

Introdução à Matemática Aplicada

Milton de Lacerda Oliveira

6 de dezembro de 2018

Sumário

Prefácio	5
1 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS	6
1.1 Introdução	6
1.2 Equações Diferenciais de 1ª ordem	6
1.3 Equações Diferenciais de 2ª Ordem	8
1.4 Soluções Fundamentais	9
1.5 Equações diferenciais com coeficientes constantes	9
1.6 Exercícios	12
2 TRANSFORMADA DE LAPLACE	14
2.1 Introdução	14
2.2 Transformada de Laplace	16
2.3 A Transformada de Laplace como Aplicação Linear	19
2.4 A função Gamma	21
2.5 Função Degrau	23
2.6 Transformada de Laplace para Integrais	29
2.7 Funções Impulso	30
2.8 Integral de Convolução	33
2.9 Exercícios	39
3 Soluções por Séries de Eq. Dif. de 2ª ordem	42
3.1 Introdução	42
3.2 Séries de Potências	43
3.3 Soluções por série próximo a um ponto ordinário	45
3.4 Equação de Euler	49
3.5 Pontos singulares	51
3.6 Método de Frobenius	53
3.7 Equação de Bessel de Primeira Espécie	64
3.8 Propriedades da Função de Bessel de 1ª Espécie	67
3.9 Equação de Bessel de ordem zero	67

3.10 Exercícios	70
4 Problema de Sturm Liouville	72
4.1 Sturm-Liouville	72
4.2 Exercícios	75
5 Séries de Fourier	77
5.1 Introdução	77
5.2 Funções Periódicas	77
5.3 Coeficientes de Fourier	79
5.4 Série de Fourier	81
5.5 Séries de Fourier de funções pares e ímpares	85
5.6 Cálculo de Algumas Séries de Fourier	87
5.7 Equação da Onda	92
5.7.1 Energia da corda vibrante	96
5.8 Equação do Calor	97
5.8.1 Unicidade de solução para a equação do calor	102
5.9 Equação de Laplace	104
5.9.1 Problema de Dirichlet	104
5.9.2 Laplaciano em coordenadas polares	105
5.9.3 Problema de Dirichlet para a equação de Laplace	107
5.9.4 Problema de Dirichlet no retângulo	109
5.10 Exercícios	113
6 Cálculo Variacional	117
6.1 Introdução	117
6.2 Funcionais de funções de uma variável	121
6.3 Operador Variacional	125
6.4 Funcionais de funções de várias variáveis	126
6.5 Diversas funções de uma variável	128
6.6 Problemas com vínculos: Multiplicadores de Lagrange	130
6.7 Problemas da física-matemática	133
6.8 Exercícios	136
A Séries e Sequências de Funções	140
A.1 Convergência simples e convergência uniforme.	140
A.2 Séries de Funções	143
A.3 Convergência uniforme das séries de potências e o Teorema de Abel	146
A.4 Teste de Abel e de Dirichlet	147
A.5 Convergência Uniforme e Integração	149

A.6	Convergência Uniforme e Derivação	151
A.7	O Teorema de Arzelá-Ascoli	153

Prefácio

Temos ministrado a matéria de Matemática Aplicada por vários anos na Universidade Federal de Campina Grande e na Universidade Federal da Paraíba. E como usamos vários livros para abordar toda a ementa da disciplina, sentimos a necessidade de colocar numa única literatura todo o assunto estudado nessa disciplina. Este livro visa alcançar todos os alunos do curso do Bacharelado e Licenciatura em Matemática, e também alunos da Física e das Engenharias de várias Universidades no País. Ele fala de forma clara e objetiva sobre o desenvolvimento de técnicas de resolução de Equações Diferenciais ordinárias e parciais e também do Cálculo Variacional. As principais técnicas usadas aqui são as transformadas de Laplace, soluções por série de equações diferenciais ordinárias, o método de Fourier para resolver Equações Diferenciais Parciais e as de extremização de funcionais. Além disso, na parte final do livro, fazemos uma abordagem da Análise real, principalmente no que concerne a convergência uniforme de sequências e séries de funções. Essencialmente o curso de Matemática Aplicada começa com o estudo da Transformada de Laplace vai até o estudo das Equações diferenciais parciais e finaliza com o cálculo variacional. Para o aluno que já tenha tido a noção de Equações diferenciais lineares não há a necessidade de se estudar o primeiro capítulo desse livro, começando o seu estudo a partir do segundo capítulo, sem que haja perda do conteúdo a ser estudado. Porém aconselhamos esses alunos que façam uma leitura rápida do primeiro capítulo, para que se lembrem do que já estudaram. Para os alunos que nunca estudaram equações diferenciais lineares é importante a leitura minuciosa do primeiro capítulo. Para o estudo do cálculo variacional o leitor deve ter uma noção do cálculo diferencial e integral de várias variáveis.

Esse livro se divide em seis capítulos, que são distribuídos como segue: O primeiro capítulo é uma introdução rápida às equações diferenciais lineares, o segundo capítulo estuda a Transformada de Laplace e suas aplicações em equações diferenciais, o terceiro capítulo faz um estudo das soluções por séries de potências de equações diferenciais em torno de pontos regulares e singulares, o quarto capítulo estuda o problema de Sturm-Liouville, o quinto capítulo mostra o estudo das séries de Fourier como aplicação para resolução das equações da Física-Matemática, que são as equações de Onda, Calor e de Laplace, e finalmente, o sexto capítulo trata do estudo do cálculo variacional, ou seja, trataremos do estudo de extremização de funcionais e faremos aplicações nas áreas de física-matemática. No apêndice, damos uma noção de Análise real, principalmente no estudo de sequências e séries de funções e também apresentamos o importante Teorema de Arzelá-Ascoli.

Capítulo 1

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

1.1 Introdução

Este primeiro capítulo é uma revisão das equações diferenciais lineares de 1ª e 2ª ordem, oferecemos aqui uma noção do que seja uma equação diferencial e algumas técnicas para resolver alguns problemas simples.

1.2 Equações Diferenciais de 1ª ordem

Uma equação diferencial ordinária de 1ª ordem é uma equação do tipo

$$y' = f(x, y) \quad (2.1)$$

onde $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, é uma função dada, com $\Omega \subset (a, b) \times \mathbb{R}$ sendo um conjunto aberto; x é uma variável independente, pertencente ao intervalo (a, b) , com a, b números reais $a < b$; e $y = y(x)$ é a variável que depende de x , e, portanto, podemos pensar nela como uma função diferenciável $y : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, que quando satisfaz a equação (2.1) dizemos que ela é a *solução* desta equação diferencial, entenda $y' = \frac{dy}{dx}$. Podemos impor uma condição inicial para essa equação, qual seja,

$$y(x_0) = y_0 \quad (2.2)$$

Quando consideramos a equação diferencial (2.1) junto com a condição inicial (2.2) então dizemos que se trata um problema de Cauchy. Condições são colocadas sobre a função f de modo que o problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y), & x \in (a, b) \\ y(x_0) = y_0, & x_0 \in (a, b), y_0 \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (2.3)$$

tenha uma única solução. Vamos supor sempre que a nossa função f seja bem comportada o suficiente de modo a garantir que o nosso problema tenha sempre solução, pois está fora do escopo desse livro a prova do teorema de existência e unicidade para esse tipo de problema. No

caso mais simples em que a função f é linear em relação a variável y a nossa equação diferencial de 1ª ordem se apresenta na forma

$$y' = \alpha(x)y + \beta(x) \quad (2.4)$$

onde α e β são funções reais quaisquer definidas no intervalo (a, b) . Se supomos que α e β são funções contínuas em (a, b) então esta equação tem uma resolução bem simples, pois se consideramos primeiro a equação linear homogênea associada à equação (2.4), isto é,

$$y' = \alpha(x)y \quad (2.5)$$

podemos escrever tal equação na forma

$$\frac{y'}{y} = \alpha(x)$$

integrando em x temos

$$\ln y = \int^x \alpha(s)ds + c_1,$$

onde c_1 é uma constante arbitrária, segue que

$$y(x) = Ce^{\int^x \alpha(s)ds} \quad (2.6)$$

é uma solução da equação homogênea (2.5) com $C = e^{c_1}$. Usando agora o método de variação dos parâmetros para y dada em (2.6) temos

$$y' = C'e^{\int^x \alpha(s)ds} + C\alpha(x)e^{\int^x \alpha(s)ds}$$

substituindo tal resultado em (2.4) obtemos

$$C'e^{\int^x \alpha(s)ds} + C\alpha(x)e^{\int^x \alpha(s)ds} = C\alpha(x)e^{\int^x \alpha(s)ds} + \beta(x)$$

segue que

$$C'e^{\int^x \alpha(s)ds} = \beta(x)$$

o que nos dá

$$C' = \beta(x)e^{-\int^x \alpha(s)ds}$$

daí

$$C = C_0 + \int^x \beta(s)e^{-\int^s \alpha(t)dt}ds \quad (2.7)$$

onde C_0 é uma constante arbitrária. Logo, y dada por

$$y(x) = Ce^{\int^x \alpha(s)ds} \quad (2.8)$$

onde C é definida em (2.7) é a solução de (2.4).

1.3 Equações Diferenciais de 2ª Ordem

Uma equação diferencial de 2ª ordem, na forma mais geral, é uma equação do tipo

$$F(x, y, y', y'') = 0. \quad (3.9)$$

onde x é a variável independente, e $y = y(x)$ é a variável dependente, aqui $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$, $F(x, y, t, w)$ é uma função dada. Em muitas situações de muitos problemas de aplicações (na física, na matemática, etc.) a equação (3.9) se apresenta na seguinte forma

$$y'' = f(x, y, y'). \quad (3.10)$$

Teorema 1.3.1 *Se as funções f , f_y e $f_{y'}$ são contínuas numa região aberta R do espaço tri-dimensional xyv e se o ponto (x_0, y_0, y'_0) está em R , então em algum intervalo em torno de x_0 , existe uma única solução $y = \phi(x)$ da equação diferencial (3.10) que satisfaz as condições iniciais*

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0. \quad (3.11)$$

A equação geral linear de segunda ordem pode ser dada no seguinte modo

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = G(x), \quad (3.12)$$

onde P , Q , R e G são funções dadas.

Exemplo 1.3.2 *Equação de Legendre de ordem α*

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0$$

Exemplo 1.3.3 *Equação de Bessel de ordem ν*

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0.$$

Supondo P , Q , R e G contínuas num certo intervalo $\alpha < x < \beta$, e que P nunca se anula no intervalo, podemos dividir a equação (3.12) por $P(x)$ e obter uma equação da forma

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x). \quad (3.13)$$

Teorema 1.3.4 *Se as funções p , q e g são contínuas num intervalo $\alpha < x < \beta$, então existe uma e somente uma função $y = \phi(x)$ que satisfaz a equação diferencial (3.13) e as condições iniciais (3.11).*

1.4 Soluções Fundamentais

A equação

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (4.14)$$

é a equação homogênea associada à equação (3.13).

Teorema 1.4.1 *Se $y = y_1(x)$ e $y = y_2(x)$ são soluções da equação diferencial (4.14) então $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, (c_1 e c_2 constantes arbitrárias) é também solução de (4.14).*

Duas soluções y_1 e y_2 de (4.14) formarão um conjunto fundamental de soluções se toda solução de (4.14) puder ser escrita como combinação linear de y_1 e y_2 . O Wronskiano de y_1 e y_2 é dado por

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_2y_1' \quad (4.15)$$

se $W(y_1, y_2) \neq 0$ então y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de solução de (4.14). Isto quer dizer que as soluções y_1 e y_2 são linearmente independentes e toda solução de (4.14) se escreve como combinação linear dessas duas soluções.

1.5 Equações diferenciais com coeficientes constantes

Na equação diferencial (3.12) se fazemos $P(x) = a$, $Q(x) = b$, $R(x) = c$ e $G(x) = 0$, com a , b e c constantes reais então ela se transforma na seguinte equação:

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (5.16)$$

É natural considerar uma solução de (5.16) na forma:

$$y = e^{\alpha x} \quad (5.17)$$

com α sendo uma constante a determinar. Derivando y dada por (5.17) em relação a x , temos

$$\begin{aligned} y'(x) &= \alpha e^{\alpha x} \\ y''(x) &= \alpha^2 e^{\alpha x} \end{aligned}$$

Substituindo os valores de y , y' e y'' em (5.16) obtemos:

$$a\alpha^2 e^{\alpha x} + b\alpha e^{\alpha x} + ce^{\alpha x} = 0$$

que resulta na seguinte igualdade:

$$(a\alpha^2 + b\alpha + c)e^{\alpha x} = 0$$

Como $e^{\alpha x}$ é sempre diferente, devemos ter que:

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = 0 \quad (5.18)$$

A equação (5.18) é conhecida como equação característica associada à equação (5.16). Temos então três casos a considerar: as raízes α de (5.18) são reais e distintas, elas são reais e iguais ou são complexas conjugadas. Quando forem reais e distintas, isto é, α_1 e α_2 satisfazendo a equação (5.18) então temos duas soluções linearmente independentes da equação (5.16), dadas por:

$$y_1(x) = e^{\alpha_1 x}, \quad y_2(x) = e^{\alpha_2 x}.$$

Essas duas soluções formam um conjunto fundamental de soluções da equação (5.16) e, portanto, a solução geral dessa equação é dada pela combinação linear dessas duas soluções, ou seja, y dada por

$$y = c_1 e^{\alpha_1 x} + c_2 e^{\alpha_2 x} \quad (5.19)$$

com c_1 e c_2 constantes arbitrárias, é a solução geral da equação (5.16). Se as raízes forem iguais, isto é, $\alpha_1 = \alpha_2$ então uma solução é da forma $y_1 = e^{\alpha_1 x}$ e a outra solução linearmente independente com essa é dada por $y_2 = x e^{\alpha_2 x}$ que é encontrada usando o método de variação dos parâmetros. Logo a solução geral da equação (5.16) nesse caso, é dada por:

$$y = c_1 e^{\alpha_1 x} + c_2 x e^{\alpha_2 x} \quad (5.20)$$

com c_1 e c_2 constantes arbitrárias. No caso complexo, uma das raízes sendo da forma $\alpha_1 = r_1 + ir_2$ uma solução complexa é da forma

$$y = e^{r_1 + ir_2 x} \quad (5.21)$$

Se queremos as duas soluções reais linearmente independentes da equação (5.16), para esse caso, basta tomar y_1 como sendo a parte real de (5.21) e y_2 como sendo a parte imaginária (5.21), ou seja,

$$y_1 = \cos(r_2 x) e^{r_1 x}, \quad y_2 = \sin(r_2 x) e^{r_1 x} \quad (5.22)$$

E a solução geral de (5.16) é dada por

$$y = c_1 \cos(r_2 x) e^{r_1 x} + c_2 \sin(r_2 x) e^{r_1 x} \quad (5.23)$$

com c_1 e c_2 constantes arbitrárias. Quando estamos resolvendo uma equação diferencial do tipo (5.16) satisfazendo condições iniciais então podemos determinar as constantes c_1 e c_2 , ou seja, elas deixam de ser arbitrárias.

Exemplo 1.5.1 *Considere a equação diferencial*

$$y'' - 5y' + 6y = 0 \quad (5.24)$$

com os dados iniciais dados por

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 2. \quad (5.25)$$

A equação característica associada à equação (5.33) é dada por

$$r^2 - 5r + 6 = 0 \quad (5.26)$$

cujas raízes são

$$r_1 = 2, \quad r_2 = 3 \quad (5.27)$$

Logo a solução geral de (5.33) é

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} \quad (5.28)$$

Como queremos que essa solução satisfaça as condições iniciais (5.25) devemos ter:

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 + c_2 = 1 \\ y'(0) &= 2c_1 + 3c_2 = 2 \end{aligned}$$

resolvendo o sistema acima, obtemos, $c_1 = 1$ e $c_2 = 0$. Logo, a única solução da equação (5.33) que satisfaz as condições iniciais (5.25) é $y = e^{2x}$.

Exemplo 1.5.2 Considere a equação diferencial

$$y'' - 6y' + 9y = 0 \quad (5.29)$$

A equação característica associada à equação (5.33) é dada por

$$r^2 - 6r + 9 = 0 \quad (5.30)$$

cujas raízes são

$$r_1 = r_2 = 3 \quad (5.31)$$

Logo a solução geral de (5.33) é

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x} \quad (5.32)$$

Exemplo 1.5.3 Considere a equação diferencial

$$y'' + y = 0 \quad (5.33)$$

A equação característica associada à equação (5.33) é dada por

$$r^2 + 1 = 0 \quad (5.34)$$

cujas raízes complexas são

$$r_1 = i, \quad r_2 = -i \quad (5.35)$$

Logo a solução geral de (5.33) é

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x. \quad (5.36)$$

1.6 Exercícios

1. Resolva as seguintes equações diferenciais lineares com condições iniciais dadas:

(a) $y'' + y' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

(b) $y'' + 3y' + y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

2. Encontre a solução geral das equações diferenciais abaixo:

(a) $y'' - y' + y = 0$,

(b) $y'' + 3y = 0$,

(c) $y'' - 9y = 0$.

3. Mostre que as equações abaixo tem duas soluções linearmente independentes e calcule o Wronskiano de cada uma delas:

(a) $y'' + y' + 2y = 0$,

(b) $y'' + 4y = 0$,

(c) $y'' - 8y = 0$.

4. Considere o *problema não homogêneo* abaixo:

$$ay'' + by' + cy = g, \quad (6.37)$$

onde a , b , c e g são funções de x diferenciáveis. Suponha que y_1 e y_2 são soluções linearmente independentes do problema homogêneo associado ao problema (6.37):

$$ay'' + by' + cy = 0. \quad (6.38)$$

Considere uma solução particular de (6.37) dada por

$$y_p = c_1 y_1 + c_2 y_2 \quad (6.39)$$

onde c_1 e c_2 são funções de x . Use o método de variação dos parâmetros para encontrar uma solução particular y_p de (6.37). Ou seja, suponha que $c'_1 y_1 + c'_2 y_2 = 0$, derive (6.39) para obter y'_p e y''_p substitua esses valores em (6.37) para obter o sistema

$$\begin{cases} c'_1 y_1 + c'_2 y_2 = 0 \\ c'_1 y'_1 + c'_2 y'_2 = \frac{g}{a} \end{cases} \quad (6.40)$$

Resolva esse sistema para c_1 e c_2 e encontre a solução particular y_p dada por (6.39) onde c_1 e c_2 são soluções de (6.40). Logo a solução geral do problema (6.37) é dada por

$$y(x) = y_p(x) + c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.

5. Aplique o método de variação dos parâmetros do exercício anterior para determinar a solução geral dos problemas não homogêneos abaixo:

(a) $y'' + y = \operatorname{sen} x$,

(b) $y'' - 3y' + y = e^t$,

(c) $y'' - 2y' + 4y = \tan x$.

Capítulo 2

TRANSFORMADA DE LAPLACE

2.1 Introdução

Neste capítulo introduzimos a noção de Transformada de Laplace, que é uma ferramenta muito útil e poderosa na resolução de equações diferenciais. A vantagem de se usar a Transformada de Laplace é que ela simplifica muito as equações diferenciais transformando um problema de equações diferenciais num problema algébrico, muito mais simples de resolver, onde nesse problema você encontra uma função dependendo de um parâmetro e a inversa dessa função nos fornece a solução do problema em questão. Vamos iniciar o capítulo, dando uma definição sobre continuidade por partes.

Definição 2.1.1 *Uma função real f se diz contínua por partes num intervalo fechado $\alpha \leq t \leq \beta$, se para um número finito de pontos do intervalo $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$ tivermos que*

- a) f é contínua em cada subintervalo aberto $t_{i-1} < t < t_i$;*
- b) e se nesses subintervalos, os limites laterais de f nos pontos extremos dos mesmos existirem, isto é, se $\lim_{t \rightarrow t_i^-} f(t)$ e $\lim_{t \rightarrow t_i^+} f(t)$, $i = 0, 1, \dots, n$, existirem.*

Em outras palavras, podemos dizer que uma função f é contínua por partes se seu gráfico consiste em um número finito de partes contínuas. Isto é, f é contínua por partes em $[a, b]$, se é contínua exceto num número finito de pontos deste intervalo e se em cada ponto x_0 de descontinuidade existem os limites à direita e à esquerda de f , ou seja, tanto $f(x_0 + h)$ como $f(x_0 - h)$ tendem a um limite finito quando h tende a zero pela direita.

Os exemplos podem ser dados pelas figuras 2.1 e 2.2.

O fato essencial relativo a funções contínuas por partes num intervalo finito consiste em que elas são integráveis. De fato, se f é contínua por partes em $[a, b]$, com descontinuidade em $x_0, x_1, \dots, x_n$ e, possivelmente, também em a e b , então $\int_a^b f(t)dt$ é definida e calculada por

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \left[\int_{a+h}^{x_0-h} f(t)dt + \int_{x_0+h}^{x_1-h} f(t)dt + \dots + \int_{x_n+h}^{b-h} f(t)dt \right].$$

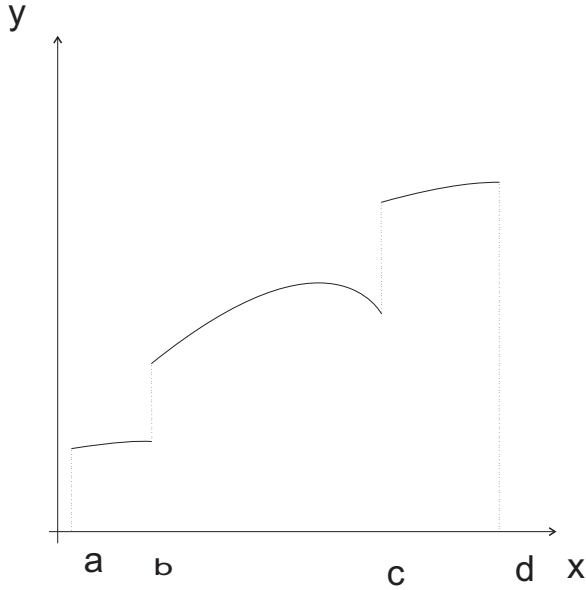


Figura 2.1: Função contínua por partes

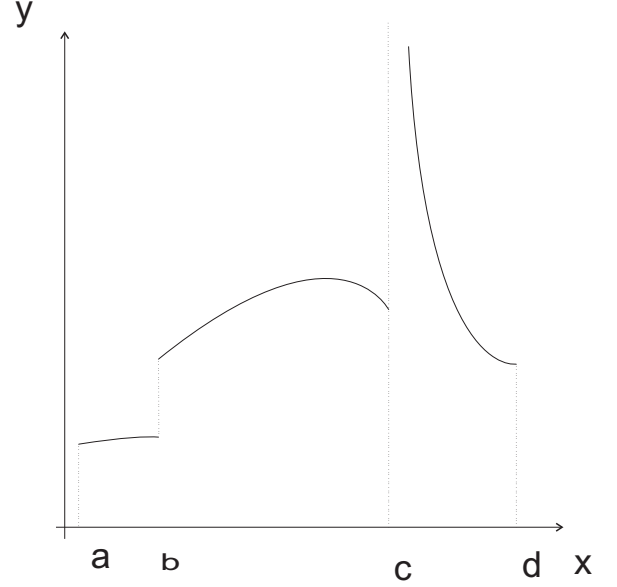


Figura 2.2: Função que não é contínua por partes

Outros Exemplos: Funções como t^2 , $\sin t$ são exemplos de funções contínuas por partes, por outro lado, nem $\tan t$ nem $\sin \frac{1}{t}$ são contínuas por partes em $[0, \frac{\pi}{2}]$; a primeira, em virtude de seu comportamento perto de $\frac{\pi}{2}$, a segunda, porque oscila de tal modo, que não tende a um limite finito quando $t \rightarrow 0$.

Definição 2.1.2 Uma integral sobre um intervalo ilimitado é denominada *Integral Imprópria* e é definida por

$$\int_a^\infty f(t)dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A f(t)dt,$$

onde A é um número real positivo. Se existir uma integral de a a A , para cada $A > a$ e se o limite, quando $A \rightarrow \infty$, existe, então diz-se que a integral imprópria converge para aquele valor limite. De outro modo, diz-se que a integral imprópria diverge ou não existe.

Também definimos como integral imprópria a integral que tem o integrando que se torna ilimitado num tempo finito, isto é, se $\lim_{t \rightarrow a^+} f(t) = \infty$ então a integral de $f(t)$ num intervalo (a, b) é definido como segue

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{s \rightarrow a^+} \int_s^b f(t)dt,$$

se tal limite existe, dizemos que a integral converge, e se não converge então a integral diverge.

Exemplo 2.1.3 Seja $f(t) = e^{ct}$, $t \geq 0$, onde c é uma constante real não-nula. Então

$$\int_0^\infty e^{ct}dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{ct}dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{ct}}{c} \right]_0^A = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{c} [e^{cA} - 1].$$

Logo a integral imprópria converge se $c < 0$ e diverge se $c > 0$. Se $c = 0$ o integrando é 1 e novamente diverge.

Exemplo 2.1.4 Seja $f(t) = \frac{1}{t}$, $t \geq 1$. Então

$$\int_1^\infty \frac{dt}{t} = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A \frac{dt}{t} = \lim_{A \rightarrow \infty} \ln A = +\infty \quad (\text{diverge}).$$

Exemplo 2.1.5 Seja $f(t) = t^{-p}$, $t \geq 1$, onde p é constante real $p \neq 1$. Então

$$\int_1^\infty t^{-p} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A t^{-p} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{1-p} (A^{1-p} - 1).$$

Quando $A \rightarrow \infty$, $A^{1-p} \rightarrow 0$ se $p > 1$, mas $A^{1-p} \rightarrow \infty$ se $p < 1$. Desse modo, a integral acima converge para $p > 1$ e diverge para $p \leq 1$.

