

SEÇÃO 1.2

1. Vamos provar apenas os itens (a) e (e): (a) Suponhamos que exista outro vetor $0' \in V$ tal que $u + 0' = u$, para todo $u \in V$. Então, pelo axioma V_3 , obtemos

$$0 = 0 + 0' = 0'.$$

(e) Pelo axioma V_3 , $u + 0 = u$, para todo $u \in V$. Em particular, $0 + 0 = 0$. Logo, pelos axiomas V_6 e V_9 , obtemos

$$a0 = a(0 + 0) = a0 + a0.$$

Portanto, pelo item (a), $a0 = 0$.

2. É fácil verificar que $\mathbb{C}$ munido com as operações

$$\begin{aligned} + : \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} & \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (z, w) &\longmapsto z + w & (a, z) &\longmapsto a \cdot z \end{aligned}$$

satisfaz o sistema de axiomas $\mathcal{V}$, pois $\mathbb{R}$ é um subcorpo de $\mathbb{C}$ e essas operações já existem de modo natural em $\mathbb{C}$.

3. Vamos provar apenas o item (c). É claro que $x_0 = a^{-1} \cdot b$ é uma solução da equação $a \cdot x = b$, pois pelos axiomas G_2 , G_4 e G_3 , obtemos

$$a \cdot x_0 = a \cdot (a^{-1} \cdot b) = (a \cdot a^{-1}) \cdot b = e \cdot b = b.$$

Agora, se x_1 é outra solução da equação $a \cdot x = b$, então, pelos axiomas G_3 , G_4 e G_2 , obtemos

$$x_1 = e \cdot x_1 = (a^{-1} \cdot a) \cdot x_1 = a^{-1} \cdot (a \cdot x_1) = a^{-1} \cdot b = x_0.$$

4. Dados $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$. Então, pelo Teorema de Binet-Cauchy, obtemos

$$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B}) \neq 0.$$

Logo, $\mathbf{AB} \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$, isto é, o produto usual de matrizes satisfaz o axioma G_1 . É claro que essa operação satisfaz o axioma G_2 e a matriz

CAPÍTULO 1. O MÉTODO AXIOMÁTICO

Dado $x \in J$, existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $x \in I_\lambda$. Como I_λ é um intervalo aberto temos que existe $\epsilon > 0$ tal que

$$x \in (x - \epsilon, x + \epsilon) \subseteq I_\lambda.$$

Portanto,

$$x \in (x - \epsilon, x + \epsilon) \subseteq I_\lambda \subseteq J$$

e $J \in \mathcal{T}$. Finalmente, dados intervalos abertos I_1 e I_2 de $\mathcal{I}$. Então devemos provar que $I_1 \cap I_2$ é um intervalo aberto. Dado $x \in I_1 \cap I_2$, obtemos $x \in I_1$ e $x \in I_2$. Assim, existem $\epsilon_1 > 0$ e $\epsilon_2 > 0$ tais que

$$x \in (x - \epsilon_1, x + \epsilon_1) \subseteq I_1 \text{ e } x \in (x - \epsilon_2, x + \epsilon_2) \subseteq I_2.$$

Pondo $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$, obtemos

$$x \in (x - \epsilon, x + \epsilon) \subseteq I_1 \cap I_2.$$

Portanto, $I_1 \cap I_2 \in \mathcal{T}$, ou seja, $\mathcal{I}$ é um modelo para $\mathcal{T}$.

- (b) Verificação direta de união e interseção de conjuntos.
- (c) Sim, pois o item (a) ou (b) é um modelo.
- (d) Não, os modelos $M(\mathcal{I})$ e $M(\mathcal{B})$ não são isomorfos.

Vamos provar apenas o item (e). Não, pois se A_9 é o axioma:

$$“a \cdot b = b \cdot a, \quad \forall \quad a, b \in A”,$$

então $\mathcal{A} + A_9$ e $\mathcal{A} + (\sim A_9)$ são satisfatórios, um vez que, o primeiro admite a interpretação do item (a) e o segundo admite a interpretação do item (b).

(e) Vamos provar apenas que o axioma R_1 é independente. Seja R_4 o axioma: “existe $x \in X$ tal que x não está relacionado com x , isto é, $\mathcal{R}(x, x) = 0$.” Então $R_4 = \sim R_1$ e $(\mathcal{R} - R_1) + R_4$ é um sistema de axiomas satisfatório, pois o conjunto $X = \{1, 2, 3\}$, com a relação binária

$$\mathcal{R}_1 = \{(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2)\},$$

é uma interpretação para $(\mathcal{R} - R_1) + R_4$. Portanto, $(\mathcal{R} - R_1) + R_4$ é satisfatório e R_1 é independente em $\mathcal{R}$.

