-4i, 3+4i, 3-4i, 3+4i, 3$ e 3? Qual é a *edo*?

6.3E Encontre a *edo* de segunda ordem com a seguinte família de curvas integrais:

(a) $y = C_1x + C_2x^2$ (b) $y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x}$ (c) $C_1e^x + C_2e^{2x}$.

6.3F Com o Método dos Coeficientes a Determinar (MCD), encontre a solução geral da *edo*.

(a) $y'' - y' - 2y = 4x^2$ (b) $y' - 5y = (x-1)\operatorname{sen} x + (x+1)\cos x$

(c) $y'' + 2y' + 2y = 1 + x^2$ (d) $y'' + 4y' + 8y = x + e^x$

(e) $y'' = 9x^2 + 2x - 1$ (f) $y'' - 3y' + 2y = e^x - 2e^{2x} + \operatorname{sen} x$

(g) $y''' - y'' - y' + y = x^2$ (h) $y' - 5y = x^2 e^x - xe^{5x}$

(i) $y' - y = 1 + xe^{2x}$ (j) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 2xe^{-x}$

(k) $y^{(4)} + 4y = x^2 - 3x + 2$ (l) $y''' - y = 3\operatorname{sen} x - \cos x$

6.3G Encontre a solução geral das seguintes equações de Euler-Cauchy:

(a) $4x^2y'' - 4xy' + 3y = \operatorname{sen}\ln(-x)\,,\ x < 0$ (b) $x^2y'' - 3xy' + 3y = 0$

(c) $x^2y'' - xy' + 2y = 1 + (\ln x)^2\,,\ x > 0$ (d) $x^2y'' - 3xy' + 3y = \ln x,\ x > 0$

(e) $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0$ (f) $x^2y'' - 6xy' = 0$

6.3H. Considere as funções $y_1(x) = x^m \operatorname{sen}\ln(x^n)$ e $y_2(x) = x^m \cos\ln(x^n)$, definidas para $x > 0$. Calcule o wronskiano $w(x)$ dessas funções e encontre uma *edo* do tipo Euler de segunda ordem possuindo y_1 e y_2 como soluções.

6.3I. Com o Método de Variação dos Parâmetros (MVP), encontre a solução geral da *edo*.

(a) $y'' - 2y' + y = x^{-1}e^x$ (b) $y' + \dfrac{4}{x}y = x^4$

(c) $y'' - 2y' + y = x^{-5}e^x$ (d) $y'' + 4y = \operatorname{sen}^2 2x$

(e) $y'' - 2y' + y = e^x + 2xe^x$ (f) $x^2y'' - 2y = (x-1)\,x^{-2}$

(g) $y''' + x^{-2}y' - x^{-3}y = x^{-2}\ln x$ (h) $y''' + y' = \sec x$.

6.3J Verifique que as funções $x_1(t) = t$ e $x_2(t) = 1 + t^2$ são soluções da *edo* homogênea:

$$\left(t^2 - 1\right)\ddot{x} - 2t\dot{x} + 2x = 0$$

e usando o MVP encontre a solução geral da *edo* não homogênea:

$$\left(t^2 - 1\right)\ddot{x} - 2t\dot{x} + 2x = \left(1 - t^2\right)^2.$$

6.3K Considere a *edo* não homogênea:

$$t^3\dddot{x} + 3t^2\ddot{x} = 1.$$

Verifique que as funções $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = t$ e $x_3(t) = 1/t$, $t > 0$, são soluções LI da *edo* homogênea associada e, usando o MVP, encontre a solução geral da *edo* não homogênea.

6.3L Qual a solução da equação de Euler-Cauchy $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$ que satisfaz às condições iniciais $y(1) = 1$ e $y'(1) = 4$?

6.3M Encontre a solução da *edo* $x^2y'' + xy' + y = \ln x$ que satisfaz às condições $y(1) = 0$ e $y'(1) = 2$.

6.3N Mostre que as funções $\operatorname{sen} x^2$ e $\cos x^2$ são soluções LI da *edo* $xy'' - y' + 4x^3y = 0$, embora o wronskiano seja nulo em $x = 0$. Por que isso não contradiz os fatos teóricos (Observação 6.1.10)?