Teorema 2.1.6 Se f for contínua por partes para $t \geq a$, se $|f(t)| \leq g(t)$ quando $t \geq M$ para alguma constante positiva M e se $\int_M^\infty g(t)dt$ convergir, então $\int_a^\infty f(t)dt$ também convergirá. Por outro lado, se $f(t) \geq g(t) \geq 0$ para $t \geq M$ e se $\int_M^\infty g(t)dt$ divergir, então $\int_a^\infty f(t)dt$ também diverge.

2.2 Transformada de Laplace

Seja $f(t)$ uma função real no intervalo $(0, \infty)$, e consideremos

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

onde s é uma variável real. Quando f é suficientemente bem comportada, esta integral convergirá para certos valores de s , neste caso, ela define uma certa função de s que chamamos *transformada de Laplace de f* , e representamos por $\mathcal{L}[f]$, ou $\mathcal{L}[f](s)$. Assim se $f(t) = \cos at$, onde a é uma constante, então

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\cos at](s) &= \int_0^\infty e^{-st} \cos at dt \\ &= \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \int_0^{t_0} e^{-st} \cos at dt \\ &= \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \left\{ \frac{e^{-st}}{s^2 + a^2} (a \sin at - s \cos at) \Big|_0^{t_0} \right\} \\ &= \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \left\{ \frac{e^{-st_0}}{s^2 + a^2} (a \sin at_0 - s \cos at_0) + \frac{s}{s^2 + a^2} \right\} \end{aligned}$$

como este limite existe se, e somente se, $s > 0$, neste caso, ele é dado por $\frac{s}{s^2 + a^2}$, segue-se que a transformada de Laplace de $\cos at$ é a função $s/(s^2 + a^2)$ limitada no intervalo $(0, \infty)$. Ou seja,

$$\mathcal{L}[\cos at] = \frac{s}{s^2 + a^2}, s > 0.$$

Em que condições podemos assegurar a existência da transformada de Laplace de uma dada função f ?

Claro que f deve ser escolhida de modo que a integral

$$\int_0^{t_0} e^{-st} f(t) dt$$

exista para $t_0 > 0$, mas para isto basta supor o integrando na expressão acima seja contínuo por partes em $[0, t_0]$, $t_0 > 0$, além disso, devemos supor também que a expressão acima seja convergente quando $t_0 \rightarrow \infty$.

Definição 2.2.1 Diz-se que uma função f é de ordem exponencial em $[0, \infty)$ se existem constantes C e α , $C > 0$, tais que

$$|f(t)| \leq Ce^{\alpha t}$$

para todo $t > 0$.

Exemplo 2.2.2 As funções t^n , $e^{\alpha t}$, $\sin bt$, $\cos bt$, $t^n e^{\alpha t} \sin bt$, $t^n e^{\alpha t} \cos bt$ são todas de ordem exponencial.

Exemplo 2.2.3 A função e^{t^2} não é de ordem exponencial.

Teorema 2.2.4 Se f é uma função contínua por partes, de ordem exponencial, existe um número α , tal que

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

converge para todos os valores de $s > \alpha$.

Prova.

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \right| &\leq C \int_0^\infty e^{-st} e^{\alpha t} dt = C \int_0^\infty e^{-(s-\alpha)t} dt \\ &= \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \frac{C}{s - \alpha} [1 - e^{-(s-\alpha)t_0}] \\ &= \frac{C}{s - \alpha} \quad \text{se } s > \alpha. \end{aligned}$$

O domínio de definição da transformada de Laplace de uma função contínua por partes, de ordem exponencial, sempre inclui um intervalo semi-infinito da forma (α, ∞) . Se s_0 designa o ínfimo do conjunto de números reais α tais que $\mathcal{L}[f](s)$ existe para todo $s > \alpha$, pode-se provar que $\mathcal{L}[f](s)$ não converge para todo $s < s_0$. Assim com a possível exceção do próprio ponto s_0 , o domínio de $\mathcal{L}[f](s)$ é o intervalo aberto (s_0, ∞) . (Notemos que para certas funções como e^{-t^2} ou 0, s_0 pode ser $-\infty$.)

Sendo assim a transformada de Laplace de qualquer função de ordem exponencial existe; mas e a recíproca? É verdade que uma função cuja transformada de Laplace exista é necessariamente de ordem exponencial? A resposta é não, de fato, a função $1/\sqrt{t}$ tem uma transformada de Laplace, mas não é de ordem exponencial. Isto quer dizer que o conjunto das funções que possuem transformadas de Laplace é maior que o conjunto das funções de ordem exponencial, embora felizmente a maioria das funções que surgem nas aplicações sejam de ordem exponencial.

Vamos agora calcular a transformada de Laplace de algumas funções.

Exemplo 2.2.5 *Seja $f(t) = 1$, $t \geq 0$. Então*

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s}, \quad s > 0.$$

Exemplo 2.2.6 *Seja $f(t) = e^{at}$, $t \geq 0$. Então*

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} dt = \frac{1}{s-a}, \quad s > a.$$

Exemplo 2.2.7 *Seja $f(t) = \text{sen} at$, $t \geq 0$. Então*

$$\mathcal{L}\{\text{sen} at\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \text{sen} at \, dt, \quad s > 0$$

Como

$$F(s) = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-st} \text{sen} at \, dt,$$

integrando por partes, temos

$$\begin{aligned} F(s) &= \lim_{A \rightarrow \infty} \left[-\frac{e^{-st} \cos at}{a} \Big|_0^A - \frac{s}{a} \int_0^A e^{-st} \cos at \, dt \right] \\ &= \frac{1}{a} - \frac{s}{a} \int_0^{\infty} e^{-st} \cos at \, dt \end{aligned}$$

integrando por partes mais uma vez, obtemos

$$F(s) = \frac{1}{a} - \frac{s^2}{a^2} F(s),$$

desse modo,

$$F(s) = \frac{a}{a^2 + s^2}, \quad s > 0.$$

2.3 A Transformada de Laplace como Aplicação Linear

Seja $\mathcal{E} = \{f : |f(t)| \leq Ce^{\alpha t}\}$ conjunto das funções de ordem exponencial

Seja $\mathcal{F} = \{f : (s_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, s_0 \geq -\infty\}$

$f, g \in \mathcal{F} \Rightarrow f + g$ é tal que $\mathcal{D}(f + g) = \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g)$ e $(f + g)(s) = f(s) + g(s) \quad s \in \mathcal{D}(f + g)$

$$(\alpha f)(s) = \alpha f(s)$$

desse modo $\mathcal{F}$ é um espaço vetorial real.

Considerando o operador $\mathcal{L} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$, $\mathcal{L}$ é linear? Não necessariamente.

Considere $f(t) = \cos at$ e $g(t) = -\cos at$ temos

$$\mathcal{L}(f + g) = \mathcal{L}[0] = 0, \quad \forall s \in (-\infty, \infty)$$

mas

$$\mathcal{L}[f] + \mathcal{L}[g] = 0, \quad \forall s \in (0, \infty)$$

mas $\mathcal{L}[f] + \mathcal{L}[g]$ não está definida para $s \leq 0$. Em que situação podemos considerar a transformada de Laplace como operador linear? Suponhamos agora f e g são duas funções que possuem transformada de Laplace para $s > a_1$ e $s > a_2$, respectivamente. Então, para s maior que o máximo entre a_1 e a_2 , temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \{c_1 f(t) + c_2 g(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} [c_1 f(t) + c_2 g(t)] dt \\ &= c_1 \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt + c_2 \int_0^\infty e^{-st} g(t) dt \end{aligned}$$

e assim,

$$\mathcal{L} \{c_1 f(t) + c_2 g(t)\} = c_1 \mathcal{L} \{f(t)\} + c_2 \mathcal{L} \{g(t)\}.$$

isto é, $\mathcal{L}$ nestas condições é linear.

$\mathcal{L}$ é biunívoca? $\mathcal{L}[f] = \mathcal{L}[g] \Rightarrow f = g$? Ou ainda

$$(*) \quad \mathcal{L}[y] = \varphi(s) \Rightarrow \exists! y \text{ tal que } (*) \text{ é satisfeita para } \varphi \text{ dada?}$$

Não necessariamente, mas $\mathcal{L}[f] = \mathcal{L}[g] \Rightarrow f = g$ a menos de pontos de descontinuidades de f e g .

Teorema 2.3.1 (Lerch) *Sejam f, g funções contínuas por partes, de ordem exponencial, e suponha que existe s_0 tal que $\mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}[g](s)$, $\forall s \geq s_0$. Então $f(t) = g(t)$, $\forall t > 0$, a menos de pontos de descontinuidades de f e g .*

O teorema de Lerch acima é importante, pois garante, num certo sentido, a injetividade da transformada de Laplace e, por sua vez, a existência da transformada inversa, isto é,

$$\mathcal{L}^{-1} \{\phi\} = y \iff \mathcal{L} \{y\} = \phi.$$

E a linearidade de $\mathcal{L}$ garante a linearidade de $\mathcal{L}^{-1}$. A transformada $\mathcal{L} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ é sobre? (*) tem solução para toda $\varphi \in \mathcal{F}$? Não necessariamente. E isso é respondido pelo proximo resultado. (Note que $\mathcal{L}$ é inversível quando consideramos $\mathcal{L} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{E})$).

Teorema 2.3.2 *Se f é de ordem exponencial então $\lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{L}[f](s) = 0$.*

Temos que as funções $1, s, \sin s, s/(s+1)$ não tem transformadas inversas em $\mathcal{E}$ pois nenhuma delas tendem a zero quando $s \rightarrow \infty$.

Teorema 2.3.3 *Suponha que f seja contínua e f' seja contínua por partes em qualquer intervalo $0 \leq t \leq A$. Suponha ainda que existam constantes k, a e M tais que $|f(t)| \leq Ke^{at}$ para $t \geq M$. Então $\mathcal{L}\{f'(t)\}$ existe para $s > a$ e, além disso,*

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0).$$

Se f' e f'' satisfazem as mesmas condições impostas sobre f e f' , respectivamente, no Teorema 2.3.3, então a transformada de Laplace de f'' também existe para $s > a$ e é dada por

$$\mathcal{L}\{f''\} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0).$$

Corolário 2.3.4 *Suponha $f, f', \dots, f^{(n-1)}$ contínuas e que $f^{(n)}$ seja contínua por partes em qualquer intervalo $0 \leq t \leq A$. Suponha ainda que existem constantes k, a e M tais que $|f^{(n-1)}(t)| \leq Ke^{at}$ para $t \geq M$. Então, $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}$ existe para $s > a$ e é dada por*

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n\mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - \dots - s f^{(n-1)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

Mostramos agora como usar a transformada de Laplace para resolver equações diferenciais ordinárias com valores iniciais dados.

Exemplo 2.3.5 *Considere o problema de Cauchy:*

$$y'' - y' - 2y = 0 \tag{3.1}$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \tag{3.2}$$

Já sabemos que a solução para esse problema é dada por:

$$y = \phi(t) = \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t}$$

Vamos usar a transformada de Laplace nesse problema para chegar ao mesmo resultado, tomando a transformada de Laplace da equação diferencial (3.1) obtemos

$$\mathcal{L}\{y''\} - \mathcal{L}\{y'\} - 2\mathcal{L}\{y\} = 0 \quad (3.3)$$

Pelo corolário 2.3.4 temos:

$$s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) - [s\mathcal{L}\{y\} - y(0)] - 2\mathcal{L}\{y\} = 0$$

ou

$$(s^2 - s - 2)Y(s) + (1 - s)y(0) - y'(0) = 0 \quad (3.4)$$

onde $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}$. Substituindo $y(0)$ e $y'(0)$ em (3.4) pelas condições iniciais (3.2) e resolvendo em $Y(s)$ temos

$$Y(s) = \frac{s-1}{s^2-s-2} = \frac{s-1}{(s-2)(s+1)}$$

daí

$$Y(s) = \frac{\frac{1}{3}}{s-2} + \frac{\frac{2}{3}}{s+1}$$

Finalmente, temos que

$$\mathcal{L}\{e^{2t}\} = \frac{1}{s-2}, \quad \mathcal{L}\{e^{-t}\} = \frac{1}{s+1}$$

assim

$$\mathcal{L}\{\frac{1}{3}e^{2t}\} = \frac{1}{3}\mathcal{L}\{e^{2t}\} \quad \text{e} \quad \mathcal{L}\{\frac{2}{3}e^{-t}\} = \frac{2}{3}\mathcal{L}\{e^{-t}\}$$

Logo

$$\mathcal{L}\{y\} = Y(s) = \mathcal{L}\{\frac{1}{3}e^{2t} + \frac{2}{3}e^{-t}\}$$

segue que

$$y = \phi(t) = \frac{1}{3}e^{2t} + \frac{2}{3}e^{-t}.$$

o que coincide com o resultado já obtido.

2.4 A função Gamma

A função Gamma é representada por $\Gamma(p)$ e é definida por

$$\Gamma(p+1) = \int_0^\infty e^{-x} x^p dx$$

Temos que ela satisfaz as seguintes propriedades:

(a)

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p) \quad \text{para } p > 0$$

(b) Se p for um inteiro positivo n

$$\Gamma(n+1) = n!$$

(c) Para $p > 0$,

$$p(p+1)(p+2)\cdots(p+n-1) = \frac{\Gamma(p+n)}{\Gamma(p)}$$

Considere a transformada de Laplace de t^p , onde $p > -1$, temos que

(a)

$$\mathcal{L}\{t^p\} = \int_0^\infty e^{-st} t^p = \frac{1}{s^{p+1}} \int_0^\infty e^{-x} x^p dx = \frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}, \quad s > 0.$$

(b) Se p for um inteiro positivo n então

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$$

(c)

$$\mathcal{L}\{t^{-\frac{1}{2}}\} = \frac{2}{\sqrt{s}} \int_0^\infty e^{-x^2} dx, \quad s > 0.$$

Como

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

temos que

$$\mathcal{L}\{t^{-\frac{1}{2}}\} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}, \quad s > 0.$$

(d) Temos que

$$\mathcal{L}\{t^{\frac{1}{2}}\} = \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}, \quad s > 0.$$

Exemplo 2.4.1 Ache a solução da equação diferencial

$$y'' + y = \text{sen} 2t, \tag{4.5}$$

satisfazendo as condições iniciais

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \tag{4.6}$$

Tomando a transformada de Laplace em (4.5) obtemos

$$s^2 Y(s) - 1y(0) - y'(0) + Y(s) = \frac{2}{s^2 + 4}$$

substituindo $y(0)$ e $y'(0)$ em (4.6) temos

$$(s^2 + 1)Y(s) - 1 = \frac{2}{s^2 + 4}$$

o que implica em

$$Y(s) = \frac{s^2 + 6}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}$$

Utilizando frações parciais temos

$$Y(s) = \frac{5/3}{s^2 + 1} - \frac{2/3}{s^2 + 4}$$

temos então que

$$y = \phi(t) = \frac{5}{3}\text{sent} - \frac{1}{3}\text{sen}2t.$$

2.5 Função Degrau

Vamos supor que todas as funções abaixo são contínuas por partes e de ordem exponencial, de modo que suas transformadas de Laplace existem, pelo menos, para s suficientemente grande.

Função Degrau unitária

A função degrau unitária é definida como segue:

$$u_c(t) = \begin{cases} 0, & t \leq c \\ 1, & t > c, \end{cases} \quad c > 0 \quad (5.7)$$

Veja a figura (2.3).

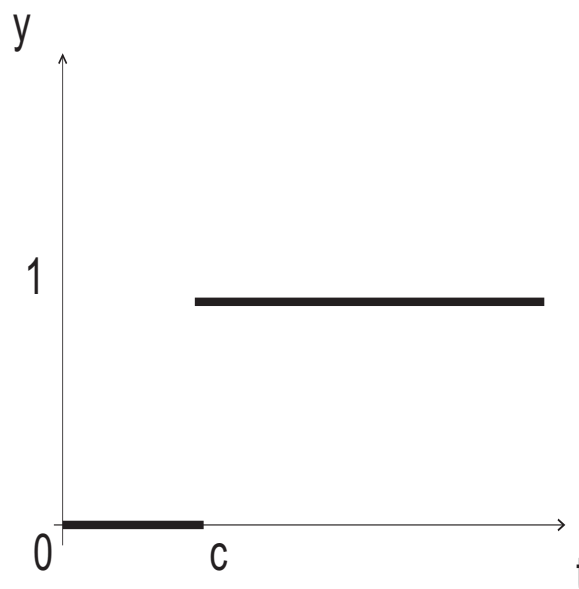


Figura 2.3: A função degrau unitária $y = u_c(t)$

A função degrau u_c serve para transladar uma função dada f , com domínio $t \geq 0$, de uma distância c para a direita. Por exemplo, a função

$$y = u_c(t)f(t - c) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq c \\ f(t - c), & t > c. \end{cases}$$

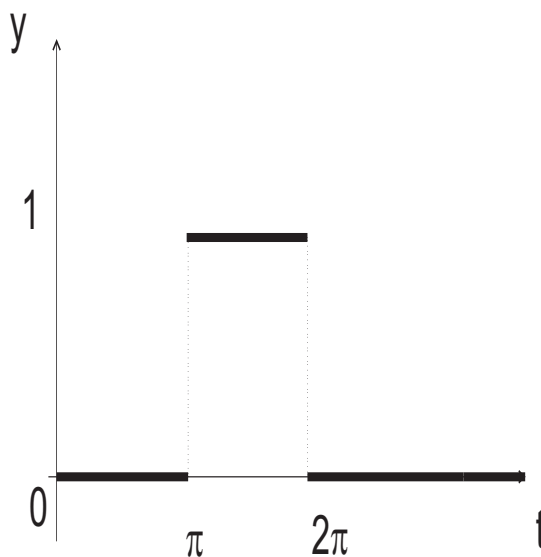


Figura 2.4: A função $y = u_\pi(t) - u_{2\pi}(t)$

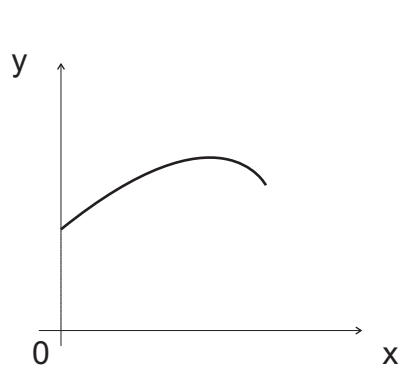


Figura 2.5: $y = f(x)$

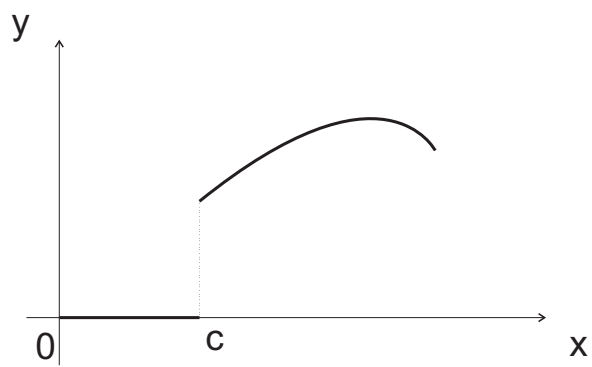


Figura 2.6: A função $y = u_c(x)f(x - c)$

A transformada de Laplace de u_c é dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[u_c(t)] &= \int_0^\infty e^{-st} u_c(t) dt \\ &= \int_c^\infty e^{-st} dt \\ &= \frac{e^{-cs}}{s}, \quad s > 0.\end{aligned}$$

Exemplo 2.5.1 Se a função f é definida por

$$f(t) = \begin{cases} \text{sent}, & 0 \leq t \leq 2\pi \\ \text{sent} + \cos t, & t \geq 2\pi \end{cases}$$

ache $\mathcal{L}\{f(t)\}$. Note que $f(t) = \text{sent} + g(t)$, onde

$$g(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 2\pi \\ \cos t, & t \geq 2\pi \end{cases}$$

ou

$$g(t) = u_{2\pi}(t) \cos(t - 2\pi)$$

e

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\{\text{sent}\} + \mathcal{L}\{u_{2\pi}(t) \cos(t - 2\pi)\} \\ &= \mathcal{L}\{\text{sent}\} + e^{-2\pi s} \mathcal{L}\{\cos t\}\end{aligned}$$

daí

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\} &= \frac{1}{s^2 + 1} + e^{-2\pi s} \frac{s}{s^2 + 1} \\ \mathcal{L}\{f(t)\} &= \frac{1 + e^{-2\pi s} s}{s^2 + 1}.\end{aligned}$$

Exemplo 2.5.2 Ache a transformada inversa de

$$G(s) = \frac{1 - e^{-2s}}{s^2}.$$

Da linearidade da transformada inversa temos

$$\begin{aligned}f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s^2}\right\} \\ &= t - u_2(t)(t - 2)\end{aligned}$$

note que $F(s) = \frac{1}{s^2} \implies f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = t$ e que $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-2s}F(s)\} = u_2(t)f(t - 2) = u_2(t)(t - 2)$. Usando a definição de $u_2(t)$ obtemos

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 2 \\ 2, & t \geq 2. \end{cases}$$

que é a inversa de $G(s)$.

Teorema 2.5.3 Se existe $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ para $s > a \geq 0$ e se c é uma constante, então

$$\mathcal{L}\{e^{ct}f(t)\} = F(s - c), \quad s > a + c.$$

Analogamente, se $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ então

$$e^{ct}f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s - c)\}.$$

Prova: Temos que

$$\mathcal{L}\{e^{ct}f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} e^{ct} f(t) dt = \int_0^\infty e^{-(s-c)t} f(t) dt = F(s - c).$$

A restrição $s > a + c$ segue do fato que $|f(t)| < Ke^{at}$, portanto, $|e^{ct}f(t)| < Ke^{(a+c)t}$.

Exemplo 2.5.4 Ache a transformada inversa de

$$G(s) = \frac{1}{s^2 - 4s + 5}.$$

Completando o quadrado no denominador, temos

$$G(s) = \frac{1}{(s-2)^2 + 1} = F(s-2)$$

onde $F(s) = (s^2 + 1)^{-1}$. Como $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \text{sent}$, segue do teorema acima que

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = e^{2t}\text{sent}.$$

Exemplo 2.5.5 Considere a equação diferencial

$$y'' + 4y = h(t), \tag{5.8}$$

onde

$$h(t) = \begin{cases} 1, & \pi \leq t \leq 2\pi \\ 0, & 0 \leq t \leq \pi \text{ e } t > 2\pi \end{cases}$$

com condições iniciais

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

É conveniente escrever $h(t)$ na forma

$$h(t) = u_\pi(t) - u_{2\pi}(t)$$

Aplicando a transformada de Laplace em (5.8) obtemos

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4Y(s) = \frac{e^{-\pi s}}{s} - \frac{e^{-2\pi s}}{s}$$

onde $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}$. Temos que

$$(s^2 + 4)Y(s) = s + \frac{e^{-\pi s}}{s} - \frac{e^{-2\pi s}}{s}$$

segue que

$$Y(s) = \frac{s}{s^2 + 4} + \frac{e^{-\pi s}}{s(s^2 + 4)} - \frac{e^{-2\pi s}}{s(s^2 + 4)}$$

Temos que

$$\frac{1}{s(s^2 + 4)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 4}$$

implica em

$$\frac{1}{s(s^2 + 4)} = \frac{1}{4s} - \frac{s}{4(s^2 + 4)}$$

Assim

$$Y(s) = \frac{s}{s^2 + 4} + \frac{1}{4} \frac{e^{-\pi s}}{s} - \frac{1}{4} \frac{e^{-\pi s} s}{s^2 + 4} - \frac{1}{4} \frac{e^{-2\pi s}}{s} + \frac{1}{4} \frac{e^{-2\pi s} s}{s^2 + 4}$$

como $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1$, $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} = \cos 2t$. Então

$$y = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \cos 2t + \frac{1}{4}\{u_{\pi}(t) - u_{\pi}(t) \cos 2(t - \pi) - u_{2\pi}(t) [1 - \cos 2(t - 2\pi)]\}$$

ou seja

$$y = \phi(t) = \cos 2t + \frac{1}{4}u_{\pi}(t) [1 - \cos 2(t - \pi)] - \frac{1}{4}u_{2\pi}(t) [1 - \cos 2(t - 2\pi)].$$

Podemos escrever $y = \phi(t)$ na seguinte forma

$$\phi(t) = \begin{cases} \cos 2t, & 0 \leq t < \pi \\ \frac{3}{4} \cos 2t + \frac{1}{4}, & \pi \leq t < 2\pi \\ \cos 2t, & 2\pi \leq t \end{cases}$$

Note que ϕ e ϕ' são contínuas em $t > 0$, mas ϕ'' não existe em $t = \pi$ e $t = 2\pi$, ou seja

$$\phi''(t) = \begin{cases} -4 \cos 2t, & 0 < t < \pi \\ -3 \cos 2t, & \pi < t < 2\pi \\ -4 \cos 2t, & 2\pi < t. \end{cases}$$

Vamos agora colocar a seguinte tabela de transformada de Laplace de algumas funções que nos será muito útil.

