Universidade Federal da Paraiba | Turno: Manhã
Centro de Ciências Exatas e da Natureza | Data: 11/07/2008
Departamento de Matemática
Disciplina: Introdução à Matemática Aplicada
Professor: Milton

2^a Lista de Exercícios

1. A equação
$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0$$
onde λ é uma constante, é a equação de Hermite.(a) Achar os quatro primeiros termos de duas soluções linearmente independentes, em torno de $x = 0$.(b) Observar que se λ for um inteiro par, não-negativo, então uma ou outra das soluções em série infinita termina e se torna um polinômio. Achar a solução polinomial para $\lambda = 0, 2, 4, 6, 8$ e 10.(c) O polinômio de Hermite $H_n(x)$ se define como a solução polinomial da equação de Hermite, com $\lambda = 2n$, para a qual o coeficiente de x^n é 2^n.Achar $H_0(x), \cdots, H_5(x)$.

2. Nos problemas abaixo determinar a solução geral da equação diferencial dada em torno do ponto singular regular.

   (a) $x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$; (b) $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$; (c) $x^2y'' + 3xy' + 5y = 0$.

3. Considere a equação diferencial abaixo, determinar a equação indicial, a relação de recorrência e as raizes da equação indicial. Achar a solução em série $(x > 0)$ correspondente a menor e a maior raiz.
$$x^2y'' + xy' + (x - 2)y = 0.$$

4. Nos problemas abaixo, mostrar que a equação diferencial dada tem um ponto singular em $x = 0$ e determinar duas soluções linearmente independentes para $x > 0$.

   (a) $x^2y'' + 3xy' + (1 + x)y = 0$; (b) $xy'' + y = 0$.

5. Exprima a solução geral de cada uma das seguintes equações como uma série de potências em torno do ponto $x = 0$.
   1. $y'' - 3xy = 0$. 2. $y'' - 3xy' - y = 0$.
   3. $(x^2 + 1)y'' - 6y = 0$. 4. $(x^2 + 1)y'' - 8xy' + 15y = 0$.

6. Ache os primeiros quatro termos não nulos da expressão em série da solução de cada um dos seguintes problemas com condição inicial, e determine um intervalo (minimal) de convergência para a série.
   1. $y'' + (\text{sen}x)y = 0;$ 2. $2y'' - xy = \cos x;$
   $y(0) = 1, y'(0) = 0.$ $y(0) = 0, y'(0) = 1.$
   3. $(x + 1)y'' + y' + xy = 0;$ 4. $(\cos x)y'' + 2xe^x y = 0;$
   $y(0) = y'(0) = -1.$ $y(0) = 0, y'(0) = 1.$

7. Ache e classifique todos os pontos singulares para as equações nos problemas abaixo.
   1. $x^3(x^2 - 1)y'' - x(x + 1)y' - (x - 1)y = 0.$
   2. $(3x - 2)^2 xy'' + xy' - y = 0.$
   3. $(x^4 - 1)y'' + xy' = 0.$
   4. $(x + 1)^4(x - 1)^2 y'' - (x + 1)^3 y' + y = 0.$
   5. $x^3(x + 1)^2 y'' + (x - 1)y' + 2xy = 0.$

8. Ache a equação indicial associada com o ponto singular regular em $x = 0$ para cada uma das seguintes equações:
   (a) $x^2y'' + xy' - y = 0.$
   (b) $x^2y'' - 2x(x + 1)y' + (x - 1)y = 0.$
   (c) $x^2y'' - 2xy' + y = 0.$
   (d) $x^2y'' - xy' + (x^2 - \lambda^2)y = 0.$
   (e) $xy'' + (1 - x)y' + \lambda y = 0.$

9. Nos problemas abaixo mostrar que a equação diferencial dada tem um ponto singular regular em $x = 0$ e determinar duas soluções linearmente independentes para $x > 0$:

   (a) $x^2y'' + 2xy' + xy = 0,$

   (b) $x^2y'' + xy' + 2xy = 0,$

(c) $x^2y'' + 3xy' + (1 + x)y = 0$,

(d) $x^2y'' + 4xy' + (2 + x)y = 0$.

10. Achar duas soluções linearmente independentes da Equação de Bessel de ordem 3/2.
$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{9}{4})y = 0.$$

11. Use método de Frobenius para resolver as equações diferenciais abaixo, encontrando as duas soluções linearmente independentes do problema em questão. Procure identificar, se possível, a função que representa as séries de potências obtidas na solução da equação diferencial.

    (a) $x^2y'' + 4xy' + (x^2 + 2)y = 0$,

    (b) $y'' + xy' + (1 - 2x^{-2})y = 0$,

    (c) $xy'' + 3y' + 4x^3y = 0$,

    (d) $x^2y'' - 5xy' + 9y = 0$,

    (e) $xy'' + y' - xy = 0$,

    (f) $x^2y'' + xy' - 4y = 0$,

    (g) $x^2y'' + 6xy' + (6 - 4x^2)y = 0$,

    (h) $xy'' + (1 - 2x)y' + (x - 1)y = 0$.

12. Considerar a equação diferencial
$$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0.$$
Substituir $y(x) = u(x)v(x)$ e determinar v de tal modo que a equação diferencial de segunda ordem resultante não envolva u'.

13. Mostrar que para a equação de Bessel a substituição do problema 12 é $y = ux^{-1/2}$ e fornece
$$x^2u'' + (x^2 + \frac{1}{4} - \nu^2)u = 0. \tag{1}$$

14. Empregando (1) determinar uma solução geral da equação de Bessel com $\nu = 1/2$.

15. Empregando as substituições indicadas, determinar uma solução geral das equações diferenciais abaixo:

(a) $xy'' + y' + xy = 0,$

(b) $4xy'' + 4y' + y = 0, \quad (\sqrt{x} = z)$

(c) $xy'' + 3y' + xy = 0, \quad (y = u/x)$

(d) $xy'' + 5y' + xy = 0, \quad (y = u/x^2)$

(e) $xy'' - y' + xy = 0, \quad (y = ux).$