6.3O Verifique que no intervalo $]0, \infty[$ as funções $y_1(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ e $y_2(x) = \cos(1/x)$ são soluções LI da *edo* $x^4y'' + 2x^3y' + y = 0$ e encontre a solução que satisfaz às condições $y(1/\pi) = 1$ e $y'(1/\pi) = -1$.

6.3P Considere a *edo*:

$$y'' + a(x)\, y = b(x),$$

sendo $a(x)$ e $b(x)$ funções deriváveis. Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções LI da *edo* homogênea associada, mostre que a solução geral da *edo* não homogênea vem dada por:

$$y(x) = -y_1(x) \int y_2(x)\, b(x)\, dx + y_2(x) \int y_1(x)\, b(x)\, dx.$$

6.3Q Considere a *edo* de segunda ordem:

$$y'' + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = b(x),$$

com $a_0(x)$, $a_1(x)$ e $b(x)$ contínuas. Se $\varphi(x)$ é uma solução não nula da *edo* homogênea associada, mostre que a substituição $y = \varphi z$ leva a *edo* à forma:

$$\frac{d}{dx}\left(\varphi^2 z'\right) + a_1\left(\varphi^2 z'\right) = \varphi b,$$

que possui fator integrante $I = \exp\left(\int a_1(x)\, dx\right)$.

6.3R Usando o método descrito no exercício precedente com $\varphi(x) = x$ ou $\varphi(x) = e^x$, determine a solução geral das seguintes *edo*'s:

(a) $xy'' - (x+3)\, y' + 3y = x$ (b) $(1-x)\, y'' + xy' - y = (1-x)^2$

(c) $\left(1+x^2\right) y'' - 2xy' + 2y = 0$ (d) $xy'' - (2x+1)\, y' + (x+1)\, y = 0$.

Exercícios Complementares 7.4

7.4A Com auxílio do Método da Série de Taylor, encontre a solução em série de potências de cada PVI dado a seguir:

(a) $y' = x^2 + y^2, \;\; y(0) = 1$ (b) $y' = \operatorname{sen}\left(x^2 + y\right), \; y(0) = \pi/2$

(c) $y' = x + \operatorname{sen}(xy), \; y(0) = 1$ (d) $y' = xy^2 + 1, \; y(1) = 1$

7.4B Considere o mesmo exercício precedente para os p.v.i de segunda ordem:

(a) $\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 1, \;\; y'(0) = 1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y'' = x^2 - y^2 \\ y(0) = 1, \; y'(0) = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} y'' - 2xy' + 6y = 0 \\ y(0) = -1, \;\; y'(0) = 0 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} y'' - 2xy' + x^2y = 0 \\ y(0) = 1, \;\; y'(0) = -1 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} y'' - 2xy' = x^2 \\ y(1) = 0, \;\; y'(1) = 1 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} y'' + 2xy' + y = 0 \\ y(0) = 0, \;\; y'(0) = 1. \end{cases}$

Exercícios Complementares 8.4

8.4A Escreva cada *edo* abaixo como um sistema de primeira ordem:.

(a) $\ddot{x} - 2\dot{x} + x = t$ (b) $2\ddot{x} - 2t^2\dot{x} + x = 4te^t$ (d) $-\ddot{x} - 2\dot{x} + e^t x = t^2$

8.4B Repita o exercício precedente com a *edo* de 3^a ordem $\dddot{x} - 2\ddot{x} + e^t x = t$

8.4C Encontre a solução geral dos seguintes sistemas:

(a) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -2x_1 + 3x_2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 + 4x_2 \\ \dot{x}_2 = -2x_1 + 3x_2 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 - 2x_3 \\ \dot{x}_2 = 3x_2 - 2x_3 \\ \dot{x}_3 = 3x_1 + x_2 - 3x_3 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - x_2 \\ \dot{x}_3 = x_1 - x_2 + x_3 \end{cases}$

Respostas e Sugestões

Exercícios 6.3

6.3B

(a) $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$

(b) $y = (C_1e^x + C_2e^{-x})\operatorname{sen} x + (C_3e^x + C_4e^{-x})\cos x$

(c) $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3e^{3x}$

(d) $y = e^{-x/4}\left[C_1\cos(x/4) + C_2\operatorname{sen}(x/4)\right]$

(e) $y = (C_1 + C_2\cos x + C_3\operatorname{sen} x)\,e^x$

(f) $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4e^{-5x}$

(g) $y = C_1e^{-x} + C_2e^x + C_3xe^x$

(h) $y = C_1\cos x + C_2\operatorname{sen} x + x\,(C_3\cos x + C_4\operatorname{sen} x)$