Tabela 2.1: Tabela de transformada de Laplace

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$
1	$\frac{1}{s}, s > 0$	$u_c(t)$	$\frac{e^{-cs}}{s}, s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}, s > a$	$u_c(t)f(t-c)$	$e^{-cs}F(s)$
$\text{sen } at$	$\frac{a}{s^2+a^2}, s > 0$	$e^{ct}f(t)$	$F(s-c)$
$t^n, n \in \mathbb{Z}^+$	$\frac{n!}{s^{n+1}}, s > 0$	$f(ct)$	$\frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right), c > 0$
$t^p, p > -1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}, s > 0$	$\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$	$F(s)G(s)$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}, s > 0$	$\delta(t-c)$	e^{-cs}
$\text{senh } at$	$\frac{a}{s^2-a^2}, s > a $	$f^n(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - \dots - \binom{n-1}{1}f^{(n-1)}(0)$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}, s > a $	$(-t)^n f(t)$	$\binom{n}{1}F(s)$
$e^{at}\text{sen } bt$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}, s > a$		
$e^{at}\cos bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}, s > a$		
$t^n e^{at}, n \in \mathbb{Z}^+$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, s > a$		

2.6 Transformada de Laplace para Integrais

Vamos estabelecer o seguinte teorema

Teorema 2.6.1 *Se f é uma função de ordem exponencial em $[0, \infty)$, e a é um número real não negativo, então*

$$\mathcal{L}\left[\int_a^t f(x)dx\right] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f] - \frac{1}{s} \int_0^a f(x)dx.$$

De modo mais geral,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\int_a^t \cdots \int_a^t f(x)dx \cdots dx\right] &= \frac{1}{s^n}\mathcal{L}[f] - \frac{1}{s^n} \int_0^a f(x)dx - \\ &- \frac{1}{s^{n-1}} \int_0^a \int_0^t f(x)dx - \cdots - \frac{1}{s} \int_0^a \int_a^t \cdots \int_a^t f(x)dx \cdots dx. \end{aligned}$$

Demonstração: A demonstração se baseia no fato que se f é de ordem exponencial então $\int_a^t f(x)dx$ também é. Usando integração por partes com $u(t) = \int_a^t f(x)dx$ e $dv = e^{-st}dt$, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\int_a^t f(x)dx\right] &= \int_0^\infty e^{-st} \int_a^t f(x)dx dt \\ &= -\frac{1}{s}e^{-st} \int_a^t f(x)dx \Big|_0^\infty + \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt. \end{aligned}$$

Mas como $\int_a^t f(x)dx$ é de ordem exponencial, o primeiro termo desta expressão tende a zero quando $t \rightarrow \infty$, desde que s seja suficientemente grande, e, portanto,

$$\mathcal{L}\left[\int_a^t f(x)dx\right] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f] + \frac{1}{s} \int_0^a f(x)dx.$$

O que demonstra o teorema.

Exemplo 2.6.2 *Na prática, as fórmulas de integração aparecem, geralmente, com $a = 0$, caso em que assumem as formas mais simples*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\int_0^t f(x)dx\right] &= \frac{1}{s}\mathcal{L}[f]. \\ \mathcal{L}\left[\int_0^t \cdots \int_0^t f(x)dx\right] &= \frac{1}{s^n}\mathcal{L}[f]. \end{aligned}$$

Como $\int_0^t \cos ax dx = \frac{\text{sen} at}{a}$. Temos

$$\frac{1}{a}\mathcal{L}[\text{sen} at] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[\cos at].$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\text{sen} at] &= \frac{a}{s}\mathcal{L}[\cos at] \\ &= \frac{a}{s} \left(\frac{s}{s^2 + a^2} \right) \\ &= \frac{a}{s^2 + a^2}, \quad s > 0. \end{aligned}$$

2.7 Funções Impulso

Quando lidamos com fenômenos de natureza impulsiva, tais como, alta voltagens ou forças de grande magnitude que agem por intervalos de tempo muito curto, enfrentamos problemas que levam a equações diferenciais da forma

$$ay'' + by' + cy = g(t)$$

onde $g(t)$ é grande durante um curto intervalo $t_0 - \eta < t < t_0 + \eta$ e é nula para outros valores de t . A integral $I(\eta)$, definida por

$$I(\eta) = \int_{t_0 - \eta}^{t_0 + \eta} g(\tau) d\tau \quad (7.9)$$

ou

$$I(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt \quad (7.10)$$

pois $g(t) = 0$ fora do intervalo $(t_0 - \eta, t_0 + \eta)$, é uma medida da grandeza da função forçada. Num sistema mecânico, onde $g(t)$ é uma força, $I(\eta)$ é o impulso total da força $g(t)$ durante o intervalo de tempo $(t_0 - \eta, t_0 + \eta)$.

Em particular, suponha que t_0 seja zero e que $g(t)$ seja dada por

$$g(t) = \begin{cases} 1/2\eta, & -\eta < t < \eta \\ 0, & t \leq -\eta \text{ ou } t \geq \eta. \end{cases} \quad (7.11)$$

onde η é uma constante positiva pequena. De acordo com a equação (7.9) ou (7.10) temos que $I(\eta) = 1$, para qualquer valor de η , $\eta \neq 0$.

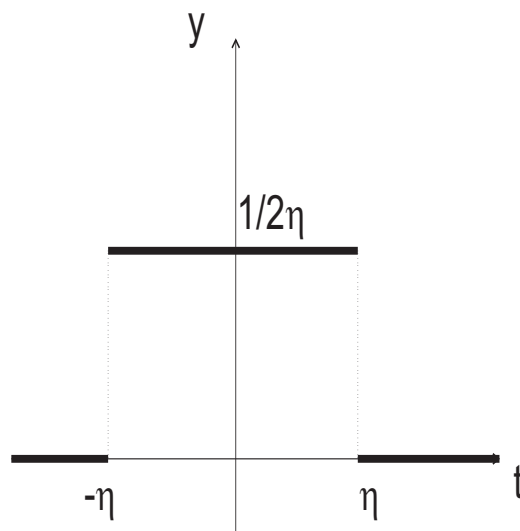


Figura 2.7: A função $y = g(t)$

Agora temos que

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} d_\eta(t) = 0, \quad t \neq 0. \quad (7.12)$$

além disso, como $I(\eta) = 1$ para cada $\eta \neq 0$, temos

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} I(\eta) = 1. \quad (7.13)$$

Utilizamos (7.12) e (7.13) para definir a "função" δ , dada por

$$\delta(t) = 0, \quad t \neq 0; \quad (7.14)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (7.15)$$

A "função" δ definida por (7.14) e (7.15), é um exemplo de "funções generalizadas" ou "função delta" de Dirac. Como $\delta(t)$ representa um "impulso unitário em $t = 0$ ", um impulso num ponto arbitrário $t = t_0$, é dado por $\delta(t - t_0)$. Temos que

$$\delta(t - t_0) = 0, \quad t \neq t_0. \quad (7.16)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1. \quad (7.17)$$

A transformada de Laplace de δ é definida como

$$\mathcal{L}[\delta(t - t_0)] = \lim_{\eta \rightarrow 0} \mathcal{L}[d_\eta(t - t_0)] \quad (7.18)$$

note que se $\eta \rightarrow 0$, então $\eta < t_0$, logo $t_0 - \eta > 0$. Como $d_\eta(t - t_0)$ é não nulo somente no intervalo $(t_0 - \eta, t_0 + \eta)$ então

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[d_\eta(t - t_0)] &= \int_0^{\infty} e^{-st} d_\eta(t - t_0) dt \\ &= \int_{t_0 - \eta}^{t_0 + \eta} e^{-st} d_\eta(t - t_0) dt \end{aligned} \quad (7.19)$$

substituindo o valor de $d_\eta(t - t_0)$ temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[d_\eta(t - t_0)] &= \frac{1}{2\eta} \int_{t_0 - \eta}^{t_0 + \eta} e^{-st} dt \\ &= -\frac{1}{2\eta} e^{-st} \Big|_{t=t_0 - \eta}^{t=t_0 + \eta} = \frac{1}{2\eta} e^{-st} [e^{s\eta} - e^{-s\eta}] \end{aligned} \quad (7.20)$$

ou

$$\mathcal{L}[d_\eta(t - t_0)] = \frac{\sinh s\eta}{s\eta} e^{-st_0}$$

O quociente $\frac{\sinh s\eta}{s\eta}$ é indeterminado quando $\eta \rightarrow 0$, mas podemos avaliar seu limite pela regra de L'Hôpital. Obtemos

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\sinh s\eta}{s\eta} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{s \cosh s\eta}{s} = 1$$

Da equação (7.18) segue que,

$$\mathcal{L}[\delta(t - t_0)] = e^{-st_0}. \quad (7.21)$$

Fazendo $t_0 \rightarrow 0$, obtemos

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \lim_{t_0 \rightarrow 0} e^{-st_0} = 1 \quad (7.22)$$

De modo análogo, é possível definir a integral do produto da função delta por qualquer função contínua. Temos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt = \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} d_{\eta}(t - t_0) f(t) dt \quad (7.23)$$

Pela definição (7.11) e pelo teorema do valor médio para integrais, temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} d_{\eta}(t - t_0) f(t) dt = \frac{1}{2\eta} \int_{t_0 - \eta}^{t_0 + \eta} f(t) dt = \frac{1}{2\eta} 2\eta f(t^*) = f(t^*).$$

onde $t_0 - \eta < t^* < t_0 + \eta$. Assim, $t^* \rightarrow t_0$ quando $\eta \rightarrow 0$, logo,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt = f(t_0).$$

Exemplo 2.7.1 *Ache a solução do seguinte problema*

$$y'' + 2y' + 2y = \delta(t - \pi); \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Tomando a transformada de Laplace da equação diferencial, obtemos

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + 2sY(s) - y(0) + 2Y(s) = e^{-\pi s}$$

ou

$$(s^2 + 2s + 2)Y(s) = s + 1 + e^{-\pi s}$$

ou ainda

$$Y(s) = \frac{s + 1}{s^2 + 2s + 2} + \frac{e^{-\pi s}}{s^2 + 2s + 2}$$

daí

$$Y(s) = \frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 1} + \frac{e^{-\pi s}}{(s + 1)^2 + 1}$$

Agora

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 1} \right\} = e^{-t} \cos t \quad e \quad \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s + 1)^2 + 1} \right\} = e^{-t} \sin t$$

Logo

$$y = \mathcal{L}^{-1} \{Y(s)\} = e^{-t} \cos t + u_{\pi}(t) e^{-(t-\pi)} \sin(t - \pi)$$

ou

$$y = \begin{cases} e^{-t} \cos t, & 0 < t < \pi \\ e^{-t} \cos t + e^{-(t-\pi)} \sin(t - \pi), & t \geq \pi. \end{cases}$$

2.8 Integral de Convolução

Teorema 2.8.1 Se $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ e $G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$, ambas existirem para $s > a \geq 0$, então

$$H(s) = F(s)G(s) = \mathcal{L}[h(t)], \quad s > a,$$

onde

$$h(t) = \int_0^t f(t-\eta)g(\eta) d\eta = \int_0^t f(\eta)g(t-\eta) d\eta. \quad (8.24)$$

A função h é denominada a convolução de f e g , as integrais acima são denominadas de integrais de convolução.

Denotamos a integral em (8.24) por

$$h(t) = (f * g)(t) \quad (8.25)$$

Propriedades da Convolução

$$f * g = g * f$$

$$f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2$$

$$f * (g * h) = (f * g) * h$$

$$f * 0 = 0 * f = 0$$

Não é verdade que $f * 1 = f$. De fato,

$$(f * 1)(t) = \int_0^t f(t-\tau)1 d\tau = \int_0^t f(t-\tau) d\tau.$$

Por exemplo, se $f(t) = \cos t$, então

$$(f * 1)(t) = \int_0^t \cos(t-\tau) d\tau = -\sin(t-\tau)|_0^t = -\sin 0 + \sin t = \sin t.$$

Não é verdade também que $f * f \geq 0$.

As integrais de convolução aparecem em diversas aplicações nas quais o comportamento do sistema, no instante t , depende não apenas de seu estado no instante t mas também de sua história passada. Os sistemas deste tipo são chamados sistemas hereditários (ou de memória) e ocorrem em campos como o transporte de nêutrons, a visco-elasticidade, e a dinâmica das populações.

Prova do Teorema. Se

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-s\xi} f(\xi) d\xi$$

$$G(s) = \int_0^\infty e^{-s\eta} g(\eta) d\eta$$

então

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty e^{-s\xi} f(\xi) d\xi \int_0^\infty e^{-s\eta} g(\eta) d\eta$$

Daí

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty g(\eta) \int_0^\infty e^{-s(\xi+\eta)} f(\xi) d\xi d\eta$$

faça $\xi = t - \eta$, η fixo temos

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty g(\eta) \int_\eta^\infty e^{-st} f(t - \eta) dt d\eta$$

faça $\eta = \tau$ obtemos

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty g(\tau) \int_\tau^\infty e^{-st} f(t - \tau) dt d\tau$$

se invertemos a ordem de integração temos

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty e^{-st} \int_0^t g(\tau) f(t - \tau) d\tau dt$$

ou seja

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty e^{-st} h(t) dt.$$

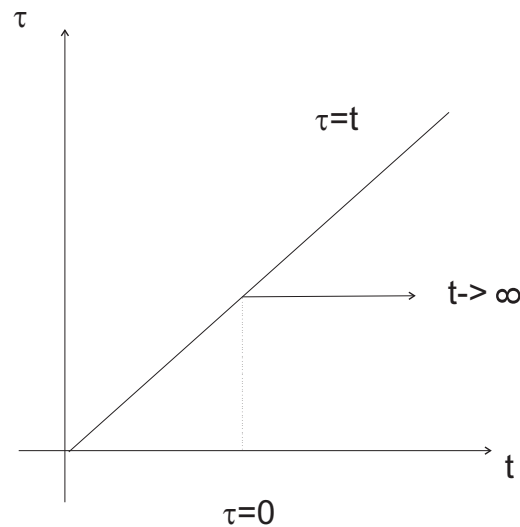


Figura 2.8: Mudança de ordem de integração

Exemplo 2.8.2 Achar a transformada inversa de

$$H(s) = \frac{a}{s^2(s^2 + a^2)} = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{a}{s^2 + a^2}$$

Sabemos que $\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s^2}] = t$ e $\mathcal{L}^{-1}[\frac{a}{s^2 + a^2}] = \text{sen} at$. Assim

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = \int_0^t (t - \tau) \text{sen} a\tau d\tau = \frac{at - \text{sen} at}{a^2}.$$

Exemplo 2.8.3 Achar a solução do problema de valor inicial a seguir:

$$y'' + 4y = g(t),$$

$$y(0) = 3, y'(0) = -1.$$

Tomando a transformada de Laplace da equação diferencial temos:

$$s^2 Y(s) - 3s + 1 + 4Y(s) = G(s),$$

ou

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{3s - 1}{s^2 + 4} + \frac{G(s)}{s^2 + 4} \\ &= 3 \frac{s}{s^2 + 4} - \frac{1}{2} \frac{2}{s^2 + 4} + \frac{1}{2} \frac{2}{s^2 + 4} G(s) \end{aligned}$$

desse modo,

$$y(t) = 3 \cos t - \frac{1}{2} \sin 2t + \frac{1}{2} \int_0^t \sin(2t - 2\tau) g(\tau) d\tau.$$

Considere o problema constituído pela equação diferencial

$$ay'' + by' + cy = g(t)$$

onde a , b e c são constantes reais e g é uma função dada, junto com as condições iniciais

$$y(0) = y_0, y'(0) = y_1.$$

Os coeficientes a , b e c descrevem propriedades de um sistema físico e $g(t)$ é a entrada no sistema. Os valores y_0 e y_1 descrevem o estado inicial do sistema, e a solução y é a resposta do sistema no instante t .

Tomando a transformada de Laplace no sistema obtemos:

$$(as^2 + bs + c)Y(s) - (as + b)y_0 + ay_1 = G(s)$$

daí se definimos

$$\Phi(s) = \frac{(as + b)y_0 + ay_1}{as^2 + bs + c}, \quad \Psi(s) = \frac{G(s)}{as^2 + bs + c}$$

podemos escrever

$$Y(s) = \Phi(s) + \Psi(s)$$

então

$$y(t) = \phi(t) + \psi(t)$$

onde $\phi(t) = \mathcal{L}^{-1}[\Phi(s)]$ e $\psi(t) = \mathcal{L}^{-1}[\Psi(s)]$, temos que $\phi(t)$ é solução de

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1$$

e $\psi(t)$ é solução de

$$ay'' + by' + cy = g(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Para encontrar $\phi(t) = \mathcal{L}^{-1}[\Phi(s)]$ consulta-se a tabela. E para achar $\psi(t) = \mathcal{L}^{-1}[\Psi(s)]$ é conveniente escrever

$$\Psi(s) = H(s)G(s),$$

onde $H(s) = (as^2 + bs + c)^{-1}$. H é a função de transferência, e depende somente das propriedades do sistema considerado, i.e., $H(s)$ está determinada por a , b e c . $G(s)$ depende da excitação externa $g(t)$ aplicada no sistema. Pelo teorema de convolução podemos escrever

$$\psi(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)G(s)] = \int_0^t h(t - \tau)g(\tau)d\tau,$$

onde $h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)]$ e $g(t)$ é a função de entrada dada.

Exemplo 2.8.4 *Ache a transformada inversa de*

$$F(s) = \frac{s}{(s+1)(s^2+4)} = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{s}{s^2+4}.$$

Temos que $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = e^{-t}$ e $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} = \cos 2t$. Logo

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \int_0^t e^{-(t-\tau)} \cos 2\tau \, d\tau = \int_0^t \cos 2(t - \tau) e^{-\tau} \, d\tau.$$

Exemplo 2.8.5 *Considere o problema abaixo*

$$y'' + 2y' + 2y = \text{sen}\alpha t, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Temos que

$$Y(s) = \frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2} \cdot \frac{1}{s^2 + 2s + 2} = \frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2} \cdot \frac{1}{(s+1)^2 + 1}.$$

Sabemos que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2 + 1}\right\} = e^{-t}\text{sen}t, \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}\right\} = \text{sen}\alpha t$$

Assim

$$y(t) = \int_0^t e^{-(t-\eta)} \text{sen}(t - \eta) \text{sen}\alpha\eta \, d\eta.$$

Teorema 2.8.6 *Se $\mathcal{L}[f] = \phi(s)$, então*

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \phi(s).$$

Demonstração: Derivando ambos os membros da equação

$$\phi(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

n vezes com relação a s . Desta forma,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \phi(s) &= \frac{d}{ds} \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \\ &= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s} [e^{-st} f(t)] dt \\ &= - \int_0^\infty e^{-st} t f(t) dt \\ &= -\mathcal{L}[tf(t)], \end{aligned}$$

e assim por diante. Desta vez, a fórmula correspondente expressa em termos de $\mathcal{L}^{-1}$ é

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{d^n}{ds^n} \phi(s)\right] = (-1)^n t^n \mathcal{L}^{-1}[\phi(s)].$$

Exemplo 2.8.7

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[t \operatorname{sent}] &= -\frac{d}{ds} [\operatorname{sent}] \\ &= -\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s^2 + 1} \right) \\ &= \frac{2s}{(s^2 + 1)^2}. \end{aligned}$$

Exemplo 2.8.8

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[t^n] &= (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \mathcal{L}[1] \\ &= (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \left(\frac{1}{s} \right) \\ &= (-1)^n (-1)^n \frac{n!}{s^{n+1}} \\ &= \frac{n!}{s^{n+1}}. \end{aligned}$$

Exemplo 2.8.9 Calcular $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2 + 1)^2}\right]$. Comparando $\frac{1}{(s^2 + 1)^2}$ com $\frac{d}{ds}(1/(s^2 + 1))$ vemos que

$$\frac{1}{(s^2 + 1)^2} = -\frac{1}{2s} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s^2 + 1} \right),$$

a aplicando a fórmula anterior, temos

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2 + 1)^2}\right] = -\frac{1}{2} \int_0^t \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s^2 + 1} \right)\right] dt.$$

Mas daí

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s^2 + 1} \right) \right] = -t \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2 + 1} \right] = -t \text{sent}.$$

Logo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s^2 + 1)^2} \right] &= -\frac{1}{2} \int_0^t (-t \text{sent}) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t t \text{sent} dt \\ &= -\frac{1}{2} t \cos t + \frac{1}{2} \text{sent}. \end{aligned}$$

Para finalizar essa seção, vamos estudar o cálculo da transformada de Laplace de uma função periódica.

Teorema 2.8.10 *Se f é de ordem exponencial e é periódica de período T , então*

$$\mathcal{L}[f] = \frac{\int_0^T e^{-st} f(t) dt}{1 - e^{-Ts}}.$$

Demonstração: Por definição,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f] &= \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \\ &= \int_0^T e^{-st} f(t) dt + \int_T^{2T} e^{-st} f(t) dt + \dots \\ &\quad + \int_{nT}^{(n+1)T} e^{-st} f(t) dt + \dots \end{aligned}$$

Fazendo $x + nT = t$ na $(n+1)$ -ésima integral da série acima, e obtemos

$$\begin{aligned} \int_{nT}^{(n+1)T} e^{-st} f(t) dt &= \int_0^T e^{-s(x+nT)} f(x + nT) dx \\ &= e^{-nTs} \int_0^T e^{-sx} f(x) dx, \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f] &= \int_0^T e^{-sx} f(x) dx + e^{-Ts} \int_0^T e^{-sx} f(x) dx + \dots \\ &\quad + e^{-nTs} \int_0^T e^{-sx} f(x) dx + \dots \\ &= [1 + e^{-Ts} + e^{-2Ts} + \dots] \int_0^T e^{-sx} f(x) dx. \end{aligned}$$

Mas a soma da série geométrica

$$1 + e^{-Ts} + \dots + e^{-nTs} + \dots$$

é $1/(1 - e^{-Ts})$, segue-se que

$$\mathcal{L}[f] = \frac{\int_0^T e^{-st} f(t) dt}{1 - e^{-Ts}}.$$

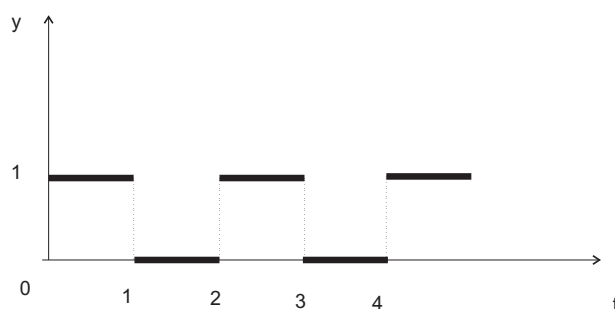


Figura 2.9: Função periódica de período 2

Exemplo 2.8.11 Calcule a transformada de Laplace da função cujo gráfico se mostra na figura 2.9. Neste caso, f é periódica de período 2, donde

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f] &= \frac{\int_0^2 e^{-st} f(t) dt}{1 - e^{-2s}} \\ &= \frac{\int_0^1 e^{-st} dt}{1 - e^{-2s}} \\ &= \frac{1 - e^{-s}}{s(1 - e^{-2s})} \\ &= \frac{1}{s(1 + e^{-s})}.\end{aligned}$$

2.9 Exercícios

1. Nos problemas abaixo determinar se f é contínua, ou contínua por partes ou nem uma coisa nem outra, no intervalo $0 \leq t \leq 3$

$$\begin{aligned}\text{a) } f(t) &= \begin{cases} t^2, & 0 \leq t \leq 1 \\ 2+t, & 1 < t \leq 2 \\ 6-t, & 2 < t \leq 3 \end{cases} & \text{b) } f(t) &= \begin{cases} t^2, & 0 \leq t \leq 1 \\ (t-1)^{-1}, & 1 < t \leq 2 \\ 1, & 2 < t \leq 3 \end{cases} \\ \text{c) } f(t) &= \begin{cases} t^2, & 0 \leq t \leq 1 \\ 1, & 1 < t \leq 2 \\ 3-t, & 2 < t \leq 3 \end{cases} & \text{d) } f(t) &= \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 3-t, & 1 < t \leq 2 \\ 1, & 2 < t \leq 3 \end{cases}\end{aligned}$$

2. Achar a Transformada de Laplace de cada uma das seguintes funções:

(a) t (b) t^2 (c) t^n , com n inteiro e positivo.

3. Lembrar que $\cosh bt = \frac{(e^{bt} + e^{-bt})}{2}$ e $\sinh bt = \frac{(e^{bt} - e^{-bt})}{2}$. Nos problemas abaixo, achar a Transformada de Laplace da função dada; a e b são constantes reais.

4. Das funções abaixo descritas quais as que são contínuas por partes em $[0, \infty)$? Justifique sua resposta.

(a) e^{t^2} (b) $\ln(t^2 + 1)$ (c) $\frac{t+1}{t-1}$ (d) $\frac{t-2}{t^2-t-2}$ (e) $e^{1/t}$.

5. O limite $\lim_{t \rightarrow 0^+} (t \operatorname{sen} \frac{1}{t})$ existe? $t \operatorname{sen} \frac{1}{t}$ é contínua por partes em $[0, \infty)$?

6. Determine a transformada de Laplace de cada uma das seguintes funções. Suponha que a é sempre constante.

(a) $\operatorname{sen}(t+a)$ (b) $(t+a)^n, n \in \mathbb{Z}^+$ (c) $\operatorname{sen} hat$
 (d) $t^2 e^{at}$ (e) $\operatorname{sen}^2 at$ (f) $t^2 \cos t$.

7. Mostre que

$$\mathcal{L}[\cos^3 t] = \frac{s(s^2 + 7)}{(s^2 + 9)(s^2 + 1)}.$$

8. Calcule $\mathcal{L}[e^t \operatorname{sen} t]$. (Sugestão: Aplique a fórmula de derivação.)

9. Resolva cada um dos seguintes problemas de valores iniciais, usando a transformada de Laplace.

(a) $y'' - 3y' + 2y = 0; y(0) = 3, y'(0) = 4$.
 (b) $y'' + y = t; y(0) = -1; y'(0) = 3$.
 (c) $y''' + y'' + 4y' + 4y = -2; y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = -1$.
 (d) $y'' - y' - 6y = 3t^2 + t - 1; y(0) = -1, y'(0) = 6$.