(e) Vamos provar apenas que o axioma P_2 é independente. Seja P_4 o axioma: “existem $x, y \in X$ tais que $x\mathcal{P}y$ e $y\mathcal{P}x$, mas $x \neq y$.” Então $P_4 = \sim P_2$ e $(\mathcal{P} - P_2) + P_4$ é um sistema de axiomas satisfatório, pois o conjunto $X = \mathbb{Z}$, com a relação binária

$$x\mathcal{P}y \Leftrightarrow x \text{ é um múltiplo de } y \text{ ou } y \text{ é um divisor de } x,$$

é uma interpretação para $(\mathcal{P} - P_2) + P_4$. Portanto, $(\mathcal{P} - P_2) + P_4$ é satisfatório e P_2 é independente em $\mathcal{P}$.

Vamos provar apenas o item (e). Se $x \prec y$ e $y \prec x$, então pelo axioma S_3 , obtemos $x \prec x$, o que impossível.

(a) Seja $\mathcal{I}$ o conjunto de todos os intervalos abertos de $\mathbb{R}$. É claro que $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{I}$. Seja

$$J = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$$

uma união qualquer de intervalos abertos de $\mathcal{I}$. Então devemos provar que J é um intervalo aberto, ou seja, dado $x \in J$, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$x \in (x - \epsilon, x + \epsilon) \subset J.$$

2. (a) Use o mesmo argumento do Exemplo 1.28 para provar que o axioma V_5 não é independente.

(b) Seja V_{11} o axioma: “existe $u \in V$ tal que $1 \cdot u \neq u$.” Então $V_{11} = \sim V_{10}$ e $(\mathcal{V} - V_{10}) + V_{11}$ é um sistema de axiomas satisfatório. De fato, o conjunto $V = \mathbb{R}^2$ munido com as operações de adição e multiplicação por escalar

$$u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \text{ e } a \cdot u = (ax_1, 0),$$

onde $u = (x_1, x_2), v = (y_1, y_2) \in V$ e $a \in \mathbb{R}$, é uma interpretação para $(\mathcal{V} - V_{10}) + V_{11}$. Portanto, $(\mathcal{V} - V_{10}) + V_{11}$ é satisfatório e V_{10} é independente em $\mathcal{V}$.

3. (a) É fácil verificar que $\mathbb{R}^*$ munido com a operação binária

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* &\longrightarrow \mathbb{R}^* \\ (a, b) &\longmapsto a \cdot b \end{aligned}$$

satisfaz o sistema de axiomas $\mathcal{G}$.

- (b) Novamente, é fácil verificar que $\mathbb{Q}$ munido com a operação binária

$$\begin{aligned} + : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} &\longrightarrow \mathbb{Q} \\ (a, b) &\longmapsto a + b \end{aligned}$$

satisfaz o sistema de axiomas $\mathcal{G}$.

- (c) O sistema de axiomas $\mathcal{G}$ é consistente, pois o item (a) ou (b) serve como uma interpretação para $\mathcal{G}$.

- (d) Não, os modelos $M(\mathbb{R}^*)$ e $M(\mathbb{Q})$ não são isomorfos.

(e) Vamos provar apenas que o axioma G_4 é independente. Seja G_5 o axioma: “para cada $a \in G$, $a \neq e$, não existe $a^{-1} \in G$ tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$.” Então $G_5 = (\sim G_4)$ e $(\mathcal{G} - G_4) + G_5$ é um sistema de axiomas satisfatório, pois o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}^*$, com a operação usual de multiplicação, é uma interpretação para $(\mathcal{G} - G_4) + G_5$. Portanto, $(\mathcal{G} - G_4) + G_5$ é satisfatório e G_4 é independente em $\mathcal{G}$.

identidade $\mathbf{I}_2$ satisfaz o axioma G_3 . Se $\mathbf{A} \in M_2(\mathbb{R})$ é tal que $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, então, com alguns cálculos, obtemos

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix},$$

em que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Como

$$\det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \neq 0$$

temos que

$$\mathbf{A}^{-1} \in \text{GL}_2(\mathbb{R}) \text{ e } \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}_2,$$

ou seja, $\text{GL}_2(\mathbb{R})$ satisfaz o axioma G_4 .

SEÇÃO 1.3

- l. Seja F_{13} o axioma: “ K possui no máximo dois elementos.” Então $F_{13} = \sim F_9$ e $(\mathcal{F} - F_9) + F_{13}$ é um sistema de axiomas satisfatório. De fato, o conjunto $K = \{0, 1\}$ munido com as operações binárias dadas pelas tábuas:

$\oplus$	0	1		$\cdot$	0	1
0	0	1	e	0	0	0
1	1	0		1	0	1

é uma interpretação para $(\mathcal{F} - F_9) + F_{13}$. Portanto, $(\mathcal{F} - F_9) + F_{13}$ é satisfatório e F_9 é independente em $\mathcal{F}$. Note que para provar que K satisfaz a maioria dos os axiomas de $\mathcal{F}$, basta verificar que a função $f: \mathbb{Z} \rightarrow K$ definida como

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ par} \\ 1, & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$$

é sobrejetora e satisfaz as propriedades

$$f(m+n) = f(m) \oplus f(n) \text{ e } f(mn) = f(m) \cdot f(n).$$