6.3C

(a) $y = \left(C_1\cos\sqrt{2}x + C_2\operatorname{sen}\sqrt{2}x\right)e^{2x} + C_3\cos x + C_4\operatorname{sen} x$

(b) $y = (C_1\cos 2x + C_2\operatorname{sen} 2x)e^{2x} + (C_3\cos 2x + C_4\operatorname{sen} 2x)xe^{2x}$

(c) $y = (C_1\cos x + C_2\operatorname{sen} x)\,e^x + \left(C_3\cos\sqrt{5}x + C_4\operatorname{sen}\sqrt{5}x\right)e^{2x}$

(d) $y = (C_1 + C_2x + C_3x^2)e^x + (C_4 + C_5x)\,e^{-x}$

(e) $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + (C_3 + C_4x)\,e^{-2x} + (C_5\cos 2x + C_6\operatorname{sen} 2x)\,e^{2x}$

6.3D

$y = \left(C_1 + C_2x + C_3x^2\right)e^{2x} + (C_4 + C_5x + C_6\cos 4x + C_7\operatorname{sen} 4x + C_8x\cos 4x + C_9x\operatorname{sen} 4x)\,e^{3x}.$

6.3E (a) $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$ (b) $y'' + 2y' + y = 0$ (c) $y'' - 3y' + 2y = 0$

6.3F

(a) $y = C_1e^{-x} + C_2e^{2x} - 2x^2 + 2x - 3$

(b) $y = \dfrac{71 - 52x}{338}\operatorname{sen} x - \dfrac{69 + 78x}{338}\cos x + C_1e^{5x}$

(c) $y = (C_1\cos x + C_2\operatorname{sen} x)\,e^{-x} + \dfrac{x^2}{2} - x + 1$

(d) $y = (C_1\cos 2x + C_2\operatorname{sen} 2x)e^{-2x} + \dfrac{1}{16} + \dfrac{x}{8} + \dfrac{e^x}{13}$

(e) $y = C_1 + C_2x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{3x^4}{4}$

(f) $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + \frac{1}{10}\operatorname{sen} x + \frac{3}{10}\cos x - xe^x - 2xe^{2x}$

(g)$y = C_1e^{-x} + C_2e^x + C_3xe^x + x^2 + 2x + 4$

(h) $y = -\frac{1}{2}x^2e^{5x} - \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\right)e^x + C_1e^{5x}$

(i) $y = -1 - e^{2x} + xe^{2x} + C_1e^x$

(j) $y = -\frac{1}{12}xe^{-x} - \frac{13}{144}e^{-x} + C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3e^{3x}$

(k) $y = (C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x)e^x + (C_3 \cos x + C_4 \operatorname{sen} x)e^{-x} + \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{3x}{4} + \dfrac{1}{2}$

(l) $y = C_1e^x + e^{-x/2}\left[C_2 \cos \frac{\sqrt{3}x}{2} + \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}x}{2}\right] - \operatorname{sen} x + 2\cos x + .$

6.2G

(a) $y = C_1(-x)^{3/2} + C_2(-x)^{1/2} - \frac{1}{65}\operatorname{sen}\ln(-x) + \frac{8}{65}\cos\ln(-x)$

(b) $y = 1 + \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2 + x(C_1 \cos\ln x + C_2 \operatorname{sen}\ln x)$

(c) $y = \frac{4}{9} + \frac{1}{3}\ln x + C_1x + C_2x^3$ (d) $y = C_1x + C_2x^3$

(e) $y = C_1x + C_2x^2 + C_3x^3$ (f) $y = C_1 + C_2x^7$

6.2H $w(x) = -nx^{2m-1};\ x^2y'' + (1-2m)xy' + \left(m^2+n^2\right)y = 0.$

6.2I

(a) $y = C_1e^x + xe^x\ln|x| + C_2xe^x$

(b) $y = C_1x^{-4} + \frac{1}{9}x^5$

(c) $y = C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x - \cos x \ln|\sec x + \operatorname{tg} x|$

(d) $y = \frac{1}{12}\left(1 + \cos^2 2x\right) + C_1\cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x$