10. Nos problemas abaixo achar a transformada de Laplace Inversa.

(a) $\frac{s}{s^2 + 4}$ (b) $\frac{s}{(s-1)^3}$ (c) $\frac{2}{s^2 + 3s - 4}$ (d) $\frac{2s-3}{s^2 + 2s + 10}$.

11. Achar a solução do problema de valor inicial proposto, mediante as transformadas de Laplace.

a) $y'' + 2y' + 2y = \delta(t - \pi), y(0) = 1, y'(0) = 0$.

b) $y'' + 2y'y = \delta(t) + u_{2\pi}, y(0) = 0, y'(0) = 1$.

c) $y'' + y = \delta(t - \pi) \cos t, y(0) = 1, y'(0) = 1$.

12. (a) Mostrar, pelo método da variação dos parâmetros, que a solução do problema de valor inicial

$$y'' + 2y + 2y = f(t), y(0) = 0, y'(0) = 0,$$

é

$$y = \int_0^t e^{-(t-\tau)} f(\tau) \operatorname{sen}(t - \tau) d\tau.$$

(b) Mostrar que se $f(t) = \delta(t - \pi)$, então a solução da parte (a) se reduz a

$$y = u_\pi(t) e^{-(t-\pi)} \operatorname{sen}(t - \pi).$$

13. Provar as propriedades comutativa, distributiva e associativa da integral de convolução
 (a) $f * g = g * f$ (b) $f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2$ (c) $f * (g * h) = (f * g) * h$.
14. Mostrar mediante o exemplo com $f(t) = \operatorname{sen} t$, que $f * f$ não é necessariamente não-negativo.
15. Nos problemas abaixo, achar a transformada de Laplace da função dada.
 (a) $f(t) = \int_0^t (t - \tau)^2 \cos 2\tau d\tau$ (b) $f(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)} \operatorname{sen} \tau d\tau$
 (c) $f(t) = \int_0^t (t - \tau) e^\tau d\tau$ (d) $f(t) = \int_0^t \operatorname{sen}(t - \tau) \cos \tau d\tau$.
16. Nos problemas abaixo, achar a transformada de Laplace inversa dada, mediante o teorema de convolução ao.
 (a) $F(s) = \frac{1}{s^4(s^2 + 1)}$ (b) $F(s) = \frac{s}{(s + 1)(s^2 + 4)}$ (c) $F(s) = \frac{1}{(s + 1)^2(s^2 + 4)}$.
17. Expressar a solução do problema de valor inicial em termos de uma integral de convolução.
 (a) $y'' + 2y' + 2y = \operatorname{sen} \alpha t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
 (b) $y''y' + \frac{5}{4}y = 1 - u_\pi(t)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.
 (c) $y'' + 3y' + 2y = \cos \alpha t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
18. Consideremos a equação integral

$$\phi(t) + \int_0^t (t - \psi) \phi(\psi) d\psi = \operatorname{sen} 2t$$

(a) Mostrar que se u for tal que $u''(t) = \phi(t)$, então

$$u''(t) + u(t) - tu'(0) - u(0) = \operatorname{sen} 2t.$$

(b) Mostrar que a equação integral dada é equivalente ao problema de valor inicial

$$u''(t) + u(t) = \operatorname{sen} 2t, \quad u(0) = u'(0) = 0.$$

(c) Resolver a equação integral mediante a transformada de Laplace.

(d) Resolver o problema em (b) e verificar que a solução é a mesma que obtida em (c).

Capítulo 3

Soluções por Séries de Eq. Dif. de 2ª ordem

3.1 Introdução

Neste capítulo estudaremos o método de soluções de equações diferenciais usando séries de potências, que é um método muito eficiente, mas também extremamente trabalhoso. É preciso muito cuidado e paciência quando estiver aplicando esse método, para não cometer algum engano que possa comprometer o resultado do problema que se pretende resolver. Essencialmente, esse método consiste em procurar soluções de equações diferenciais dadas por uma função y que tomamos na forma de série, isto é, consideramos $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, e nosso principal interesse é determinar os coeficientes a_n , encontrando assim a função y solução da equação diferencial requerida.

Vamos estudar equações de 2ª ordem da forma

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0 \quad (1.1)$$

Vamos por simplicidade considerar os casos em que P , Q e R são polinômios. Estamos interessados na solução da equação (1.1) nas vizinhanças de um ponto x_0 . Pode acontecer que para esse ponto x_0 , $P(x_0) \neq 0$. Então x_0 é um *ponto ordinário* da equação (1.1). Se $P(x_0) = 0$, então x_0 é um *ponto singular* da equação (1.1).

Para soluções da equação (1.1) consideramos funções da forma:

$$y = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n. \quad (1.2)$$

Surgem duas questões: Podemos determinar "formalmente" os a_n de modo que y , dada por (1.2) satisfaça (1.1)? A segunda é se a série assim determinada realmente converge e, sendo assim, para que valores de $x - x_0$?

3.2 Séries de Potências

Séries dadas por (1.2) são conhecidas como séries de potências de $x - x_0$. Temos aqui alguns resultados de séries:

1. Diz-se que uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ converge num ponto x se $\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m a_n(x-x_0)^n$ existe. Esta série para $x = x_0$, obviamente, converge. Ela pode convergir para todo x , ou pode convergir para alguns valores de x e não para outros.
2. Diz-se que a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ converge absolutamente num ponto x se a série $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x-x_0)^n|$ converge. Pode-se mostrar que se a série converge absolutamente então ela converge, mas a recíproca nem sempre é verdade.
3. Um dos testes mais úteis para a convergência absoluta de série de potências é o teste da Razão. Se para um valor fixo x

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n} \right| = |x-x_0| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l$$

a série de potências converge absolutamente neste valor de x se $l < 1$ e diverge se $l > 1$. Se $l = 1$, não se conclui nada.

4. Se a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ convergir em $x = x_1$, ela convergirá absolutamente para $|x-x_0| < |x_1-x_0|$, e se divergir em $x = x_1$, ela divergirá para $|x-x_0| > |x_1-x_0|$.
5. Existe um número $\rho > 0$, denominado o "raio de convergência", tal que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ converge absolutamente para $|x-x_0| < \rho$ e diverge para $|x-x_0| > \rho$. Para uma série que não converge em nenhum ponto exceto em x_0 , definimos ρ como zero; para uma série que converge para todo x , dizemos que ρ é infinito.
6. As séries podem ser somadas ou subtraídas termo a termo e

$$f(x) \pm g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)(x-x_0)^n.$$

7. As séries podem ser multiplicadas

$$f(x)g(x) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n \right] = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$$

onde $c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0$. Além disso, se $g(x_0) \neq 0$, as séries podem ser divididas

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(x-x_0)^n.$$

8. A função é contínua e tem derivadas de todas as ordens para $|x - x_0| < \rho$. Além disso, $f', f'', \dots$, podem ser obtidas derivando-se as séries termo a termo, i. e.,

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + \dots + na_n(x - x_0)^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x - x_0)^{n-1}$$

etc, e cada uma das séries convergem para $|x - x_0| < \rho$.

9. O valor de a_n é dado por

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

A série é denominada série de Taylor para função f em torno de x_0 .

10. Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n$, para cada x , então $a_n = b_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$.
Em particular, se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = 0$ para cada x , então $a_0 = a_1 = \dots = a_n = \dots = 0$.

Uma função f que tem uma expansão em série de Taylor em torno de $x = x_0$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

com um raio de convergência $\rho > 0$, é dita *analítica* em $x = x_0$. De acordo com as condições acima mencionadas, se f e g são analíticas em x_0 , então $f \pm g$, fg e f/g ($g(x_0) \neq 0$) são analíticas em $x = x_0$. O mesmo resultado vale para analiticidade em todos os pontos.

Mudança do Índice do somatório

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^j x^j}{j!}; \quad \sum_n b_n x^n = \sum_k b_k x^k$$

1.

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n &= a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots + a_n x^n + \dots \\ &= a_{0+2} x^{0+2} + a_{1+2} x^{1+2} + \dots + a_{m+2} x^{m+2} + \dots \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+2} x^{m+2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} x^{n+2} \end{aligned}$$

2.

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n+2)(n+1)a_n(x-2)^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+4)(n+3)a_{n+2}(x-2)^n.$$

3.

$$x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (n+r-1)a_{n-1} x^{n+r}$$

4.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \implies$$

$$(n+1) a_{n+1} = a_n, \quad n = 0, 1, \dots$$

ou

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1} \longrightarrow a_1 = \frac{a_0}{1}, \quad a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{a_0}{2}, \quad a_3 = \frac{a_2}{3} = \frac{a_0}{3 \cdot 2}, \dots$$

$$a_n = \frac{a_0}{n!}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Assim

$$\sum a_n x^n = a_0 \sum \frac{x^n}{n!}.$$

3.3 Soluções por série próximo a um ponto ordinário

Estamos interessados em resolver

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0 \quad (3.3)$$

com P , Q e R funções reais definidas na vizinhança de um ponto x_0 , com $P(x_0) \neq 0$. Se chamamos $p(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$ e $q(x) = \frac{R(x)}{P(x)}$ então a equação (3.3) pode ser escrita na forma

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (3.4)$$

se p e q forem analíticas em x_0 , então x_0 é um ponto ordinário da equação (3.3), do contrário, x_0 é ponto singular de (3.3). Procuramos então soluções da forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad (3.5)$$

que será a solução geral de (3.3), ou seja, $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$, onde a_0 e a_1 são constantes arbitrárias, e y_1 e y_2 são soluções por série, linearmente independentes, analíticas em x_0 . Além disso, o raio de convergência para cada y_i é, ao menos, tão grande quanto o mínimo dos raios de convergência para as séries de p e q . Temos que $p(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$ tem uma expansão em série convergente em torno de um ponto $x = x_0$, se $P(x_0) \neq 0$. Além disso, o raio de convergência da série de potências de p em torno de $x = x_0$ é a distância de x_0 ao zero mais próximo de P .

Exemplo 3.3.1 Qual o raio de convergência da série de Taylor para $(x^2 - 2x + 2)^{-1}$ em torno de $x = 0$? E em torno de $x = 1$?

Note que

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

tem soluções $x = 1 \pm i$. A distância de $x = 0$ a $1 + i$ ou $x = 0$ a $1 - i$ no plano complexo é $\sqrt{2}$; desse modo, o raio de convergência da expansão em série de Taylor para $(x^2 - 2x + 2)^{-1}$ em torno de $x = 0$ é $\sqrt{2}$.

A distância de $x = 1$ a $x = 1 + i$ ou $x = 1$ a $x = 1 - i$ é 1, logo, o raio de convergência da expansão em série de Taylor para $(x^2 - 2x + 2)^{-1}$ em torno de $x = 1$ é 1.

Exemplo 3.3.2 Vamos achar uma solução por série da equação

$$y'' + y = 0, \quad -\infty < x < \infty. \quad (3.6)$$

Já sabemos que $\sin x$ e $\cos x$ formam um conjunto fundamental de soluções desta equação. Vamos encontrar estas mesmas soluções usando série de potências. Para esta equação $P(x) = 1$, $Q(x) = 0$ e $R(x) = 1$; assim $x = 0$ é um ponto ordinário. Vamos procurar solução da forma

$$y = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n \quad (3.7)$$

Derivando termo a termo, temos

$$y' = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1} \quad (3.8)$$

$$y'' = 2a_2 + \cdots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \cdots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2} \quad (3.9)$$

Substituindo as séries (3.7), (3.8 e (3.9) obtemos

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = 0$$

fazendo uma mudança de índice do somatório, obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = 0$$

Desse modo obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} ((n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n)x^n = 0$$

daí

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n = 0, \quad n = 0, 1, \cdots \quad (3.10)$$

a equação (3.10) é chamada uma relação de recorrência. vamos encontrar os a_n pares e os a_n ímpares separadamente, temos que

$$a_{n+2} = -a_n / (n+2)(n+1)$$

logo

$$a_2 = -\frac{a_0}{2} = -\frac{a_0}{2!}; \quad a_4 = -\frac{a_2}{4 \cdot 3} = \frac{a_0}{4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{a_0}{4!};$$

e em geral, se $n = 2k$, então

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!} a_0, \quad k = 1, 2, \dots$$

De modo análogo,

$$a_3 = -\frac{a_1}{3 \cdot 2} = -\frac{a_1}{3!}; \quad a_5 = -\frac{a_3}{5 \cdot 4} = \frac{a_1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{a_1}{5!};$$

e, em geral, se $n = 2k + 1$ então

$$a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} a_1, \quad k = 1, 2, \dots$$

Deste modo, a série (3.7) toma a seguinte forma

$$y = a_0 + a_1 x - \frac{a_0}{2!} x^2 - \frac{a_1}{3!} x^3 + \dots + \frac{(-1)^k}{(2k)!} a_0 x^{2k} + \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} a_1 x^{2k+1} + \dots$$

ou seja

$$y = a_0 \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + \dots \right] + a_1 \left[x - \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \dots \right]$$

ou

$$y = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + a_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

A primeira série é a série de Taylor de $\cos x$, e a segunda série é a série de Taylor de $\sin x$. Obtemos então

$$y = a_0 \cos x + a_1 \sin x$$

onde a_0 e a_1 são constantes arbitrárias. Isto confirma o resultado já esperado das soluções do problema (3.6).

Exemplo 3.3.3 A equação de Hermite é

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0, \quad -\infty < x < \infty \quad (3.11)$$

com λ constante.

Procuramos soluções nas vizinhanças do ponto ordinário $x = 0$, substituímos as séries

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

em (3.11) para obter

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n x^n = 0$$

ou

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n x^n = 0$$

ou ainda

$$2a_2 + \lambda a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+2)(n+1) a_{n+2} - 2n a_n + \lambda a_n] x^n = 0$$

assim $a_2 = -\frac{\lambda a_0}{2}$, e a relação de recorrência geral é

$$a_{n+2} = \frac{2n - \lambda}{(n+2)(n+1)} a_n, \quad n \geq 1.$$

Note que a_0 determina a_2 , que determina a_4 , etc. Analogamente, são determinados os $a_3, a_5, \dots$, em função de a_1 . Ou seja

$$\begin{aligned} a_4 &= \frac{(4-\lambda)}{4 \cdot 3} a_2 = \frac{(4-\lambda)(-\lambda)}{4 \cdot 3 \cdot 2} a_0 \\ a_6 &= -\frac{(8-\lambda)(4-\lambda)\lambda}{6!} a_0 \\ &\vdots \\ a_{2k} &= \frac{-[2(2k-2)-\lambda][2(2(k-1)-2)-\lambda] \cdots [4-\lambda]\lambda}{(2k)!} a_0 \end{aligned}$$

para os termos ímpares temos

$$a_3 = \frac{2-\lambda}{3 \cdot 2} a_1; \quad a_5 = \frac{(6-\lambda)(2-\lambda)}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} a_1; \quad a_7 = \frac{(10-\lambda)(6-\lambda)(2-\lambda)}{7!} a_1$$

desse modo

$$\begin{aligned} y &= a_0 \left[1 - \frac{\lambda}{2!} x^2 - \frac{(4-\lambda)\lambda}{4!} x^4 - \frac{(8-\lambda)(4-\lambda)\lambda}{6!} x^6 - \dots \right] \\ &+ a_1 \left[x + \frac{(2-\lambda)}{3!} x^3 + \frac{(6-\lambda)(2-\lambda)}{5!} x^5 + \frac{(10-\lambda)(6-\lambda)(2-\lambda)}{7!} x^7 + \dots \right] \end{aligned}$$

isto é,

$$y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$$

onde y_1 é a função definida pela série que multiplica a_0 e y_2 é a função definida pela série que multiplica a_1 , sem dificuldade se mostra que y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções para esse problema. Naturalmente, se λ é um inteiro par não-negativo, uma ou outra das séries acima tem uma soma finita. Em particular, para $\lambda = 0, 2, 4, 6$, respectivamente, uma solução da equação de Hermite é, $1, x, 1 - 2x^2, x - \frac{2}{3}x^3$.

3.4 Equação de Euler

A equação de Euler é uma equação do tipo

$$L[y] = x^2 y'' + \alpha x y' + \beta y = 0 \quad (4.12)$$

onde α, β são constantes. O ponto $x = 0$ é um ponto singular regular. Em todo intervalo que não contém a origem a equação (4.12) tem uma solução geral da forma $y = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$, onde y_1 e y_2 são L.I.. Vamos considerar o intervalo $x > 0$ (analogamente, tem-se o caso $x < 0$). Considerando que a equação (4.12) tem uma solução da forma

$$y = x^r \quad (4.13)$$

obtemos

$$\begin{aligned} L[x^r] &= x^2 (x^r)'' + \alpha x (x^r)' + \beta x^r \\ &= x^r [r(r-1) + \alpha r + \beta] \end{aligned}$$

e se r for uma raiz da equação

$$F(r) = r(r-1) + \alpha r + \beta = 0 \quad (4.14)$$

então $L[x^r] = 0$ e $y = x^r$ é solução de (4.12). As raízes são:

$$r_1, r_2 = \frac{-(\alpha - 1) \pm \sqrt{(\alpha - 1)^2 - 4\beta}}{2}.$$

Temos três casos a considerar:

- 1) Raízes reais e desiguais;
- 2) Raízes reais e iguais;
- 3) Raízes complexas.

1^o Caso: Se $F(r) = 0$ e r_1 e r_2 são reais e $r_1 \neq r_2$ então $y_1(x) = x^{r_1}$ e $y_2(x) = x^{r_2}$ são soluções de (4.12). Uma vez que $W(x^{r_1}, x^{r_2}) = (r_1 - r_2)x^{r_1+r_2-1}$ não é nulo segue-se que

$$y = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_2}, \quad x > 0, \quad (4.15)$$

é a solução geral de (4.12).

Exemplo 3.4.1 Resolver a equação

$$2x^2 y'' + 3xy' - y = 0, \quad x > 0 \quad (4.16)$$

Sol.: Temos que se $y = x^r$ então obtemos

$$x^r[2r(r-1) + 3r - 1] = 0$$

$$x^r(2r^2 + r - 1) = 0$$

$$x^r(2r-1)(r+1) = 0$$

e temos as seguintes raízes $r_1 = \frac{1}{2}$ e $r_2 = -1$ desse modo

$$y = c_1 x^{\frac{1}{2}} + c_2 x^{-1} \quad (4.17)$$

é a solução de (4.16).

2º Caso: Se as raízes r_1 e r_2 forem iguais, isto é, $r_1 = r_2$, chegamos somente a solução $y = x^{r_1}$ e $F(r) = (r - r_1)^2$. Para encontrar uma segunda solução, observe que

$$\frac{\partial}{\partial r} L[x^r] = \frac{\partial}{\partial r} [x^r F(r)] = F(r)x^r \ln x + 2(r - r_1)x^r$$

daí

$$L[x^r \ln x] = F(r)x^r \ln x + 2(r - r_1)x^r,$$

fazendo $r = r_1$, obtemos:

$$L[x^{r_1} \ln x] = 0$$

portanto,

$$y_2 = x^{r_1} \ln x \quad (4.18)$$

é uma segunda solução de (4.12). A solução geral é

$$y = (c_1 + c_2 \ln x)x^{r_1}, \quad x > 0. \quad (4.19)$$

O wronskiano é dado por

$$W(x^{r_1}, x^{r_1} \ln x) = x^{2r_1-1} \neq 0$$

logo, y_1 e y_2 são L. I. .

Exemplo 3.4.2 *Resolver a equação*

$$x^2 y'' + 5xy' + 4y = 0, \quad x > 0 \quad (4.20)$$

Fazendo $y = x^r$, obtemos

$$x^r(r^2 + 4r + 4) = 0$$

o que implica em $r_1 = r_2 = -2$. Logo, a solução geral de (4.20) é

$$y = x^{-2}(c_1 + c_2 \ln x), \quad x > 0.$$

3º Caso: Raízes complexas, neste caso, $r_1 = \lambda + i\mu$ e $r_2 = \lambda - i\mu$, $\mu \neq 0$. Temos que

$$x^r = e^{r \ln x}$$

logo

$$\begin{aligned} x^{\lambda+i\mu} &= e^{(\lambda+i\mu) \ln x} = e^{\lambda \ln x} e^{i\mu \ln x} \\ &= x^\lambda [\cos(\mu \ln x) + i \operatorname{sen}(\mu \ln x)], \quad x > 0. \end{aligned}$$

a solução complexa geral é

$$y = c_1 x^{\lambda+i\mu} + c_2 x^{\lambda-i\mu}.$$

Queremos soluções reais, portanto, consideramos as funções

$$x^\lambda \cos(\mu \ln x) \quad \text{e} \quad x^\lambda \operatorname{sen}(\mu \ln x)$$

que são soluções de (4.12) e

$$W(x^\lambda \cos(\mu \ln x), x^\lambda \operatorname{sen}(\mu \ln x)) = \mu x^{2\lambda-1} \neq 0$$

segue que elas são L. I.. Logo, a solução geral de (4.12) é

$$y = c_1 x^\lambda \cos(\mu \ln x) + c_2 x^\lambda \operatorname{sen}(\mu \ln x), \quad x > 0. \quad (4.21)$$

Exemplo 3.4.3 Resolver a equação diferencial

$$x^2 y'' + x y' + y = 0. \quad (4.22)$$

Sol.: Fazendo $y = x^r$ temos

$$x^r(r^2 + 1) = 0.$$

Logo a solução geral de (4.22) é

$$y = c_1 \cos(\ln x) + c_2 \operatorname{sen}(\ln x), \quad x > 0.$$

3.5 Pontos singulares

Consideremos a equação

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0 \quad (5.23)$$

nas vizinhanças de um ponto singular $x = x_0$.

Exemplo 3.5.1 *Determine os pontos singulares e os pontos ordinários da equação de Bessel de ordem ν*

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0. \quad (5.24)$$

Sol.: O ponto $x = 0$ é ponto singular, pois $P(x) = x^2$ se anula em $x = 0$. Todos os outros pontos são pontos ordinários da equação (5.24).

Exemplo 3.5.2 *Idem para a equação de Legendre*

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0, \quad \alpha \text{ constante.} \quad (5.25)$$

Sol.: Os pontos singulares são $x = \pm 1$ e os outros pontos são ordinários.

Exemplo 3.5.3 *A equação diferencial*

$$x^2 y'' - 2y = 0 \quad (5.26)$$

tem um ponto singular em $x = 0$. Pode-se verificar que, para $x > 0$ ou $x < 0$, $y = x^2$ e $y = \frac{1}{x}$ são soluções L. I. da equação (5.26). Assim num intervalo qualquer que não contenha a origem, a solução geral é $y = c_1 x^2 + c_2 x^{-1}$. ($y = x^{-1}$ não é analítica em $x = 0$; $y = x^2$ é analítica em todo ponto x).

Exemplo 3.5.4 *A equação diferencial*

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0 \quad (5.27)$$

tem um ponto singular em $x = 0$, $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x^2$ são soluções L. I. de (5.27) e analíticas em $x = 0$. Mas não se pode colocar um p. v. i. com c. i. em $x = 0$.

Que comportamento tem a solução da equação diferencial (5.23) quando x se aproxima de um ponto singular $x = x_0$?

Se P, Q e R forem polinômios e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) \frac{Q(x)}{P(x)} \quad \text{é finito} \quad (5.28)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^2 \frac{R(x)}{P(x)} \quad \text{é finito} \quad (5.29)$$

então x_0 é *ponto singular regular*. Para funções mais gerais que polinômios x_0 será um *ponto singular regular* da equação (5.23) se x_0 for um ponto singular e se ambas

$$(x - x_0) \frac{Q(x)}{P(x)} \quad \text{e} \quad (x - x_0)^2 \frac{R(x)}{P(x)}$$

forem analíticas em $x = x_0$. Do contrário, o ponto singular é *irregular*.

Exemplo 3.5.5 No exemplo 2 observamos que os pontos singulares da equação de Legendre

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0, \quad \alpha \text{ constante}$$

são $x = \pm 1$. Determine se esses pontos singulares são pontos singulares regulares ou irregulares.

Sol.: Temos que para a equação de Legendre

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{-2x}{1 - x^2}, \quad \frac{R(x)}{P(x)} = \frac{\alpha(\alpha + 1)}{1 - x^2}$$

assim

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) \frac{-2x}{1 - x^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{1 + x} = 1$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)^2 \frac{\alpha(\alpha + 1)}{1 - x^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\alpha(\alpha + 1)(1 - x)}{1 + x} = 0,$$

como estes limites são finitos, o ponto $x = 1$ é um ponto singular regular. Analogamente, mostra-se que $x = -1$ também é um ponto singular regular.

3.6 Método de Frobenius

Teorema 3.6.1 Qualquer equação diferencial da forma

$$y'' + \frac{a(x)}{x}y' + \frac{b(x)}{x^2}y = 0 \quad (6.30)$$

onde $a(x)$ e $b(x)$ são analíticas em $x = 0$, possui no máximo uma solução que pode ser representada sob a forma

$$y(x) = x^r \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m = x^r (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_m x^m + \cdots) \quad (6.31)$$

onde o expoente r pode ser qualquer número, real ou complexo, e é escolhido de modo que $c_0 \neq 0$.

Observação: Note que se temos uma equação

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0 \quad (6.32)$$

onde $x = x_0$, seja um ponto singular regular da equação diferencial (6.32) então

$$(x - x_0) \frac{Q(x)}{P(x)} \quad \text{e} \quad (x - x_0)^2 \frac{R(x)}{P(x)}$$

são analíticas em $x = x_0$. Assim, definindo $p(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$ e $q(x) = \frac{R(x)}{P(x)}$, temos

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

e também

$$y'' + \frac{(x - x_0)p(x)}{x - x_0}y' + \frac{(x - x_0)^2q(x)}{(x - x_0)^2}y = 0 \quad (6.33)$$

chamando $a(x) = (x - x_0)p(x)$ e $b(x) = (x - x_0)^2q(x)$, obtemos

$$y'' + \frac{a(x)}{(x - x_0)}y' + \frac{b(x)}{(x - x_0)^2}y = 0 \quad (6.34)$$

com a e b analíticas em $x = x_0$. Vemos que (6.34) é equivalente a (6.30), com $x - x_0 = t$, e $a_1(t) = a(t + x_0)$, $b_2(t) = b(t + x_0)$ analíticas em $t = 0$. O método que vamos apresentar agora para resolver (6.30) é chamado *método de Frobenius*. Para resolver (6.30), é conveniente apresentá-la sob a forma

$$x^2y'' + xa(x)y' + b(x)y = 0. \quad (6.35)$$

Inicialmente, desenvolvemos $a(x)$ e $b(x)$ em séries de potências, $|x| < R$, $R > 0$.

$$a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ e } b(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

em seguida derivamos (6.31) termo a termo,

$$y'(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (m + r) c_m x^{m+r-1} = x^{r-1} [c_0 r + (r + 1)c_1 x + \dots]$$

$$y''(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (m + r)(m + r - 1) c_m x^{m+r-2} = x^{r-2} [r(r - 1)c_0 + (r + 1)rc_1 x + \dots]$$

substituindo estas séries em (6.30) obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} (m + r)(m + r - 1) c_m x^{m+r} + \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} (m + r) c_m x^{m+r} \right) \\ + \left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m x^{m+r} \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m \right) = 0 \end{aligned} \quad (6.36)$$

Vimos que

$$\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^m a_j b_{m-j} \right) x^m$$

desse modo (6.36) se torna

$$x^r \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \left[(m + r)(m + r - 1) c_m + \sum_{j=0}^m (j + r) c_j a_{m-j} + \sum_{j=0}^m c_j b_{m-j} \right] x^m \right\} = 0 \quad (6.37)$$

Por conseguinte (6.37) satisfará a equação diferencial (6.30) no intervalo $0 < x < R$ se, e somente se,

$$(m+r)(m+r-1)c_m + \sum_{j=0}^m [(j+r)c_j a_{m-j} + c_j b_{m-j}] = 0 \quad (6.38)$$

para todo $m \geq 0$. Quando $m = 0$, a equação (6.38) se reduz a

$$[r(r-1) + ra_0 + b_0]c_0 = 0$$

como não queremos $c_0 = 0$ então devemos ter

$$r(r-1) + a_0 r + b_0 = 0 \quad (6.39)$$

quando $m \geq 1$ a equação (6.38) se torna

$$[(m+r)(m+r-1) + (m+r)a_0 + b_0]c_m + \sum_{j=0}^{m-1} [(j+r)a_{m-j} + b_{m-j}]c_j = 0. \quad (6.40)$$

A relação (6.39) é conhecida como *equação indicial* associada à equação (6.35). E suas raízes, que determinam os valores admissíveis de r em (6.31), são os *expoentes característicos* da equação. Temos três casos a considerar:

Caso I. As raízes da equação indicial são distintas e não diferem de um inteiro. ($r_1 \neq r_2$, $r_1 - r_2 \neq N$)

Caso II. A equação indicial possui raiz dupla. ($r_1 = r_2$).

Caso III. As raízes da equação indicial diferem de um inteiro. ($r_1 - r_2 = N$).

Observação. A troca $x = -\xi$, $\xi > 0$, implica numa solução y em séries de potências, semelhante à dada por (6.31), no intervalo $-R < x < 0$. Logo teremos uma solução y em $0 < |x| < R$.

Caso I: Chamando $I(r) = r(r-1) + a_0 r + b_0$ e escolhendo r_1 e r_2 raízes da equação indicial $I(r) = 0$, de modo que $\text{Re}(r_1) \geq \text{Re}(r_2)$. Então obtemos de (6.40) que

$$c_m = - \sum_{j=0}^{m-1} [(j+r_1)a_{m-j} + b_{m-j}]c_j / I(m+r_1) \quad (6.41)$$

com $I(m+r_1) \neq 0$, devido à forma como r_1 foi escolhido. A equação (6.41) determina todos os c_m , $m = 1, 2, \dots$ em termos de c_0 . Assim

$$y_1(x) = |x|^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

é uma solução de (6.35) com c_0 arbitrário e os c_n determinados por (6.41), no intervalo $0 < |x| < R$.

Uma segunda solução de (6.35) pode ser obtida da equação (6.40) se $r_1 \neq r_2$ e $r_1 - r_2 \neq N$ com N inteiro, isto é,

$$c_m^* = - \sum_{j=0}^{m-1} [(j+r_2)a_{m-j} + b_{m-j}]c_j^*/I(m+r_2). \quad (6.42)$$

A solução será dada por

$$y_2(x) = |x|^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n^* x^n, \quad c_0^* \neq 0, \quad (6.43)$$

em $0 < |x| < R$. Mostra-se que y_1 e y_2 são L.I. e portanto a solução geral de (6.35) é

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x).$$

Exemplo 3.6.2 *Caso I: Consideremos a equação diferencial*

$$x^2 y'' + (x^2 + \frac{5}{36})y = 0. \quad (6.44)$$

Substituindo $y = x^r \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$, nesta equação obtemos

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r+2} + \frac{5}{36} \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r} = 0 \quad (6.45)$$

Igualando a soma dos coeficientes de x^r a zero obtemos a equação indicial

$$r(r-1) + \frac{5}{36} = 0 \quad (6.46)$$

cujas raízes são $r_1 = \frac{5}{6}$ e $r_2 = \frac{1}{6}$. Igualando a zero os coeficientes de x^{r+m} em (6.45) obtemos:

$$[(r+1)r + \frac{5}{36}]c_1 = 0 \quad (m=1) \quad (6.47)$$

$$(m+r)(m+r-1)c_m + c_{m-2} + \frac{5}{36}c_m = 0, \quad (m=2, 3, \dots) \quad (6.48)$$

Determinamos em primeiro lugar, a solução $y_1(x)$ que corresponde a $r_1 = \frac{5}{6}$. Para este valor de r , a equação (6.47) fornece $c_1 = 0$. A equação (6.48) pode ser escrita como

$$m(m + \frac{2}{3})c_m + c_{m-2} = 0. \quad (6.49)$$

De $c_1 = 0$, segue que $c_3 = 0, c_5 = 0, \dots$. Fazendo $m = 2p$ em (6.49) obtemos

$$c_{2p} = -\frac{3}{4} \frac{c_{2p-2}}{p(3p+1)} \quad (6.50)$$

daí

$$c_2 = -\frac{3}{4} \frac{c_0}{4}$$

$$c_4 = -\frac{3}{4} \frac{c_2}{2.7} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \frac{c_0}{2!4.7}$$

Assim obtemos

$$y_1(x) = c_0 \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \left(\frac{3}{4}\right)^p \frac{x^{2p+\frac{5}{6}}}{p!1.4...(3p+1)} \quad (6.51)$$

A outra solução $y_2(x)$ pode ser obtida de maneira semelhante quando se faz $r_2 = \frac{1}{6}$. Temos

$$(a) \quad [(r_2 + 1)r_2 + \frac{5}{6}]c_1^* = 0 \quad (6.52)$$

$$(b) \quad (m + r_2)(m + r_2 - 1)c_m^* + c_{m-2}^* + \frac{5}{36}c_m^* = 0, \quad m = 2, 3, \dots \quad (6.53)$$

De (6.52) vemos que $c_1^* = 0$ e (6.53) pode ser escrita como

$$m(m - \frac{2}{3})c_m^* + c_{m-2}^* = 0 \quad (m = 2, 3, \dots) \quad (6.54)$$

como $c_1^* = 0$ então $c_3^* = 0, \dots$, fazendo $m = 2p$, temos

$$c_{2p}^* = -\frac{3}{4} \frac{c_{2p-2}^*}{p(3p-1)} \quad (p = 1, 2, \dots) \quad (6.55)$$

Logo

$$y_2(x) = c_0^* x^{\frac{1}{6}} + c_0^* \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \left(\frac{3}{4}\right)^p \frac{x^{2p+\frac{1}{6}}}{p!2.5...(3p-1)} \quad (6.56)$$

a solução geral é:

$$y(x) = c_0 y_1(x) + c_0^* y_2(x).$$

Caso II. Definindo o operador L da seguinte forma

$$L[y] = x^2 y'' + xa(x)y' + b(x)y \quad (6.57)$$

A equação indicial possui uma raiz dupla: $r_1 = r_2$. Tomemos

$$y = \phi(x, r) = x^r \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \quad (6.58)$$

substituindo y na equação (6.57) devemos obter

$$L[\phi(x, r)] = x^2 \phi'' + xa(x)\phi' + b(x)\phi \quad (6.59)$$

ou seja

$$\begin{aligned} 0 = L[\phi(x, r)] &= I(r)c_0 x^r + \sum_{k=1}^{\infty} [(k+r)(k+r-1) + (k+r)a_0 + b_0] c_k \\ &+ \sum_{j=0}^{k-1} [(j+r)a_{k-j} + b_{k-j}] c_j x^{r+k} \end{aligned} \quad (6.60)$$

escolhendo c_k , $k = 1, 2, \dots$, como função de r de tal modo que

$$c_k(r) = -\frac{1}{I(k+r)} \sum_{j=0}^{k-1} [(j+r)a_{k-j} + b_{k-j}] c_j \quad (6.61)$$

então $y = \phi(x, r)$ satisfaz a equação

$$L[\phi(x, r)] = I(r)c_0x^r \quad (6.62)$$

onde

$$\phi(x, r) = x^r \left(c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(r)x^k \right) \quad (6.63)$$

Como r_1 é raiz dupla de $I(r)$ temos que

$$L[\phi(x, r)] = (r - r_1)^2 c_0 x^r \quad (6.64)$$

o que implica

$$L[\phi(x, r_1)] = 0$$

e, precisamente $\phi(x, r_1) = y_1(x)$ e como $L[y_1] = 0$ então temos que há uma concordância com os resultados obtidos anteriormente. Para se obter uma segunda solução, temos

$$L \left[\frac{\partial \phi}{\partial r}(x, r) \right] = \frac{\partial}{\partial r} L[\phi(x, r)] = 2(r - r_1)c_0x^r + (r - r_1)^2 c_0 x^r \ln x \quad (6.65)$$

Dai

$$L \left[\frac{\partial \phi}{\partial r}(x, r_1) \right] = 0$$

escolhendo, portanto,

$$y_2(x, r_1) = \frac{\partial}{\partial r} y_1(x, r)|_{r=r_1} = x^{r_1} \sum_{k=1}^{\infty} c'_k(r_1)x^k + y_1(x, r_1) \ln x \quad (6.66)$$

esta é a forma da segunda solução da equação (6.35) L. I. com $y_1(x)$.

Exemplo 3.6.3 *Caso II. Resolver a equação diferencial*

$$x(x-1)y'' + (3x-1)y' + y = 0. \quad (6.67)$$

Tomando $y(x)$ na forma

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r}$$

derivando e substituindo em (6.67) obtemos

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r} - \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r-1}$$

$$+3 \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)c_m x^{m+r} - \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)c_m x^{m+r-1} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r} = 0 \quad (6.68)$$

A menor potência é x^{r-1} ; igualando a soma de seus coeficientes a zero, temos

$$[-r(r-1) - r]c_0 = 0 \quad \text{ou} \quad r^2 = 0.$$

Assim, a equação indicial possui a raiz dupla $r = 0$. Substituindo este valor em (6.68) e igualando a soma dos coeficientes da potência de x^m a zero encontramos

$$m(m-1)c_m - (m+1)mc_{m+1} + 3mc_m - (m+1)c_{m+1} + c_m = 0$$

ou $c_{m+1} = c_m$. Então, $c_0 = c_1 = c_2 = \dots$, e escolhendo $c_0 = 1$ obtemos

$$y_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} x^m = \frac{1}{1-x}.$$

Para obter uma segunda solução, substituímos $y_2 = vy_1$ em (6.67) obtendo,

$$x(x-1)(v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1'') + (3x-1)(v'y_1 + vy_1') + vy_1 = 0$$

como y_1 é solução de (6.67) esta expressão se reduz a

$$x(x-1)(v''y_1 + 2v'y_1') + (3x-1)v'y_1 = 0.$$

Substituindo as expressões para y_1 e y_1' e simplificando vem

$$xv'' + v' = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{v''}{v'} = -\frac{1}{x}$$

Integrando duas vezes obtemos finalmente

$$y_2 = vy_1 = \frac{\ln x}{1-x}.$$

caso III:

$$y'' + \frac{a(x)}{x}y' + \frac{b(x)}{x^2}y = 0, \quad (6.69)$$

tomamos

$$y = x^r \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m = x^r (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots) \quad (c_0 \neq 0) \quad (6.70)$$

Temos que

$$y'(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)c_m x^{m+r-1}$$

$$y''(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r-2}$$

substituindo em (6.69) obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r} + \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} (m+r)c_m x^{m+r} \right) \\ + \left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r} \right) = 0 \end{aligned} \quad (6.71)$$

ou

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^m a_j (m+r-j)c_{m-j} x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^m b_j c_{m-j} x^{m+r} = 0$$

ou ainda

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left[(m+r)(m+r-1)c_m + \sum_{j=0}^m a_j (m+r-j)c_{m-j} + \sum_{j=0}^m b_j c_{m-j} \right] x^{m+r} = 0$$

temos daí

$$\begin{aligned} [(m+r)(m+r-1) + a_0(m+r) + b_0] c_m \\ + \sum_{j=0}^m [a_j(m+r-j)c_{m-j} + b_j c_{m-j}] = 0, \quad \forall m = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (6.72)$$

e

$$[r^2 + (a_0 - 1)r + b_0] c_0 = 0$$

segue que

$$r^2 + (a_0 - 1)r + b_0 = 0 \quad (6.73)$$

é a equação indicial do problema. Seja

$$L(m+r) = [(m+r)(m+r-1) + a_0(m+r) + b_0]$$

e suponha r_1 e r_2 raízes de (6.73) tais que, $r_1 - r_2 = n_0$, $n \in \mathbb{Z}$. Uma solução será dada por

$$y_1(x) = x^{r_1}(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots), \quad r_1 \geq r_2 \quad (6.74)$$

onde

$$c_m = - \sum_{j=1}^m (a_j(m+r-j) + b_j)c_{m-j} / L(m+r), \quad m = 1, 2, \dots \quad (6.75)$$

Vamos procurar uma outra solução, considere

$$y_2(x) = u(x)y_1(x) \quad (6.76)$$

temos que

$$y_2'(x) = u'(x)y_1(x) + u(x)y_1'(x)$$

$$y_2''(x) = u''(x)y_1(x) + 2u'(x)y_1(x) + u(x)y_1''(x)$$

substituindo em (6.69) obtemos

$$x^2 y_1 u'' + 2x^2 y_1' u' + x a(x) y_1 u' = 0$$

ou

$$u'' + \left(2 \frac{y_1'}{y_1} + \frac{a(x)}{x} \right) u' = 0$$

agora

$$y_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r_1}$$

$$y_1'(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (m+r_1) c_m x^{m+r_1-1}$$

$$a(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$$

segue que

$$2 \frac{y_1'}{y_1} + \frac{a(x)}{x} = \frac{2r_1 + a_0}{x} + k_1 x + k_2 x^2 + \cdots + a_1 + a_2 x + \cdots$$

logo

$$u'' + \left(\frac{2r_1 + a_0}{x} + a_1 + (k_1 + a_2)x + (k_2 + a_3)x^2 + \cdots \right) u' = 0$$

sabemos que $a_0 - 1 = -(r_1 + r_2)$. Como $r_1 - r_2 = n_0 \Rightarrow r_2 = r_1 - n_0 \Rightarrow a_0 - 1 = n_0 - 2r_1 \Rightarrow 2r_1 + a_0 = n_0 + 1$, obtemos

$$\frac{u''}{u'} = - \left(\frac{n_0 + 1}{x} + a_1 + (k_1 + a_2)x + (k_2 + a_3)x^2 + \cdots \right)$$

integrando

$$\ln u' = - (n_0 + 1) \ln x + a_1 x + (k_1 + a_2) \frac{x^2}{2} + \cdots$$

ou

$$u' = x^{-(n_0+1)} e^{a_1 x + (k_1 + a_2) \frac{x^2}{2} + \cdots}$$

desenvolvendo a exponencial em potencias de x

$$e^{a_1 x + (k_1 + a_2) \frac{x^2}{2} + \cdots} = 1 + \mu_1 x + \mu_2 x^2$$

$$+ \cdots + \mu_{n_0} x^{n_0} + \mu_{n_0+1} x^{n_0+1} + \mu_{n_0+2} x^{n_0+2} + \cdots$$

dai

$$u' = \frac{1}{x^{n_0+1}} + \frac{\mu_1}{x^{n_0}} + \cdots + \frac{\mu_{n_0}}{x} + \mu_{n_0+1} + \mu_{n_0+2} x + \cdots$$

integrando

$$u = -\frac{1}{n_0 x^{n_0}} - \frac{\mu_1}{(n_0 - 1)x^{n_0-1}} - \cdots + \mu_{n_0} \ln x + \mu_{n_0+1}x + \cdots$$

multiplicando esta serie por $y_1(x)$, e notando que $r_1 - n_0 = r_2$, obtemos

$$y_2(x) = \mu_{n_0} y_1(x) \ln x + x^{r_2} \sum_{m=0}^{\infty} c_m^* x^m$$

Exemplo 3.6.4 *Caso III. Considere a equação diferencial*

$$(x^2 - 1)x^2 y'' - (x^2 + 1)xy' + (x^2 + 1)y = 0. \quad (6.77)$$

Sol.: Seja

$$y(x) = x^r \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$$

substituindo y , y' e y'' em (6.77) obtemos

$$\begin{aligned} & (x^2 - 1) \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r} \\ & - (x^2 + 1) \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)c_m x^{m+r} + (x^2 + 1) \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r} = 0, \end{aligned}$$

daí, temos

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+r-1)^2 c_m x^{m+r+2} - \sum_{m=0}^{\infty} (m+r+1)(m+r-1)c_m x^{m+r} = 0 \quad (6.78)$$

igualando a zero o coeficiente de x^r obtemos

$$(r+1)(r-1) = 0$$

cujas raízes são $r_1 = 1$ e $r_2 = -1$ e diferem por um inteiro. Igualando a zero o coeficiente de x^{r+1} em (6.78) temos

$$-(r+2)rc_1 = 0.$$

Tanto para $r = r_1$ como $r = r_2$ esta equação implica $c_1 = 0$. Igualando a soma dos coeficientes de x^{m+r+2} em (6.78) a zero, temos

$$(m+r-1)^2 c_m = (m+r+3)(m+r+1)c_{m+2} \quad (6.79)$$

substituindo $r = r_1 = 1$ e determinando c_{m+2} vem

$$c_{m+2} = \frac{m^2}{(m+4)(m+2)} c_m$$

como $c_1 = 0$ segue-se que $c_3 = 0$, $c_5 = 0$, etc. Para $m = 0$ obtemos $c_2 = 0$, e daí, tomando $m = 2, 4, \dots$, obtemos $c_4 = 0$, $c_6 = 0$, etc. Assim, à maior raiz $r_1 = 1$ corresponde a solução

$$y_1(x) = c_0 x.$$

Substituindo a raiz menor $r = r_2 = -1$ em (6.79) temos

$$(m-2)^2 c_m = (m+2) m c_{m+2}$$

com $m = 0$ esta expressão se torna $4c_0 = 0 \Rightarrow c_0 = 0$ (contradição com $c_0 \neq 0$). Do teorema acima segue que y_2 deve ser da forma

$$y_2(x) = kx \ln x + \frac{1}{x} \sum_{m=0}^{\infty} c_m^* x^m.$$

Substituindo esta expressão e suas derivadas na equação diferencial, obtemos

$$(x^2 - 1)x^2 \left(\frac{k}{x} + \sum_{m=0}^{\infty} (m-1)(m-2)c_m^* x^{m-3} \right) - (x^2 + 1)x \left(k \ln x + k + \sum_{m=0}^{\infty} (m-1)c_m^* x^{m-2} \right) + (x^2 + 1) \left(kx \ln x + \sum_{m=0}^{\infty} c_m^* x^{m-1} \right) = 0$$

Os termos logarítmicos se cancelam, e simplificando temos

$$-2kx + \sum_{m=0}^{\infty} (m-2)^2 c_m^* x^{m+1} - \sum_{m=0}^{\infty} m(m-2)c_m^* x^{m-1} = 0$$

ou

$$-2kx + \sum_{m=1}^{\infty} (m-3)^2 c_{m-1}^* x^m - \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)(m-1)c_{m+1}^* x^m = 0$$

daí temos: $c_1^* = 0$ ($m = 0$), $-2k + 4c_0^* = 0$ ($m = 1$) e

$$(m-3)^2 c_{m-1}^* - (m^2 - 1)c_{m+1}^* = 0 \quad (m = 2, 3, \dots).$$

Temos que

$$c_{m+1}^* = \frac{(m-3)^2}{m^2 - 1} c_{m-1}^*$$

Como $c_1^* = 0 \Rightarrow c_3^* = 0, c_5^* = 0$, etc. E $m = 3$ fornece $c_4^* = 0$ e assim $c_6^* = 0, c_8^* = 0, \dots$ $k = 2c_0$ e c_2 são arbitrários. Logo

$$y_2(x) = 2c_0 x \ln x + \frac{1}{x} (c_0 + c_2 x^2)$$

Como o último termo é $c_2 y_1 / c_0$ podemos tomar $c_2 = 0$. Logo

$$y_2(x) = c_0 \left[2x \ln x + \frac{1}{x} \right].$$

Fazendo $c_0 = 1$, obtemos

$$y_2(x) = 2x \ln x + \frac{1}{x}.$$

Temos estabelecido o seguinte resultado que engloba todos os casos.

Teorema 3.6.5 *Seja*

$$x^2 y'' + xa(x)y' + b(x)y = 0 \quad (6.80)$$

uma equação diferencial linear homogênea de segunda ordem, cujos coeficientes são analíticos no intervalo $|x| < R$. Sejam r_1 e r_2 raízes da equação indicial

$$r(r-1) + a(0)r + b(0) = 0,$$

e suponhamos r_1 e r_2 indexados de modo que $\text{Re}(r_1) \geq \text{Re}(r_2)$. Então, (6.80) tem duas soluções l.i. y_1 e y_2 , válidas para $0 < |x| < R$, cujas formas dependem de r_1 e r_2 como segue:

Caso 1: $r_1 - r_2 \neq N$, $N \in \mathbb{Z}$. Então,

$$y_1(x) = |x|^{r_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad c_0 \neq 0,$$

$$y_2(x) = |x|^{r_2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k^* x^k, \quad c_0^* \neq 0.$$

Caso 2: $r_1 = r_2$. Então

$$y_1(x) = |x|^{r_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad c_0 \neq 0,$$

$$y_2(x) = |x|^{r_1} \sum_{k=1}^{\infty} c'_k(r_1) x^k + y_1(x) \ln |x|.$$

Caso 3: $r_1 - r_2 = N$, $N \in \mathbb{Z}^+$. Então,

$$y_1(x) = |x|^{r_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad c_0 \neq 0,$$

$$y_2(x) = |x|^{r_2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k^* x^k + c y_1(x) \ln |x|, \quad c_0^* \neq 0, \quad c \text{ constante fixa.}$$

3.7 Equação de Bessel de Primeira Espécie

Equação de Bessel

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \quad (7.81)$$

onde ν é um número dado. Seja ν real e não-negativo. Tomemos

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r}, \quad c_0 \neq 0 \quad (7.82)$$

substituindo y e suas derivadas y' e y'' em (7.81) obtemos:

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)c_m x^{m+r} \\ + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r+2} - \nu^2 \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r} = 0 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)c_m x^{m+r} \\ + \sum_{m=2}^{\infty} c_{m-2} x^{m+r} - \nu^2 \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r} = 0 \end{aligned}$$

Para $m = 0$, temos:

$$(a) \quad c_0[r(r-1) + r - \nu^2] = 0 \quad \text{ou} \quad c_0(r^2 - \nu^2) = 0$$

Para $m = 1$, temos

$$(b) \quad [(1+r)r + (1+r) - \nu^2]c_1 = 0$$

para $m = k$, temos

$$(c) \quad (k+r)(k+r-1)c_k + (k+r)c_k + c_{k-2} - \nu^2 c_k = 0, \quad k \geq 2$$

De (a) decorre

$$(r + \nu)(r - \nu) = 0$$

as raízes são $r_1 = \nu$ e $r_2 = -\nu$. Vamos determinar uma solução que corresponde à raiz r_1 . Para este valor de r , a equação (b) nos fornece $c_1 = 0$. A equação (c) pode ser escrita como

$$(k + r + \nu)(k + r - \nu)c_k + c_{k-2} = 0. \quad (7.83)$$

Como $c_1 = 0$ e $\nu \geq 0$ segue-se que $c_3 = 0$, $c_5 = 0$, $\dots$, e assim por diante. Se fizermos $k = 2m$ em (7.83) obtemos

$$c_{2m} = -\frac{1}{2^2 m(m + \nu)} c_{2m-2}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (7.84)$$

e poderemos determinar os coeficientes $c_2, c_4, \dots$, sucessivamente. O coeficiente c_0 é arbitrário.