(e) $y = \frac{1}{2}x^2e^x + \frac{1}{3}x^3e^x + C_1e^x + C_2xe^x$

(f) $y = C_1x^{-1} + C_2x^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}x^{-2} + x^{-1}\ln x\right)$

6.3I

(g) $y = C_1x + (x\ln x)\left[C_2 + C_3\ln x + \frac{1}{24}(\ln x)^3\right]$

(h) $y = C_1 + C_2 \operatorname{sen} x + C_3\cos x + \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| - x - \ln|\cos x|$

6.3J $x(t) = C_1t + C_2\left(1+t^2\right) + t^4/6 - t^2/2.$

6.3K. $x(t) = C_1 + C_2t + C_3/t + \frac{t}{2}\ln t - \frac{1}{2}\ln t - t/2 + 1/2$

6.3L $y = 3x^2 - 2x.$ **6.3M** $y = \operatorname{sen}\ln x + \ln x.$ **6.3N** Porque $x = 0$ é um ponto singular.

6.3O $y(x) = \left(1/\pi^2\right)\operatorname{sen}(1/x) - \cos(1/x).$

6.3R (a) $y = C_1x + C_2\left(x^3 + 3x^2 + 6x + 6\right) + x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 24x + 24$

(b) $y = 1 + x + x^2 + C_1x + C_2e^x$ (c) $y = C_1x + C_2\left(x^2 - 1\right)$ (d) $y = e^x\left(C_1 + C_2x^2\right).$

Exercícios 7.4

7.4A

(a) $y(x) = 1 + x + x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{7}{6}x^4 + \cdots$

(b) $y(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 - \frac{6}{4!}x^4 + \cdots$

(c) $y(x) = 1 + x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \cdots$

(d) $y(x) = 1 + \frac{2}{1!}(x-1) + \frac{5}{2!}(x-1)^2 + \frac{22}{3!}(x-1)^3 + \cdots$

7.4B

(a) $y(x) = 1 + (x-1) - \frac{1}{2!}(x-1)^2 - \frac{1}{3!}(x-1)^3 + \frac{1}{4!}(x-1)^4 + \cdots$

(b) $y(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{2}{4!}x^4 + \cdots$

(c) $y(x) = -1 + \frac{6}{2!}x^2 - \frac{12}{4!}x^4 + \cdots$

(d) $y(x) = 1 - x - \frac{2}{3!}x^3 - \frac{2}{4!}x^4 + \cdots$

(e) $y(x) = (x-1) + \frac{3}{2!}(x-1)^2 + \frac{10}{3!}(x-1)^3 + \frac{34}{4!}(x-1)^4 + \cdots$

(f) $y(x) = x - \frac{3}{3!}x^3 + \frac{4}{5!}x^5 - \frac{231}{7!}x^7 + \cdots$

Exercícios 8.4

8.4A

(a) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 2x_2 + t \end{cases}$ (b) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + t^2 x_2 + 2te^t \end{cases}$ (c) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = e^t x_1 - 2x_2 - t^2 \end{cases}$

8.4B $\dot{x}_1 = x_2$; $\dot{x}_2 = x_3$; $\dot{x}_3 = e^t x_1 + 2x_2 + t$

8.4C A solução geral do sistema é obtida como combinação linear das colunas da Matriz Solução $\exp(tA)$.

(a) $\begin{cases} x_1(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t} \\ x_2(t) = C_1 e^t + 2C_2 e^{2t} \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x_1(t) = C_1 e^t + 2C_2 e^{-t} \\ x_2(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} \end{cases}$

(c) $\begin{bmatrix} -e^{2t} + 3e^t - e^{-t} & e^{2t} - e^t & -e^t + e^{-t} \\ -2e^{2t} + 3e^t - e^{-t} & 2e^{2t} - e^t & -e^t + e^{-t} \\ -e^{2t} + 3e^t - 2e^{-t} & e^{2t} - e^t & -e^t + 2e^{-t} \end{bmatrix}$ (d) $e^t \begin{bmatrix} (2t+1) & \left(-t^2 - 3t\right) & 2\left(t^2 + t\right) \\ 2t & \left(-t^2 - 2t + 1\right) & 2t^2 \\ t & \left(-t^2/2 - t\right) & \left(t^2 + 1\right) \end{bmatrix}.$