É usual fazer

$$c_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)}$$

voltando ao nosso problema, obtemos

$$c_2 = -\frac{c_0}{2^2(\nu + 1)} = -\frac{1}{2^{2+\nu} 1! \Gamma(\nu + 2)}$$

$$c_4 = -\frac{c_2}{2^2 2(\nu+2)} = \frac{1}{2^{4+\nu} 2! \Gamma(\nu+3)}$$

e assim por diante; em geral

$$c_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m+\nu} m! \Gamma(\nu+m+1)}$$

Substituindo estes coeficientes em (7.82) e recordando que $c_1 = 0$, $c_3 = 0, \dots$, obtemos uma solução particular da Equação de Bessel que é representada por $J_\nu(x)$:

$$J_\nu(x) = x^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{(2m+\nu)} m! \Gamma(\nu+m+1)}. \quad (7.85)$$

Esta solução é conhecida como função de Bessel de primeira espécie de ordem ν . Os valores inteiros de ν se representados por n nos dá:

$$J_n(x) = x^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{(2m+n)} m! (n+m)!}. \quad (7.86)$$

Substituindo ν por $-\nu$ em (7.85) obtemos

$$J_{-\nu}(x) = x^{-\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{(2m-\nu)} m! \Gamma(m-\nu+1)}. \quad (7.87)$$

As funções J_ν e $J_{-\nu}$ são soluções da equação (7.81) para o mesmo ν . Eles são linearmente independentes, se ν não for um inteiro. Assim

Solução geral: Se ν não é um inteiro, uma solução geral para a equação de Bessel, para todo $x \neq 0$ é

$$y(x) = a_1 J_\nu(x) + a_2 J_{-\nu}(x). \quad (7.88)$$

Mas quando $\nu = n$ inteiro, (7.88) não é uma solução geral. Pois, neste caso, para $\nu = n$, $J_n(x)$ e $J_{-n}(x)$ são linearmente dependentes, já que

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

Mostra-se que para $\nu_1 = \frac{1}{2}$, $\nu_2 = -\frac{1}{2}$, tem-se

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, \quad J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$$

isto implica que $J_{\frac{1}{2}}$ e $J_{-\frac{1}{2}}$ são l.i. Faça $\nu \rightarrow n$, neste caso, $\Gamma(m-n+1) \rightarrow +\infty$, para $m-n+1 \leq 0$, ou seja, para $0 \leq m \leq n-1$. Logo, o somatório (7.87) principia com $m = n$. Como neste caso, $\Gamma(m-n+1) = (m-n)!$, obtemos

$$J_{-n}(x) = \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m-n}}{2^{(2m-n)} m! (m-n)!} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+s} x^{2s+n}}{2^{(2s+n)} s! (n+s)!}. \quad (7.89)$$

onde fizemos aqui $m = n + s$. Assim $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$.

3.8 Propriedades da Função de Bessel de 1ª Espécie

De (7.85), obtemos

$$x^\nu J_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+2\nu}}{2^{2m+\nu} m! \Gamma(\nu + m + 1)} \quad (8.90)$$

Derivando e usando o fato que $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha)$ temos

$$(x^\nu J_\nu(x))' = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m 2(m + \nu) x^{2m+2\nu-1}}{2^{2m+\nu} m! \Gamma(\nu + m + 1)} = x^\nu x^{\nu-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+\nu-1} m! \Gamma(\nu + m)}$$

De (7.85) segue-se que a última expressão é $x^\nu J_{\nu-1}(x)$ e, portanto,

$$\frac{d}{dx}[x^\nu J_\nu(x)] = x^\nu J_{\nu-1}(x). \quad (8.91)$$

Analogamente, de (7.85) segue-se que

$$(x^{-\nu} J_\nu(x))' = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m-1}}{2^{2m+\nu-1} (m-1)! \Gamma(\nu + m + 1)} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{(s+1)} x^{2s+1}}{2^{2s+\nu+1} s! \Gamma(\nu + m)}$$

onde $m = s + 1$. Como no último membro temos $-x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)$, temos que

$$\frac{d}{dx}[x^{-\nu} J_\nu(x)] = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x). \quad (8.92)$$

Desenvolvendo estas fórmulas e multiplicando a última por $x^{2\nu}$, vem

$$\nu x^{\nu-1} J_\nu(x) + x^\nu J'_\nu(x) = x^\nu J_{\nu-1}(x) \quad (8.93)$$

$$-\nu x^{\nu-1} J_\nu(x) + x^\nu J'_\nu(x) = -x^\nu J_{\nu+1}(x) \quad (8.94)$$

Subtraindo os resultados acima e dividindo por x^ν , temos

$$J_{\nu-1} + J_{\nu+1} = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x)$$

somando (8.93) e (8.94) e dividindo o resultado por x^ν , obtemos

$$J_{\nu-1} - J_{\nu+1} = 2J'_\nu(x).$$

3.9 Equação de Bessel de ordem zero

Fazendo $\nu = 0$ na equação (7.81) temos

$$L[y] = x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0 \quad (9.95)$$

A equação acima é chamada de Equação de Bessel de ordem zero. Vamos procurar soluções para essa equação, suponha

$$y = \phi(r, x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n} \quad (9.96)$$

substituindo este valor de y em (9.95) obtemos

$$\begin{aligned} L[\phi](r, x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n[(n+r)(n+r-1) + (n+r)]x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n+2} \\ &= a_0[r(r-1) + r]x^r + a_1[(r+1)r + (r+1)]x^{r+1} \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \{a_n[(n+r)(n+r-1) + (n+r)] + a_{n-2}\}x^{r+n} = 0 \end{aligned} \quad (9.97)$$

As raízes da equação indicial $F(r) = r(r-1) + r = 0$ são $r_1 = r_2 = 0$ (raízes iguais). A relação de recorrência é:

$$a_n(r) = \frac{-a_{n-2}(r)}{(n+r)(n+r-1) + n+r} = \frac{-a_{n-2}(r)}{(n+r)^2}, \quad n \geq 2. \quad (9.98)$$

A fim de achar $y_1(x)$ fazemos r igual a 0. De (9.97) $a_1 = 0$. Logo, por (9.98), $a_3 = a_5 = \dots = a_{2n+1} = 0 = \dots$. Além disso,

$$a_n(0) = -\frac{a_{n-2}(0)}{n^2}, \quad n = 2, 4, 6, \dots \quad (9.99)$$

ou, fazendo $n = 2m$,

$$a_{2m}(0) = -\frac{a_{2m-2}(0)}{(2m)^2}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Assim

$$\begin{aligned} a_2(0) &= \frac{a_0}{2^2} \\ a_4(0) &= \frac{a_2(0)}{(2.2)^2} = \frac{a_0}{(2.2)^2 \cdot 2^2} = \frac{a_0}{2^4 \cdot 2^2} \\ a_6(0) &= -\frac{a_4(0)}{(2.3)^2} = -\frac{a_0}{(2.3)^2 \cdot 2^4 \cdot 2^2} = -\frac{a_0}{2^6 (2.3)^2} \\ &\vdots \\ a_{2m}(0) &= \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m} (m!)^2}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

segue que a primeira solução da equação de Bessel de ordem zero é

$$y_1(x) = J_0(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{2m} (m!)^2} x^{2m} \quad (9.100)$$

Para encontrar uma segunda solução, temos que

$$a_n(r) = -\frac{a_{n-2}(r)}{(r+n)^2}, \quad n \geq 2$$

ou

$$a_{2k}(r) = -\frac{a_{2k-2}(r)}{(r+2k)^2}$$

daí para $k = 2$ temos

$$a_2(r) = -\frac{a_0}{(r+2)^2}; \quad a'_2(r) = \frac{2a_0}{(r+2)^3} \Rightarrow a'_2(0) = \frac{2a_0}{2^3} = \frac{a_0}{2^2}$$

para $k = 4$,

$$a_4(r) = -\frac{a_2(r)}{(r+4)^2} = \frac{a_0}{(r+4)^2(r+2)^2};$$

$$\Rightarrow a'_4(r) = a_0[-2(r+4)^{-3}(2+r)^{-2} - 2(r+4)^{-2}(r+2)^{-3}]$$

ou

$$a'_4(r) = -2a_0 \left[\frac{1}{(r+4)^3(2+r)^2} + \frac{1}{(r+4)^2(r+2)^3} \right]$$

$$\Rightarrow a'_4(0) = -2a_0 \left[\frac{1}{(4)^3(2)^2} + \frac{1}{(4)^2(2)^3} \right]$$

$$= -\frac{2a_0}{4^2 2^2} \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right] = \frac{-a_0}{(2)^{2.2}(2!)^2} \left[1 + \frac{1}{2} \right]$$

para $k = 6$,

$$a_6(r) = -\frac{a_4(r)}{(r+2.3)^2} = -\frac{a_0}{(r+2.3)^2(r+4)^2(r+2)^2}$$

$$\Rightarrow a'_6(r) = -a_0[-2(r+2.3)^{-3}(r+4)^2(r+2)^2 - 2(r+2.3)^{-2}(r+4)^{-3}(r+2)^{-2}$$

$$- 2(r+2.3)^{-2}(r+4)^{-2}(r+2)^{-3}]$$

ou

$$a'_6(r) = \frac{2a_0}{(r+6)^2(r+4)^2(r+2)^2} \left[\frac{1}{(r+6)} + \frac{1}{(r+4)} + \frac{1}{(r+2)} \right]$$

segue que

$$a'_6(0) = \frac{2a_0}{6^2 4^2 2^2} \left[\frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right]$$

$$= \frac{a_0}{6^2 4^2 2^2} \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 \right]$$

$$= \frac{a_0}{(3!)^2 2^{2.3}} \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 \right]$$

de um modo geral

$$a'_{2k}(0) = \frac{(-1)^k a_0}{(k!)^2 2^{2.k}} \left[1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k} \right]$$

se chamamos

$$H_k = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k}$$

então

$$a'_{2k}(0) = \frac{(-1)^k a_0}{(k!)^2 2^{2.k}} H_k.$$

Para $a_0 = 1$, temos que a segunda solução da equação de Bessel de ordem zero é:

$$y_2(x) = J_0(x) \ln x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} H_m}{(m!)^2 2^{2m}} x^{2m}. \quad (9.101)$$

3.10 Exercícios

1. A equação

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0$$

onde λ é uma constante, é a equação de Hermite. (a) Achar os quatro primeiros termos de duas soluções linearmente independentes, em torno de $x = 0$. (b) Observar que se λ for um inteiro par, não-negativo, então uma ou outra das soluções em série infinita termina e se torna um polinômio. Achar a solução polinomial para $\lambda = 0, 2, 4, 6, 8$ e 10 . (c) O polinômio de Hermite $H_n(x)$ se define como a solução polinomial da equação de Hermite, com $\lambda = 2n$, para a qual o coeficiente de x^n é 2^n . Achar $H_0(x), \dots, H_5(x)$.

2. Nos problemas abaixo determinar a solução geral da equação diferencial dada em torno do ponto singular regular.

(a) $x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$; (b) $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$; (c) $x^2y'' + 3xy' + 5y = 0$.

3. Considere a equação diferencial abaixo, determinar a equação indicial, a relação de recorrência e as raízes da equação indicial. Achar a solução em série ($x > 0$) correspondente a menor e a maior raiz.

$$x^2y'' + xy' + (x - 2)y = 0.$$

4. Nos problemas abaixo, mostrar que a equação diferencial dada tem um ponto singular em $x = 0$ e determinar duas soluções linearmente independentes para $x > 0$.

(a) $x^2y'' + 3xy' + (1 + x)y = 0$; (b) $xy'' + y = 0$.

5. Exprima a solução geral de cada uma das seguintes equações como uma série de potências em torno do ponto $x = 0$.

1. $y'' - 3xy = 0$. 2. $y'' - 3xy' - y = 0$.

3. $(x^2 + 1)y'' - 6y = 0$. 4. $(x^2 + 1)y'' - 8xy' + 15y = 0$.

6. Ache os primeiros quatro termos não nulos da expressão em série da solução de cada um dos seguintes problemas com condição inicial, e determine um intervalo (minimal) de convergência para a série.

1. $y'' + (\sin x)y = 0$; 2. $2y'' - xy = \cos x$;

$y(0) = 1, y'(0) = 0$. $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

3. $(x + 1)y'' + y' + xy = 0$; 4. $(\cos x)y'' + 2xe^xy = 0$;

$y(0) = y'(0) = -1$. $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

7. Ache e classifique todos os pontos singulares para as equações nos problemas abaixo.

1. $x^3(x^2 - 1)y'' - x(x + 1)y' - (x - 1)y = 0$.

2. $(3x - 2)^2 xy'' + xy' - y = 0$.
 3. $(x^4 - 1)y'' + xy' = 0$.
 4. $(x + 1)^4(x - 1)^2 y'' - (x + 1)^3 y' + y = 0$.
 5. $x^3(x + 1)^2 y'' + (x - 1)y' + 2xy = 0$.
8. Ache a equação indicial associada com o ponto singular regular em $x = 0$ para cada uma das seguintes equações:
- (a) $x^2 y'' + xy' - y = 0$.
 - (b) $x^2 y'' - 2x(x + 1)y' + (x - 1)y = 0$.
 - (c) $x^2 y'' - 2xy' + y = 0$.
 - (d) $x^2 y'' - xy' + (x^2 - \lambda^2)y = 0$.
 - (e) $xy'' + (1 - x)y' + \lambda y = 0$.

Capítulo 4

Problema de Sturm Liouville

4.1 Sturm-Liouville

O problema de Sturm-Liouville consiste em encontrar autovalores e autofunções de um operador diferencial e também estabelecer relações de ortogonalidade entre essas autofunções. Começamos este capítulo considerando uma equação diferencial da forma

$$[p(x)y']' - q(x)y + \lambda r(x)y = 0 \quad (1.1)$$

no intervalo $0 < x < 1$, juntamente com as condições de contorno

$$a_1y(0) + a_2y'(0) = 0, \quad b_1y(1) + b_2y'(1) = 0 \quad (1.2)$$

nos pontos extremos. É conveniente, em dados momentos, introduzir o operador diferencial linear homogêneo L definido por

$$L[y] = -[p(x)y']' + q(x)y \quad (1.3)$$

então podemos escrever a equação diferencial 1.1 na forma

$$L[y] = \lambda r(x)y.$$

Consideremos as funções p , p' , q e r contínuas no intervalo $0 \leq x \leq 1$ e, além disso, vamos supor que $p(x) > 0$ e $r(x) > 0$ em todos os pontos desse intervalo. Como exemplo, a equação $y'' + \lambda y = 0$, é da forma 1.1 com $p(x) = 1$, $q(x) = 0$, e $r(x) = 1$.

Identidade de Lagrange

Sejam u e v funções tendo derivadas segundas contínuas no intervalo $0 \leq x \leq 1$. Então

$$\int_0^1 L[u]v \, dx = \int_0^1 \{-(pu')'v + quv\} \, dx$$

Integrando duas vezes o primeiro termo no segundo membro, por partes, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^1 L[u]v \, dx &= -p(x)u'(x)v(x)|_0^1 + p(x)u(x)v'(x)|_0^1 + \int_0^1 \{-u(pv')' + uqv\} \, dx \\ &= -p(x)[u'(x)v(x) - u(x)v'(x)]_0^1 + \int_0^1 uL[v] \, dx \end{aligned}$$

Deste modo, transpondo a integral no segundo membro, temos

$$\int_0^1 \{L[u]v - uL[v]\} \, dx = -p(x)[u'(x)v(x) - u(x)v'(x)]_0^1, \quad (1.4)$$

esta é a identidade de Lagrange.

Suponhamos que as funções u e v também satisfazem as condições de contorno 1.2. Então, considerando $a_2 \neq 0$ e $b_2 \neq 0$, o segundo membro de 1.4 se torna

$$\begin{aligned} &-p(x)[u'(x)v(x) - u(x)v'(x)]_0^1 \\ &= -p(1)[u'(1)v(1) - u(1)v'(1)] + p(0)[u'(0)v(0) - u(0)v'(0)] \\ &= -p(1)\left[-\frac{b_1}{b_2}u(1)v(1) + \frac{b_1}{b_2}u(1)v(1)\right] + p(0)\left[-\frac{a_1}{a_2}u(0)v(0) + \frac{a_1}{a_2}u(0)v(0)\right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

segue que

$$\int_0^1 \{L[u]v - uL[v]\} \, dx = 0 \quad (1.5)$$

Introduzindo o produto interno de duas funções u e v reais num dado intervalo, $0 \leq x \leq 1$, temos

$$(u, v) = \int_0^1 u(x)v(x) \, dx \quad (1.6)$$

Usando esta notação a equação 1.5 se torna

$$(L[u], v) - (u, L[v]) = 0. \quad (1.7)$$

Consideremos que o problema de Sturm-Liouville 1.1, 1.2 tenha autovalores e autofunções. Temos o seguinte resultado.

Teorema 4.1.1 *Todos os autovalores do Problema de Sturm-Liouville 1.1, 1.2 são reais.*

De fato, suponha λ autovalor (possivelmente complexo) do problema 1.1, 1.2 e que ϕ seja uma autofunção correspondente, possivelmente complexa também. Escreva $\lambda = \mu + i\nu$ e $\phi(x) = U(x) + iV(x)$, onde $\mu, \nu, U(x)$ e $V(x)$ são reais. Se supomos que $u = \phi$ e $v = \phi$ em 1.7, teremos

$$(L[\phi], \phi) = (\phi, L[\phi]) \quad (1.8)$$

Entretanto, sabemos que $L[\phi] = \lambda r(x)\phi$, de modo que 1.8 se transforma em

$$(\lambda r(x)\phi, \phi) = (\phi, \lambda r(x)\phi)$$

na forma integral temos

$$\int_0^1 \lambda r(x)\phi(x)\bar{\phi}(x) dx = \int_0^1 \phi(x)\bar{\lambda r(x)\phi}(x) dx$$

como r é real temos

$$(\lambda - \bar{\lambda}) \int_0^1 r(x)\phi(x)\bar{\phi}(x) dx = 0$$

ou

$$(\lambda - \bar{\lambda}) \int_0^1 r(x) [U(x)^2 + V(x)^2] dx = 0 \quad (1.9)$$

O integrando em 1.9 é não-negativo e não identicamente nulo. Como o integrando é também contínuo segue-se que a integral é positiva. Logo $\lambda - \bar{\lambda} = 2i\nu$ é nulo, segue λ é real.

Teorema 4.1.2 *Se ϕ_1 e ϕ_2 forem duas autofunções do problema de Sturm-Liouville 1.1, 1.2 correspondendo aos autovalores λ_1 e λ_2 , respectivamente, e se $\lambda_1 \neq \lambda_2$ então*

$$\int_0^1 r(x)\phi_1(x)\phi_2(x) dx = 0.$$

Ou seja, ϕ_1 e ϕ_2 são ortogonais.

Prova: $L[\phi_1] = \lambda_1 r\phi_1$ e $L[\phi_2] = \lambda_2 r\phi_2$ temos que

$$(\lambda_1 r\phi_1, \phi_2) - (\phi_1, \lambda_2 r\phi_2) = 0$$

daí

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \int_0^1 r\phi_1\phi_2 dx = 0$$

o que implica

$$\int_0^1 r\phi_1\phi_2 dx = 0.$$

Como queríamos demonstrar.

Teorema 4.1.3 *Os autovalores do problema de Sturm-Liouville 1.1, 1.2 são todos distintos e a cada autovalor corresponde uma única autofunção (as autofunções formam um conjunto linearmente independente). Além disso, os autovalores formam uma sequência infinita e podem ser ordenados de forma crescente*

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots$$

ainda mais, $\lambda_n \rightarrow \infty$, quando $n \rightarrow \infty$.

Exemplo 4.1.4 Considere a equação

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0,$$

os autovalores do operador diferencial $L[y] = y''$ são $\lambda_n = n^2\pi^2$ com as autofunções $\phi_n = \text{senn}\pi x$.

$$\int_0^1 \phi_n(x)\phi_m(x) dx = \int_0^1 \text{senn}\pi x \text{sen}m\pi x dx = 0, \quad \text{se } n \neq m.$$

Além disso,

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots \text{ e } \lambda_n \rightarrow \infty, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

É conveniente escolher uma constante tal que

$$\int_0^1 r(x)\phi_n^2(x) dx = 1, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.10)$$

As funções que satisfazem 1.10 são ditas normalizáveis. Neste caso, dizemos que as autofunções formam um conjunto ortonormal.

4.2 Exercícios

1. Nos problemas abaixo determine os autovalores e as autofunções do problema de contorno dado.

- (a) $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0.$
- (b) $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(L) = 0.$
- (c) $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0.$
- (d) $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(1) + y'(1) = 0.$
- (e) $y'' + 2y' + (\lambda + 1)y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(5) = 0.$
- (f) $y'' + \lambda^2 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0.$
- (g) $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi/4) = 0.$
- (h) $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(\pi/2) = 0.$
- (i) $y'' + \lambda y = 0, \quad y(-\pi) = 0, \quad y(\pi) = 0.$

2. Nos problemas abaixo determine os autovalores e as autofunções do problema de contorno dado. Ponha as equações diferenciais abaixo em forma auto-adjunta, isto é, na forma do problema de Sturm-Liouville, identificando $p(x)$, $q(x)$ e $r(x)$. Dê uma relação de ortogonalidade para esses problemas.

- (a) $x^2 y'' + x y' + \lambda y = 0, \quad y(1) = 0, \quad y(e^\pi) = 0.$

$$(b) \quad x^2 y'' + 2xy' + \lambda y = 0, \quad y(1) = 0, \quad y(e^2) = 0.$$

3. Quando uma carga constante P é aplicada a uma longa coluna delgada de seção transversa uniforme e de comprimento L , a coordenada y de um ponto de sua curva de deflexão é dada por

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} + Py = 0,$$

onde as constantes E e I são respectivamente, o módulo de Young e o momento de inércia da seção transversa. Se a coluna é impedida de rotar em seu topo e em sua base, as condições de contorno são $y(0) = 0$ e $y(L) = 0$.

- (a) Mostre que esse problema de valores de contorno indica que a coluna não verga, a menos que a carga P tenha um dos valores $P_n = (n^2 \pi^2 / L^2) EI$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Essas diferentes cargas são chamadas **cargas críticas**.
- (b) Mostre que a curva de deflexão correspondente à mais baixa carga crítica $P_1 = (\pi^2 / L^2) EI$, chamada **carga de Euler**, é $y_1(x) = c_2 \sin(\pi x / L)$. A curva $y_1(x)$ é chamada **primeiro modo de deformação**.

Capítulo 5

Séries de Fourier

5.1 Introdução

As séries de Fourier são ferramentas muito importante na resolução de Equações Diferenciais Parciais. Podemos aplicá-las em diversas equações da Física-Matemática, principalmente nas equações de Onda, Calor e Laplace. Vamos desenvolver neste capítulo toda a teoria para calcular as séries de Fourier de algumas funções e depois aplicar o método desenvolvido para resolver as equações acima citadas.

5.2 Funções Periódicas

Definição 5.2.1 Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é periódica de período T se $f(x + T) = f(x)$ para todo x .

Exemplo 5.2.2 A função $\sin x$ é periódica de período 2π . Observe a figura 5.1.

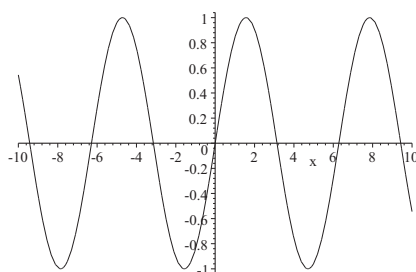
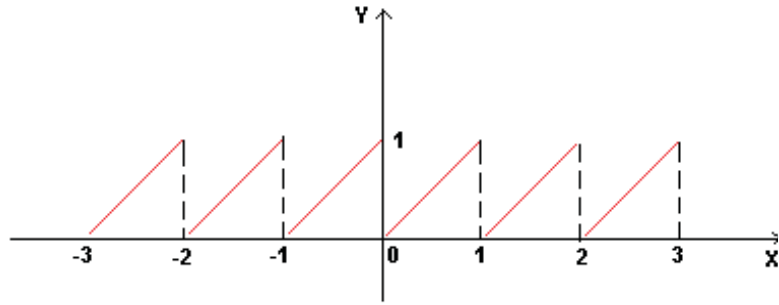


Figura 5.1: $y = \sin x$

Exemplo 5.2.3 A função $f(x) = x - [x]$, onde $[x]$ representa o maior inteiro, menor do que ou igual a x , é periódica de período 1. Veja o gráfico de f dado pela figura 5.2.

Figura 5.2: $f(x) = x - [x]$

Observação:

Se T é um período para a função f , então $2T$ também é um período, pois:

$$f(x + 2T) = f(x + T) = f(x)$$

E em geral, kT é um período, onde k é um inteiro. Para $k = 0$, temos que 0 é um período da f . Mas isso não tem interesse pois 0 é período de qualquer função. O menor período positivo é chamado o período fundamental.

Exemplo 5.2.4 O período fundamental T da função $\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ pode ser determinado do seguinte modo. Devemos ter:

$$\sin\frac{n\pi(x+T)}{L} = \sin\frac{n\pi x}{L}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Usando a seguinte propriedade trigonométrica, $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$, devemos ter:

$$\sin\frac{n\pi x}{L} \cos\frac{n\pi T}{L} + \cos\frac{n\pi x}{L} \sin\frac{n\pi T}{L} = \sin\frac{n\pi x}{L} \quad (2.1)$$

Fazendo $x = \frac{L}{2n}$, na igualdade acima obtemos:

$$\sin\frac{\pi}{2} \cos\frac{n\pi T}{L} = \sin\frac{\pi}{2}$$

O que implica:

$$\cos\frac{n\pi T}{L} = 1 \quad (2.2)$$

, e daí, usando a identidade: $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, obtemos:

$$\sin\frac{n\pi T}{L} = 0 \quad (2.3)$$

Como estamos interessados no menor valor positivo de T que satisfaça (2.2) e (2.3), simultaneamente, então $\frac{n\pi T}{L} = 2\pi$, isto é, o período fundamental de $\sin\frac{n\pi x}{L}$ é: $T = \frac{2L}{n}$. (De maneira análoga obtemos que o período fundamental de $\cos\frac{n\pi x}{L}$ é também $\frac{2L}{n}$.)

5.3 Coeficientes de Fourier

Se uma função $f(x)$ for expressa com:

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (3.4)$$

é de se esperar que os coeficientes a_n e b_n estejam intimamente ligados à função f .

Vamos supor que a igualdade acima se verifique, e que a série em (3.4) convirja uniformemente.

Como consequência da Proposição 1, f deve ser contínua (e portanto, pode ser integrada termo a termo), e deve ser periódica de período $2L$ (pois o período fundamental de $\cos \frac{\pi x}{L}$ é $2L$, e $2L$ é período para as demais funções seno e co-seno que aparecem na série). Assim, usando a Proposição 2, podemos integrar ambos os lados de (3.4) para obter:

$$\int_{-L}^L f(x) dx = \frac{1}{2}a_0 \int_{-L}^L dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx + b_n \int_{-L}^L \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \right) \quad (3.5)$$

por outro lado,

$$\int_{-L}^L \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx = 0$$

pois,

$$\int_{-L}^L \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{L}{n\pi} \int_{-n\pi}^{n\pi} \operatorname{sen} u du = -\frac{L}{n\pi} (\cos u) \Big|_{-n\pi}^{n\pi} = 0$$

de modo análogo segue que

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx = 0$$

segue da igualdade (3.5) e do exposto acima que

$$\int_{-L}^L f(x) dx = \frac{1}{2}a_0 \int_{-L}^L dx$$

segue que

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx \quad (3.6)$$

Para calcularmos os demais coeficientes usamos as seguintes relações:

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} dx = 0, \text{ se } n, m \geq 1 \quad (3.7)$$

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx = \begin{cases} L, & \text{se } n = m \geq 1 \\ 0, & \text{se } n \neq m, n, m \geq 1 \end{cases} \quad (3.8)$$

$$\int_{-L}^L \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} dx = \begin{cases} L, & \text{se } n = m \geq 1 \\ 0, & \text{se } n \neq m, n, m \geq 1 \end{cases} \quad (3.9)$$

por questões de esclarecimento vamos provar uma dessas relações, para $n = m \geq 1$ temos:

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \cos^2 \frac{n\pi x}{L} dx &= \frac{L}{n\pi} \int_{-n\pi}^{n\pi} \cos^2 u du = \frac{L}{2n\pi} \int_{-n\pi}^{n\pi} (\cos 2u + 1) du \\ &= \frac{L}{2n\pi} \left[\left(\frac{1}{2} \sin 2u \right) + (u) \right]_{-n\pi}^{n\pi} = \frac{L}{2n\pi} [n\pi - (-n\pi)] = \frac{L}{2n\pi} [2n\pi] = L \end{aligned}$$

Analogamente mostram-se as outras relações.

Agora, multiplicando (3.4) por $\cos \frac{m\pi x}{L}$, com $m \geq 1$ fixo, e integrando de $-L$ a L , obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{m\pi x}{L} dx &= \frac{1}{2} a_0 \int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} dx + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx + b_n \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx \right) \end{aligned}$$

Do somatório acima obtemos

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{m\pi x}{L} dx &= \frac{1}{2} a_0 \int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} dx \\ &+ (a_1 \int_{-L}^L \cos \frac{\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx + b_1 \int_{-L}^L \sin \frac{\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx + \dots \\ &+ a_m \int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx + b_m \int_{-L}^L \sin \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx + \dots) \end{aligned}$$

Usando as relações (3.7), (3.8) e (3.9) expostas acima concluimos que:

$$\int_{-L}^L f(x) \cos \frac{m\pi x}{L} dx = 0 + (0 + \dots + a_m L + b_m 0 + \dots + 0 + \dots)$$

o que nos dá

$$\int_{-L}^L f(x) \cos \frac{m\pi x}{L} dx = a_m L \quad (3.10)$$

De modo análogo, multiplicando (3.4) por $\sin \frac{m\pi x}{L}$, com $m \geq 1$ fixo, e integrando de $-L$ a L , obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{m\pi x}{L} dx &= \frac{1}{2} a_0 \int_{-L}^L \sin \frac{m\pi x}{L} dx + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx + b_n \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx \right) \end{aligned}$$

daí

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{m\pi x}{L} dx &= \frac{1}{2} a_0 \int_{-L}^L \sin \frac{m\pi x}{L} dx \\ &+ (a_1 \int_{-L}^L \cos \frac{\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx + b_1 \int_{-L}^L \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx + \dots \end{aligned}$$

$$+a_m \int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx + b_m \int_{-L}^L \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx + \dots)$$

Novamente das relações (3.7), (3.8) e (3.9) temos:

$$\int_{-L}^L f(x) \sin \frac{m\pi x}{L} dx = 0 + (0 + \dots + a_m 0 + b_m L + \dots + 0 + \dots)$$

segue que

$$\int_{-L}^L f(x) \sin \frac{m\pi x}{L} dx = b_m L \quad (3.11)$$

Finalmente, de (3.6), (3.10) e (3.11) obtemos:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, n \geq 0 \quad (3.12)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, n \geq 1 \quad (3.13)$$

Definição 5.3.1 *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$, integrável e absolutamente integrável em cada intervalo limitado; em particular, $\int_{-L}^L |f(x)| dx < \infty$. Os números a_n , para $n \geq 0$, e b_n , para $n \geq 1$, dados em (3.12) e (3.13) são definidos como os coeficientes de Fourier da função f . (A exigência da integrabilidade e integrabilidade absoluta de f é necessária para que as expressões (3.12) e (3.13) façam sentido.)*

Obs.:

$$\begin{aligned} |a_n| &= \left| \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \right| \\ &\leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)| \left| \cos \frac{n\pi x}{L} \right| dx \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)| dx, \end{aligned}$$

o que dá sentido à integral.

5.4 Série de Fourier

Dada uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periódica de período $2L$, integrável e absolutamente integrável, que possa ser escrita na forma:

$$f(x) \simeq \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right), \quad (4.14)$$

a expressão do lado direito é a série de Fourier de f .

Que relação há entre f e sua série de Fourier? Será que a igualdade sempre ocorre?

Vamos estudar as condições suficientes para que a função f seja igual à sua série de Fourier.

Definição 5.4.1 Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ será seccionalmente contínua se ela tiver apenas um número finito de descontinuidades (todas de primeira espécie) em qualquer intervalo limitado. Em outras palavras, dados $a < b$, existem $a \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n \leq b$, tais que f é contínua em cada intervalo aberto (a_j, a_{j+1}) , $j = 1, \dots, n-1$, e existem os limites $f(a_j + 0) = \lim_{x \rightarrow a_j^+} f(x)$ e $f(a_j - 0) = \lim_{x \rightarrow a_j^-} f(x)$.

Observação: Toda função contínua é seccionalmente contínua.

Exemplo 5.4.2 $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, não é seccionalmente contínua, pois sua descontinuidade em $x = 0$ é de segunda espécie.

Exemplo 5.4.3 A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq 1 \\ \frac{1}{n}, & \text{se } \frac{1}{n+1} \leq x \leq \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \dots \\ 0, & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

não é seccionalmente contínua, apesar de todas as descontinuidades serem de primeira espécie; acontece, porém, que, no intervalo $(0, 1)$, há um número infinito de tais descontinuidades.

Exemplos de funções seccionalmente contínuas:

Exemplo 5.4.4 A função sinal de x , definida por

$$\text{sign} x = \begin{cases} +1, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ -1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Exemplo 5.4.5 A função

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{se } x \geq 0; \\ 0, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Exemplo 5.4.6 A função

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq x < \pi \\ 0, & \text{se } -\pi \leq x < 0 \\ \text{e periódica de período } 2\pi \end{cases}$$

Definição 5.4.7 Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ será seccionalmente diferenciável se ela for seccionalmente contínua e se a função derivada f' for também seccionalmente contínua.

Observe que a derivada f' não está definida em todos os pontos: com certeza $f'(x)$ não existe nos pontos x onde f é descontínua; e mais, $f'(x)$ pode não existir, mesmo em alguns pontos onde f é contínua.

Exemplo 5.4.8 As funções dos exemplos (5.4.4) - (5.4.6) anteriores são seccionalmente diferenciáveis. Vamos pegar o exemplo (5.4.5):

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se } x \geq 0; \\ 0, & \text{se } x < 0. \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq 0; \\ 0, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Exemplo 5.4.9 A seguinte função é contínua, mas não seccionalmente diferenciável:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & \text{se } |x| \leq 1 \\ \text{e periódica de período } 2 \end{cases}$$

pois nos pontos onde f' é descontínua, a descontinuidade é de segunda espécie, pois pela regra da cadeia, temos: $f = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow f' = (-2x) \frac{1}{2} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, daí, $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, que é descontínua em $|x| = 1$.

Agora enunciamos um resultado que fornece condições suficientes para a convergência da série de Fourier de uma função f .

Teorema 5.4.10 (Fourier) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função seccionalmente diferenciável e de período $2L$. Então a série de Fourier da função f , dada em (4.14), converge, em cada ponto x , para:

$$\frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)] = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (4.15)$$

Exercício 1 Calcular a série de Fourier da função f definida no exemplo 3 acima e traçar o gráfico da função definida por essa série. Compare esse gráfico com o gráfico da função.

Resolução:

Cálculo dos coeficientes: $a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx \Rightarrow$ onde o período da função é $2L$, daí,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 0 dx + \int_0^{\pi} 1 dx \right) = \frac{1}{\pi} (\pi - 0) = 1$$

para $n \neq 0$, temos:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, n \geq 0; \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx,$$

daí,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 0 \cos(nx) dx + \int_0^{\pi} 1 \cos(nx) dx \right),$$

resolvendo a integral, temos:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \cos(nx) dx &= \frac{1}{\pi} \int_0^{n\pi} \cos u \frac{du}{n} \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin u}{n} \right]_0^{n\pi} = \frac{1}{n\pi} [\sin(n\pi) - \sin(0)] = 0\end{aligned}$$

e

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 0 \sin(nx) dx + \int_0^{\pi} 1 \sin(nx) dx \right),$$

de modo análogo para b_n , temos

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} 1 \sin(nx) dx &= \frac{1}{\pi} \int_0^{n\pi} \sin u \frac{du}{n} = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\cos u}{n} \right]_0^{n\pi} \\ &= -\frac{1}{n\pi} [\cos(n\pi) - \cos(0)] = \frac{1}{n\pi} [1 - \cos(n\pi)],\end{aligned}$$

ou, para $k = 1, 2, \dots$:

$$b_{2k} = \frac{1}{2k\pi} [1 - \cos(2k\pi)] = 0$$

e

$$b_{2k-1} = \frac{1}{(2k-1)\pi} \{1 - \cos[(2k-1)\pi]\} = \frac{2}{(2k-1)\pi} \quad (4.16)$$

A série de Fourier de f será:

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)\pi} \sin[(2k-1)x]$$

Pelo Teorema de Fourier, o gráfico da função definida pela série é dado pela figura 5.3 abaixo.

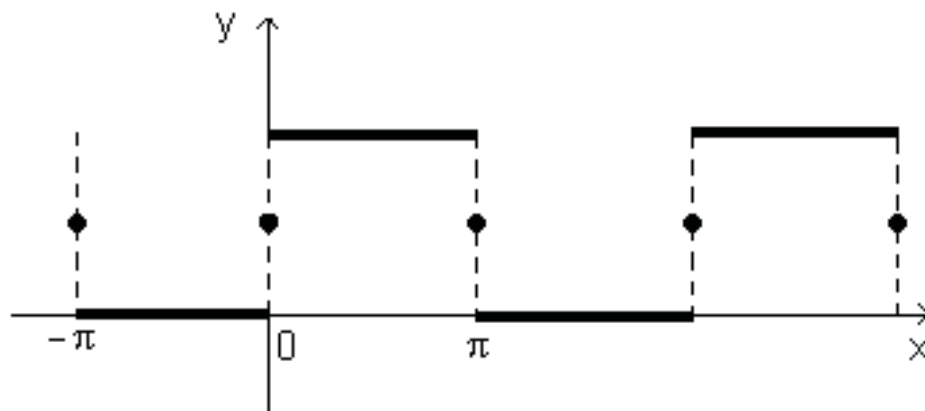


Figura 5.3: Gráfico da série de Fourier da função do exemplo 5.4.6

Exercício 2 Use os resultados do Exercício 1 para obter uma expressão em série para $\frac{\pi}{4}$.

Resolução: No ponto $x = \frac{\pi}{2}$, a série de Fourier é igual a 1, em virtude do Teorema de Fourier:

$$\frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)] = \frac{1}{2} [1 + 1] = 1,$$

logo,

$$1 = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)\pi} \operatorname{sen} \left[(2k-1) \frac{\pi}{2} \right]$$

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)} \operatorname{sen} \left[(2k-1) \frac{\pi}{2} \right]$$

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)} \operatorname{sen} \left[(2k-1) \frac{\pi}{2} \right],$$

ou, finalmente,

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)},$$

que é conhecida como a série de Leibniz.

5.5 Séries de Fourier de funções pares e ímpares

Definição 5.5.1 Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é par se $f(x) = f(-x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. (Isso significa que o gráfico da função f é simétrico com relação ao eixo dos y).

Definição 5.5.2 Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é ímpar se $f(x) = -f(-x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. (Isso significa que o gráfico da função f é simétrico com relação à origem).

Exemplo 5.5.3 funções pares: $f(x) = \cos \frac{n\pi x}{L}$; $f(x) = x^{2n}$, para $n = 1, 2, \dots$; outro: $f(x) = |x|$.

Exemplo 5.5.4 funções ímpares: $f(x) = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$; $f(x) = x^{2n-1}$; para $n = 1, 2, \dots$; outro: $f(x) = x$.

Proposição 5.5.5 1. A soma de duas funções pares é uma função par

2. A soma de duas funções ímpares é uma função ímpar.

3. O produto de duas funções pares é uma função par.

4. O produto de duas funções ímpares é uma função par.

5. O produto de uma função par por uma função ímpar é uma função ímpar.

Demonstração:

1 Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções pares

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = f(-x) + g(-x) = (f + g)(-x)$$

2 Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções ímpares

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = -f(-x) + [-g(-x)] = -[f(-x) + g(-x)] = -(f + g)(-x)$$

3 Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções pares:

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = f(-x)g(-x) = (fg)(-x)$$

4 Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções ímpares:

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = [-f(-x)][-g(-x)] = [f(-x)g(-x)] = (fg)(-x)$$

5 Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função par e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função ímpar:

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = f(-x)[-g(-x)] = -[f(-x)g(-x)] = -(fg)(-x)$$

Proposição 5.5.6 (i) *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função par que é integrável em qualquer intervalo limitado. Então:*

$$\int_{-L}^L f = 2 \int_0^L f$$

(ii) *Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função ímpar e integrável em qualquer intervalo limitado. Então:*

$$\int_{-L}^L f = 0$$

Demonstração: Seja f uma função par e considere a integral $\int_{-L}^L f = \int_{-L}^0 f + \int_0^L f$, temos que para $y = -x$

$$\int_{-L}^0 f(x) dx = - \int_L^0 f(-y) dy = + \int_0^L f(-y) dy = \int_0^L f(y) dy.$$

isso mostra que se f é par então

$$\int_{-L}^L f = 2 \int_0^L f$$

Analogamente, seja f uma função ímpar temos que $\int_{-L}^L f = \int_{-L}^0 f + \int_0^L f$, e para $y = -x$ teremos

$$\int_{-L}^0 f(x) dx = - \int_L^0 f(-y) dy = + \int_0^L f(-y) dy = - \int_0^L f(y) dy.$$

que mostra

$$\int_{-L}^L f = 0$$

Da proposição anterior podemos estabelecer os seguintes resultados sobre as séries de Fourier de funções pares e ímpares.

(a) Se f for uma função par, periódica de período $2L$, integrável e absolutamente integrável, então:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \geq 0,$$

pois o produto de duas funções pares é uma função par. E,

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx = 0, \quad n \geq 1,$$

pois o produto de uma função par e uma função ímpar é uma função ímpar.

Portanto, a série de Fourier de uma função par é uma série de co-senos.

(b) Se f for uma função ímpar, periódica de período $2L$, integrável e absolutamente integrável, então:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = 0,$$

pois o produto de uma função par e uma função ímpar é uma função ímpar. E,

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx,$$

pois o produto de duas funções ímpares é uma função par.

Assim, a série de Fourier de uma função ímpar é uma série de senos.

5.6 Cálculo de Algumas Séries de Fourier

I) Seja $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periódica de período $2L$ e definida por $f_1(x) = x$, para $-L \leq x < L$. Como f_1 é ímpar, teremos uma série de senos cujos coeficientes são:

$$a_n = 0; \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L x \sin \frac{n\pi x}{L} dx.$$

fazendo a mudança de variável $y = \frac{n\pi x}{L}$, obtemos:

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^{n\pi} \frac{L}{n\pi} y \operatorname{sen}(y) \frac{L}{n\pi} dy = \frac{2L}{n^2\pi^2} \int_0^{n\pi} y \operatorname{sen}(y) dy.$$

Integrando por partes, temos

$$\begin{aligned} \int_0^{n\pi} y \operatorname{sen}(y) dy &= [-y \cos y]_0^{n\pi} + \int_0^{n\pi} \cos(y) dy \\ &= -n\pi \cos(n\pi) - (0) + [\operatorname{sen}(y)]_0^{n\pi} = -n\pi \cos(n\pi) \end{aligned}$$

Logo

$$b_n = \frac{2L}{n^2\pi^2} (-n\pi \cos(n\pi)) \Rightarrow b_n = \frac{2L}{n\pi} (-\cos(n\pi)),$$

como

$$\begin{cases} \text{para } n \text{ ímpar, } \cos(n\pi) = -1 \\ \text{para } n \text{ par, } \cos(n\pi) = 1 \end{cases}$$

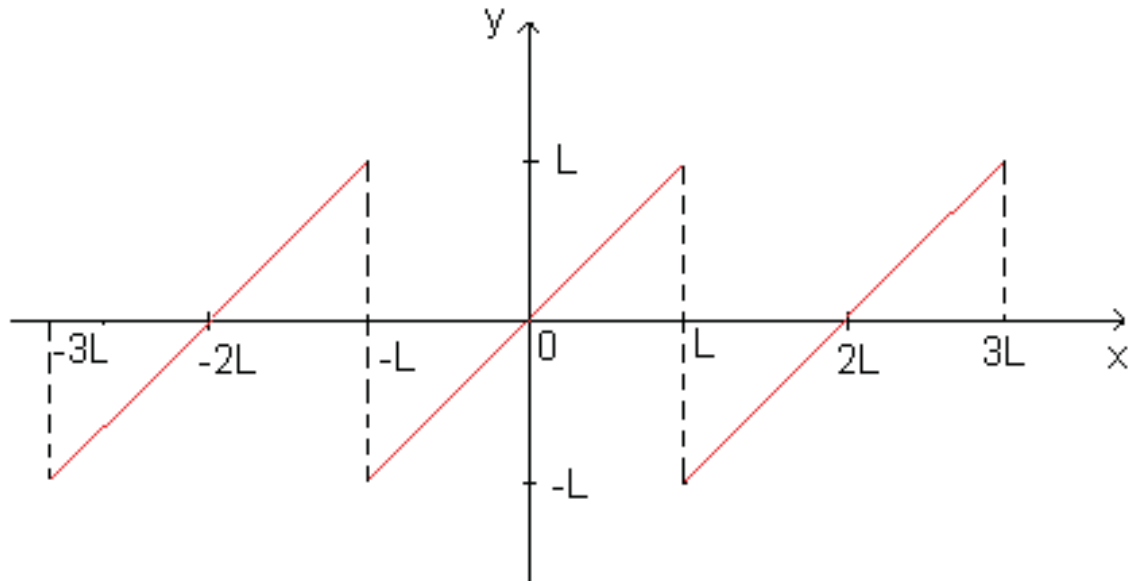
então

$$b_n = \frac{2L}{n\pi} (-1)^{n+1}.$$

Portanto a série de Fourier da função f_1 é:

$$f_1(x) \sim \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

e seu gráfico é:



II) Seja $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periódica de período $2L$ e definida por

$$f_2(x) = \begin{cases} L - x, & \text{para } 0 \leq x \leq L; \\ L + x, & \text{para } -L \leq x \leq 0 \end{cases}$$

Como f_2 é uma função par, temos uma série de cossenos, cujos coeficientes são:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{L} \int_0^L (L-x) dx = \frac{2}{L} \left[Lx - \frac{x^2}{2} \right]_0^L \\ &= \frac{2}{L} \left(L^2 - \frac{L^2}{2} \right) - 0 = \frac{2}{L} \frac{L^2}{2} = L; \end{aligned}$$

e

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L (L-x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$$

fazendo a mudança de variável $y = \frac{n\pi x}{L}$, obtemos:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{L} \int_0^{n\pi} \left(L - \frac{L}{n\pi} y \right) \cos(y) \frac{L}{n\pi} dy \\ &= \frac{2}{L} \int_0^{n\pi} L \left(\frac{n\pi - y}{n\pi} \right) \cos(y) \frac{L}{n\pi} dy = \\ &= \frac{2L}{n^2 \pi^2} \int_0^{n\pi} (n\pi - y) \cos(y) dy \end{aligned}$$

Integrando por partes a integral acima, temos

$$\begin{aligned} \int_0^{n\pi} (n\pi - y) \cos(y) dy &= [(n\pi - y) \sin(y)]_0^{n\pi} \\ &\quad - \int_0^{n\pi} -\sin(y) dy = 0 - 0 + [-\cos(y)]_0^{n\pi} \\ &= -\cos(n\pi) - (-\cos 0) \\ &= 1 - \cos(n\pi), \end{aligned}$$

Logo,

$$a_n = \frac{2L}{n^2 \pi^2} (1 - \cos(n\pi))$$

como

$$\begin{cases} \text{para } n \text{ ímpar, } \cos(n\pi) = -1 \\ \text{para } n \text{ par, } \cos(n\pi) = 1 \end{cases}$$

então

$$a_n = \frac{2L}{n^2 \pi^2} [1 - (-1)^n]$$

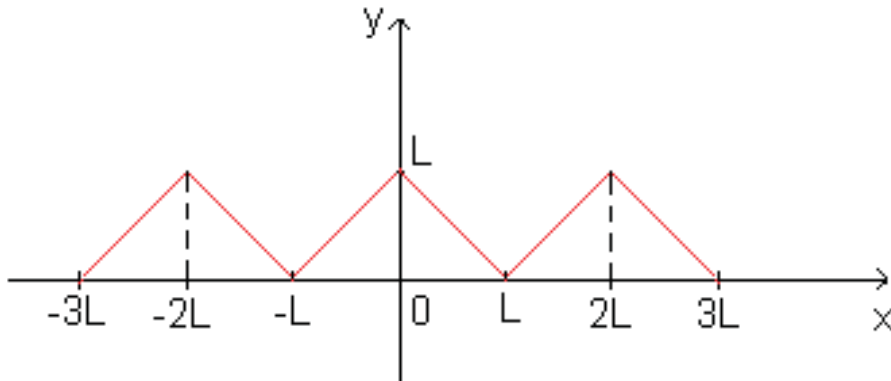
ou seja, para $n = 2k$, temos: $a_{2k} = 0$, $k = 1, 2, \dots$ e para $n = 2k - 1$, temos:

$$a_{2k-1} = \frac{2L}{(2k-1)^2 \pi^2} [1 - (-1)] \Rightarrow a_{2k-1} = \frac{4L}{(2k-1)^2 \pi^2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Portanto a série de Fourier da função f_2 é:

$$f_2(x) \sim \frac{L}{2} + \frac{4L}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cdot \cos \frac{(2k-1)\pi x}{L}.$$

gráfico da função f_2 :



Observe que, em virtude do Teorema de Fourier, o símbolo $\sim$ pode ser substituído por $=$. Usando o Teorema de Fourier, para $x = 0$, obtemos:

$$L - 0 = \frac{L}{2} + \frac{4L}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2},$$

ou seja,

$$\frac{L}{2} = \frac{4L}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \Rightarrow \frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$$

III) Seja $f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periódica de período $2L$ e definida por $f_3(x) = x^2$ para $-L \leq x \leq L$. Como f_3 é par, teremos uma série de cossenos cujos coeficientes são:

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L x^2 dx = \frac{2}{L} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^L = \frac{2}{L} \left(\frac{L^3}{3} \right) - 0 = 2 \frac{L^2}{3};$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L x^2 \cos \frac{n\pi x}{L} dx.$$

fazendo a mudança de variável $y = \frac{n\pi x}{L}$, obtemos:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{L} \int_0^{n\pi} \left(\frac{L}{n\pi} y \right)^2 \cos(y) \frac{L}{n\pi} dy = \\ &= \frac{2}{L} \frac{2L^3}{n^3 \pi^3} \int_0^{n\pi} y^2 \cos(y) dy = \frac{2L^2}{n^3 \pi^3} \int_0^{n\pi} y^2 \cos(y) dy \end{aligned}$$

Integrando por partes, temos

$$\begin{aligned}\int_0^{n\pi} y^2 \cos(y) dy &= [y^2 \operatorname{sen}(y)]_0^{n\pi} - \int_0^{n\pi} 2y \operatorname{sen}(y) dy \\ &= 0 - 0 - \int_0^{n\pi} 2y \operatorname{sen}(y) dy,\end{aligned}$$

daí,

$$a_n = -\frac{4L^2}{n^3\pi^3} \int_0^{n\pi} y \operatorname{sen}(y) dy$$

Integrando novamente por partes, obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^{n\pi} y \operatorname{sen}(y) dy &= [-y \cos(n\pi)]_0^{n\pi} - \int_0^{n\pi} -\cos y dy \\ &= -n\pi \cos(n\pi) - 0 + [\operatorname{sen} y]_0^{n\pi} \\ &= -n\pi \cos(n\pi)\end{aligned}$$

Logo,

$$a_n = -\frac{4L^2}{n^3\pi^3} [-n\pi \cos(n\pi)] = \frac{4L^2}{n^3\pi^3} [\cos(n\pi)] = \frac{4L^2}{n^2\pi^2} (-1)^n$$

Portanto a série de Fourier da função f_3 é:

$$f_3(x) \sim \frac{L^2}{3} + \frac{4L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{L}.$$

O gráfico da função f_3 é dado pela figura 5.4.

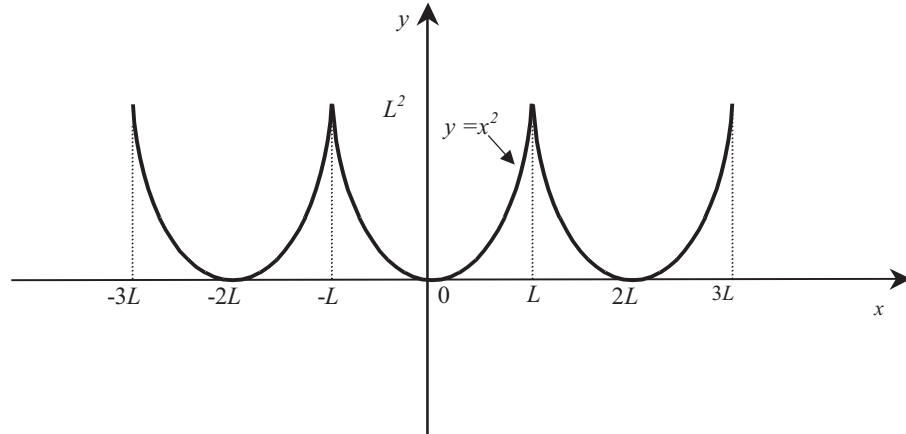


Figura 5.4: Gráfico da função f_3

Observe que, de fato, tem-se $=$ em vez de $\sim$, como consequência do teorema de Fourier. Usando o Teorema de Fourier para $x = L$, obtemos:

$$L^2 = \frac{L^2}{3} + \frac{4L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

pois $(-1)^n$ e $\cos n\pi$ sempre terão o mesmo sinal e assim, pela multiplicação dos dois termos, sempre teremos $+1$.

Ou seja,

$$\begin{aligned} L^2 - \frac{L^2}{3} &= \frac{4L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \Rightarrow \frac{2L^2}{3} = \frac{4L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots \end{aligned}$$

5.7 Equação da Onda

Considere-se uma corda de comprimento L situada sobre o eixo dos x , com origem no ponto de abscissa zero e extremidade L . Procurar-se-á encontrar a elongação $u(x, t)$ ao oscilar a corda, supondo-se os extremos fixos, conhecendo-se a posição inicial $u_0(x)$ da corda e a velocidade no instante $t = 0$. Matematicamente, trata-se de resolver o problema misto para a equação da corda vibrante o que será feito aqui com o método de separação de variáveis. O problema consiste em encontrar uma função real $u(x, t)$, definida para $0 < x < L$ e $t > 0$, que satisfaça as seguintes condições:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \quad (\text{Equação da onda}) \quad (7.17)$$

$$u(x, 0) = u_0(x); \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad 0 \leq x \leq L \quad (\text{condições iniciais}) \quad (7.18)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad \text{para todo } t > 0 \quad (\text{condições de contorno}) \quad (7.19)$$

sendo u_0 e u_1 funções conhecidas. Vamos utilizar o método de separação de variáveis para tentar encontrar uma solução para o nosso problema, ou seja, vamos considerar a função u dada por

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

sendo X uma função só de x e T outra apenas de t . Substituindo-se na equação (7.17), obtém-se:

$$XT'' = a^2 X''T$$

E nos pontos onde T e X não se anulam, encontra-se:

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda, \quad (7.20)$$

sendo λ uma constante. De (7.19) nos extremos da corda resulta:

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0; \quad u(L, t) = X(L)T(t) = 0, \quad t > 0$$

como $T(t)$ deve ser diferente de zero, pois se assim fosse obteríamos a solução nula, o que não nos interessa, devemos ter então que:

$$X(0) = X(L) = 0 \quad (7.21)$$

Portanto, a equação (7.20) e a condição (7.21) permitem formular os dois problemas seguintes para encontrar as funções X e T :

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = X(L) = 0; \quad (7.22)$$

$$T'' + \lambda a^2 T = 0 \quad (7.23)$$

Resolução de (7.22):

Primeiro caso:

Suponha-se $\lambda < 0$. Fazendo-se $\lambda = -k^2$, a equação (7.22) toma a forma:

$$X'' - k^2 X = 0$$

procuramos uma solução do tipo $X = e^{rx}$, temos que, $X' = re^{rx}$, $X'' = r^2 e^{rx}$, substituindo na equação, obtemos:

$$r^2 e^{rx} - k^2 e^{rx} = 0 \Rightarrow (r^2 - k^2) e^{rx} = 0, \quad e^{rx} \neq 0$$

$$r^2 - k^2 = 0 \Rightarrow r^2 = k^2 \Rightarrow r = \pm k$$

Daí, as raízes do polinômio característico são $-k$ e $+k$. Portanto, a solução geral será dada por:

$$X(x) = c_1 e^{-kx} + c_2 e^{kx}$$

sendo c_1 e c_2 constantes a serem determinadas pelas condições de contorno estabelecidas para a equação (7.22). Portanto, tem-se:

$$X(0) = c_1 e^0 + c_2 e^0 = 0$$

$$X(L) = c_1 e^{-kL} + c_2 e^{kL} = 0$$

que é um sistema linear homogêneo nas incógnitas c_1 e c_2 , cujo determinante D é não nulo:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{-kL} & e^{kL} \end{vmatrix} = e^{kL} - e^{-kL} \neq 0 \text{ e } D_{c_1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & e^{kL} \end{vmatrix} = 0, \quad D_{c_2} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ e^{-kL} & 0 \end{vmatrix} = 0, \text{ temos}$$

que $c_1 = \frac{D_{c_1}}{D}$ e $c_2 = \frac{D_{c_2}}{D}$, daí concluímos que a única solução do sistema é a solução trivial $c_1 = c_2 = 0$. Conclui-se que o problema da equação (7.22) não possui solução diferente da solução nula se $\lambda < 0$.

Segundo caso:

Suponha-se $\lambda = 0$. Assim sendo, a equação em (7.22) reduz-se a $X''(x) = 0$ e a solução é $X(x) = ax + b$. As condições $X(0) = b = 0$, $X(L) = aL + b = 0$ implicam que a e b são zero, logo concluímos também que o problema da equação (7.21) possui apenas a solução nula, que não nos interessa.

Terceiro caso:

Suponha-se $\lambda > 0$. A equação (7.22) tem a seguinte forma:

$$X'' + \lambda X = 0,$$

cujo polinômio característico é: $r^2 + \lambda = 0$ e possui as raízes $+i\sqrt{\lambda}$ e $-i\sqrt{\lambda}$ e a solução geral da equação diferencial é:

$$X(x) = c_1 \sin \sqrt{\lambda} x + c_2 \cos \sqrt{\lambda} x$$

De $X(0) = 0$ deduz-se que:

$$c_1 \sin 0 + c_2 \cos 0 = 0 \Rightarrow 0 + c_2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

e a solução anterior tem a forma:

$$X(x) = c_1 \sin \sqrt{\lambda} x$$

na qual, evidentemente, se supõe $c_1 \neq 0$. Portanto, de $X(L) = 0$ resulta que $c_1 \sin \sqrt{\lambda} L = 0$, isto é, $\sqrt{\lambda} L = k\pi$, sendo k um número inteiro. Portanto, o problema da equação (7.22) possui solução não nula para uma coleção enumerável de valores de λ , dados por:

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2, \quad k = 1, 2, \dots$$

a cada λ_k corresponde uma solução $X_k(x)$ definida por:

$$X_k(x) = \sin \frac{k\pi x}{L}, \quad k = 1, 2, \dots$$

(Obs.: poderíamos ter considerado soluções com valores de k negativos, mas essas soluções junto com as soluções com valores de k positivos resultam num conjunto de soluções linearmente dependentes, por isso, as desprezamos, e consideramos somente os valores de k positivos)

Um problema como o da equação (7.22), dependendo do parâmetro λ e das condições de contorno $X(0) = X(L) = 0$, denomina-se um problema Sturm-Liouville. Os valores de λ aos quais correspondem soluções não nula do problema denomina-se autovalores e as soluções não nulas são chamadas autofunções. No presente caso, os autovalores são os $\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2$ e as autofunções são as $X_k(x) = \sin \frac{k\pi x}{L}$, $k = 1, 2, \dots$

Para resolver o problema da equação (7.23) tem-se $T'' + \lambda_k a^2 T = 0$, cuja equação característica é: $r^2 + \lambda_k a^2 = 0 \Rightarrow r^2 = -\lambda_k a^2 \Rightarrow r = \pm ia\sqrt{\lambda_k}$, onde este último resultado mostra as raízes da equação característica. E a solução geral é:

$$T_k(t) = \alpha_k \operatorname{sen} a\sqrt{\lambda_k}t + \beta_k \cos a\sqrt{\lambda_k}t,$$

sendo α_k e β_k constantes. Portanto, as funções

$$u_k(x, t) = X_k(x) T_k(t) = \left(a_k \cos \frac{k\pi at}{L} + b_k \operatorname{sen} \frac{k\pi at}{L} \right) \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{L}, \text{ para } k = 1, 2, \dots,$$

devem satisfazer a equação (7.17) e as condições de contorno (7.19). Dado o caráter linear da equação diferencial (7.17) conclui-se que toda soma da forma:

$$S_n(x, t) = \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos \frac{k\pi at}{L} + b_k \operatorname{sen} \frac{k\pi at}{L} \right) \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{L}$$

também é solução de (7.17) e (7.19).

A questão principal é mostrar que, mediante certas restrições sobre os dados iniciais u_0, u_1 , a sucessão $(S_n(x, t))_n \in \mathbb{N}$ converge pontualmente para uma função $u(x, t)$ em $0 \leq x \leq L, t \geq 0$, que é solução de (7.17), (7.18) e (7.19) e que esse problema misto é corretamente proposto (existe solução; há unicidade de soluções; há dependência contínua dos dados iniciais u_0 e u_1). Mas isto está fora do escopo desse livro. Todavia, se considerarmos a função u dada por

$$u(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi at}{L} + b_k \operatorname{sen} \frac{k\pi at}{L} \right) \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{L}.$$

Podemos afirmar que $u(x, t)$, é a solução de (7.17), (7.18) e (7.19), desde que os dados iniciais u_0 e u_1 satisfaçam as seguintes condições:

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{L}$$

$$u_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{k\pi a}{L} \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{L}.$$

Consequentemente, as condições iniciais serão satisfeitas se u_0, u_1 forem tais que suas extensões ímpares ao intervalo $(-L, L)$ sejam representadas através das séries anteriores cujos coeficientes de fourier são:

$$\int_{-L}^L u_0(x) \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{L} dx = a_k \cdot L \Rightarrow a_k = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{L} dx \quad (7.24)$$

$$\int_{-L}^L u_1(x) \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{L} dx = b_k \cdot \left(\frac{k\pi a}{L} \right) \cdot L \Rightarrow b_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^L u_1(x) \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{L} dx. \quad (7.25)$$

Tendo-se em mente a motivação anterior, impondo-se condições adequadas aos dados iniciais, a função $u(x, t)$ definida por:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi at}{L} + b_k \operatorname{sen} \frac{k\pi at}{L} \right) \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{L},$$

sendo a_k e b_k os coeficientes das séries,

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{L} \quad \text{em } 0 \leq x \leq L,$$

$$u_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \left(\frac{k\pi a}{L} \right) \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{L} \quad \text{em } 0 \leq x \leq L,$$

é candidata a solução do problema misto (7.17), (7.18) e (7.19).

5.7.1 Energia da corda vibrante

Vamos considerar a equação da onda acrescida de uma força externa h , com as condições iniciais e de fronteira dadas abaixo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + h(x, t, u), \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \quad (7.26)$$

$$u(x, 0) = u_0(x); \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad 0 \leq x \leq L \quad (7.27)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad \text{para todo } t > 0 \quad (7.28)$$

seja $u(x, t)$ uma solução desse sistema de equações. Multiplicando a equação (7.26) por u_t e integrando com relação a x entre 0 e L , temos

$$\int_0^L u_{tt} u_t dx = \int_0^L a^2 u_{xx} u_t dx + \int_0^L h(x, t, u) u_t dx \quad (7.29)$$

Observando que

$$\frac{\partial}{\partial t} (u_t \cdot u_t) = u_{tt} u_t + u_{tt} u_t \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} u_t^2 = 2 u_{tt} u_t \Rightarrow u_{tt} u_t = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} u_t^2.$$

e fazendo integração por partes na segunda integral de (7.29) temos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L (x) u_t^2 dx = a^2 u_x u_t \Big|_0^L - \int_0^L a^2 u_x u_{tx} dx + \int_0^L h(x, t, u) u_t dx$$

como $\frac{\partial}{\partial t} (u_x^2) = 2 u_x u_{tx}$, podemos escrever a equação acima na forma

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L u_t^2 dx = a^2 u_x u_t \Big|_0^L - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L a^2 u_x^2 dx + \int_0^L h(x, t, u) u_t dx$$

ou ainda

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \int_0^L u_t^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L a^2 u_x^2 dx \right] = a^2 u_x u_t \Big|_0^L + \int_0^L h(x, t, u) u_t dx \quad (7.30)$$

A relação (7.30) é chamada equação da energia. A expressão

$$K(t) = \frac{1}{2} \int_0^L u_t^2 dx \quad (7.31)$$

é a energia cinética da corda e

$$V(t) = \frac{1}{2} \int_0^L a^2 u_x^2 dx \quad (7.32)$$

é a energia potencial da corda e $E(t) = K(t) + V(t)$ é a energia total da corda. Vamos agora comentar sobre a equação da energia. Suponhamos que u seja a solução do sistema (7.26)-(7.28); com $h = 0$ e $u_t(0, t) = u_t(L, t) = 0$. Desse modo, (7.32) reduz-se a

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \int_0^L u_t^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L a^2 u_x^2 dx \right] = 0, \quad (7.33)$$

o que implica que a energia $E(t)$ seja constante com o tempo. Tem-se, assim, um princípio de conservação da energia para o fenômeno de vibração da corda com extremidades fixas, e sem ação de forças externas, isto é, $h = 0$. Diz-se, também, que o sistema é conservativo. Igual conclusão teremos para o caso de vibração da corda, sem ação de forças externas, e com condições de fronteira do tipo $u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0$. A energia da corda vibrante no instante inicial $t = 0$ é

$$E(0) = \frac{1}{2} \int_0^L u_0^2(x) dx + \frac{1}{2} \int_0^L a^2 u_1^2(x) dx, \quad (7.34)$$

e o princípio de conservação da energia diz que essa energia é mantida.

O resultado de unicidade abaixo será demonstrado, utilizando-se o método da energia.

Teorema 5.7.1 (*Unicidade*) *A solução do sistema de equações de ondas dado pelas equações (7.26), (7.27), (7.28) é única.*

Demonstração: Suponha que o sistema (7.26), (7.27), (7.28) tenha duas soluções, u_1 e u_2 . É bom salientar que estamos supondo que as seguintes relações de compatibilidade entre os dados iniciais e os de fronteira: $h_1(0) = f(0)$, $h_2(0) = g(L)$ estão satisfeitas, isso para garantir soluções clássicas para o sistema. É fácil ver que a função $u = u_1 - u_2$ satisfaz ao seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0. \end{cases}$$

usando o princípio de conservação de energia obtemos que $u_t(x, t) = u_x(x, t) = 0$ para (x, t) em $(0, L) \times (0, T)$. Logo, $u(x, t) = Cte$ em $(0, L) \times (0, T)$. Usando a continuidade de u , em $[0, L] \times [0, T]$, e as condições iniciais, concluímos que $u = 0$ em $[0, L] \times [0, T]$, ou seja $u_1 = u_2$. Tem-se, assim, a unicidade de solução para esse sistema.

5.8 Equação do Calor

Vamos representar por $\mathfrak{R}$ a região do plano (x, t) determinada por $0 < x < L$ e $t > 0$, e por $\bar{\mathfrak{R}}$ a união de $\mathfrak{R}$ com sua fronteira que é formada pelas semi-retas $\{x = 0, t > 0\}$ e $\{x = L, t > 0\}$

e pelo segmento $\{0 \leq x \leq L, t = 0\}$. O problema da condução do calor consiste em determinar uma função real $u(x, t)$ definida em $\mathfrak{R}$ que satisfaça à equação do calor

$$u_t = K u_{xx} \quad \text{em } 0 < x < L, \quad t > 0 \quad (8.35)$$

e a condição inicial

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L, \quad (8.36)$$

onde $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função dada, e, que também satisfaça as condições de fronteira. Vamos começar com o caso em que as temperaturas nas extremidades da barra são mantidas à temperatura constante zero, isto é,

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t > 0 \quad (8.37)$$

O problema dado em (8.35)-(8.37) é chamado um problema de valores inicial e de fronteira, ou problema misto.

Método de Fourier: Vamos, primeiramente, usar o método de separação de variáveis e procurar soluções $u(x, t)$ do problema na forma

$$u(x, t) = F(x)G(t). \quad (8.38)$$

Substituindo u dada por (8.38) na equação do calor, obtemos

$$F(x)G'(t) = KF''(x)G(t) \quad (8.39)$$

ou

$$\frac{1}{K} \frac{G'(t)}{G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)} \quad (8.40)$$

onde $F(x), G(t) \neq 0$.

Agora observe que o lado esquerdo de (8.40) é função apenas de t , enquanto que o lado direito é função apenas de x . Logo, tanto o lado esquerdo de (8.40) como o lado direito (que são iguais!) devem independer de x e de t . Isso quer dizer

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{1}{K} \frac{G'(t)}{G(t)} = \sigma \quad (8.41)$$

onde σ é um parâmetro independente de t e de x .

A primeira equação, em (8.41), nos diz que F deve satisfazer à equação diferencial ordinária

$$F''(x) - \sigma F(x) = 0, \quad \text{para } 0 < x < L \quad (8.42)$$

e, como $u(0, t) = u(L, t) = 0$, a função $F(x)$ deve satisfazer também às condições

$$F(0) = F(L) = 0, \quad (8.43)$$

Pois, como $u(0, t) = F(0)G(t) = 0$ para todo $t > 0$, segue-se que, se $F(0) \neq 0$, então $G(t) \equiv 0$ e, portanto, $u \equiv 0$. E, se bem que $u \equiv 0$ seja solução da equação do calor e satisfaça às condições de fronteira, essa função não tem chance de satisfazer à condição inicial $u(x, 0) = f(x)$, a menos que $f(x) \equiv 0$. Agora procedemos no sentido de ver quais os valores de σ que conduzem a soluções $F(x)$ do problema dado em (8.42)-(8.43).

Se $\sigma > 0$, fazendo-se $\sigma = k^2$, a equação (8.42) toma a forma

$$F'' - k^2 F = 0 \quad (8.44)$$

procuramos uma solução do tipo $F = e^{rx}$ temos $F' = r e^{rx}$, $F'' = r^2 e^{rx}$, substituindo na equação, temos:

$$r^2 e^{rx} - k^2 e^{rx} = 0 \Rightarrow (r^2 - k^2) e^{rx} = 0, e^{rx} \neq 0 \Rightarrow r^2 - k^2 = 0 \Rightarrow r^2 = k^2 \Rightarrow r = \pm k$$

Daí, as raízes do polinômio característico são $-k$ e $+k$. Portanto, a solução geral será dada por:

$$F(x) = c_1 e^{-kx} + c_2 e^{kx}$$

sendo c_1 e c_2 constantes a serem determinadas pelas condições de contorno estabelecidas para a equação (8.42). Portanto, tem-se:

$$F(0) = c_1 e^0 + c_2 e^0 = 0$$

$$F(L) = c_1 e^{-kL} + c_2 e^{kL} = 0$$

que é um sistema linear homogêneo nas incógnitas c_1 e c_2 , cujo determinante (D) é não nulo:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{-kL} & e^{kL} \end{vmatrix} = e^{kL} - e^{-kL} \neq 0 \text{ e } D_{c_1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & e^{kL} \end{vmatrix} = 0, D_{c_2} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ e^{-kL} & 0 \end{vmatrix} = 0, \text{ temos}$$

que $c_1 = \frac{D_{c_1}}{D}$ e $c_2 = \frac{D_{c_2}}{D}$, daí concluímos que a única solução do sistema é a solução trivial $c_1 = c_2 = 0$. Conclui-se que o problema da equação (14) não possui solução diferente da solução nula se $\sigma > 0$.

Suponhamos $\sigma = 0$.

Desse modo, a equação (8.42) reduz-se a $F''(x) = 0$ e a solução é $F(x) = c_1 x + c_2$. As condições $F(0) = c_2 = 0$, $F(L) = c_1 L + c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$, implicam que, também neste caso, o problema da equação (8.42) possui apenas a solução nula.

Suponhamos que $\sigma < 0$. fazendo $\sigma = -\lambda^2$, temos

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \quad (8.45)$$

cujos polinômios característicos são: $r^2 + \lambda^2 = 0$ e possui as raízes $+i\lambda$ e $-i\lambda$ e a solução geral da equação diferencial é:

$$F(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x \quad (8.46)$$

De $F(0) = 0$ deduzimos que:

$$c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = 0 \Rightarrow c_1 \cdot 1 + 0 = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \quad (8.47)$$

e a solução anterior tem a forma:

$$F(x) = c_2 \sin \lambda x \quad (8.48)$$

na qual, evidentemente, se supõe $c_2 \neq 0$. Portanto, de $F(L) = 0$ resulta que $c_2 \sin \lambda L = 0$, isto é, $\lambda L = n\pi$, sendo n um número inteiro. Portanto, o problema da equação (8.42) possui uma coleção enumerável de soluções não nulas cujos valores de λ são dados por:

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L} \right), \text{ onde } n = 1, 2, \dots \quad (8.49)$$

Os valores de $-\sigma = \lambda^2$:

$$\lambda_n^2 = \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \quad (8.50)$$

são chamados os autovalores próprios do problema dado em (8.42)-(8.43), e as funções

$$F_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}, n = 1, 2, \dots \quad (8.51)$$

são chamadas as funções próprias ou autofunções do problema dado em (8.42)-(8.43).

Vejamos agora a segunda equação diferencial ordinária em (8.41):

$$G' - K\sigma G = 0 \quad (8.52)$$

a equação característica é:

$$r - \sigma K = 0 \Rightarrow r = \sigma K$$

daí, a solução geral é:

$$G(t) = ce^{\sigma K t} \quad (8.53)$$

Logo, de (8.51) e (8.53) temos para cada $n = 1, 2, 3, \dots$, uma função

$$u_n(x, t) = e^{-n^2 \pi^2 K t / L^2} \cdot \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (8.54)$$

a qual satisfaz à equação (8.35) e às condições de fronteira (8.37).

Esses u_n chegaram quase a resolver o problema (8.35)-(8.37). A dificuldade está em que, sendo

$$u_n(x, 0) = \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad (8.55)$$

$u_n(x, t)$ só seria solução de (8.35)-(8.37) se a função dada $f(x)$ tivesse a forma

$$f(x) = \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (8.56)$$

Em geral, temos que

$$\sum_{n=1}^N c_n u_n(x, t), \quad (8.57)$$

onde os c_n são constantes e os u_n são as funções definidas em (8.54) é solução do problema pois uma combinação linear de soluções do problema linear é também uma solução. Consequentemente, se a condição inicial $f(x)$ for da forma

$$\sum_{n=1}^N c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \quad (8.58)$$

então, nesse caso, a solução de (8.35)-(8.37) será

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^N c_n e^{-n^2 \pi^2 K t / L^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}. \quad (8.59)$$

E se f não tiver a forma simples acima? Aí vem a idéia de tomarmos "somas infinitas". Suponhamos que a função dada $f(x)$ possa ser expressa em uma série da forma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \quad (8.60)$$

onde os c_n devem ser os coeficientes de Fourier da f , dada em $[0, L]$ e estendida a toda reta $\mathbb{R}$ de modo a ser ímpar e periódica de período $2L$. Assim, podemos determinar estes coeficientes multiplicando (8.60) por $\operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L}$, para $m \geq 1$ fixo

$$f(x) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} \quad (8.61)$$

integrando,

$$\int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-L}^L c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} dx \quad (8.62)$$

em apenas um ponto, teremos $n = m$ e então apenas uma integral do segundo membro será igual a L , e as demais serão iguais a zero, como visto anteriormente. Daí,

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} dx &= c_m L \Rightarrow c_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} dx \\ c_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \end{aligned} \quad (8.63)$$

Então o candidato para solução do problema dado em (8.35)-(8.37) nesse caso seria

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 \pi^2 K t / L^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}. \quad (8.64)$$

com os c_n dados por (8.63).

5.8.1 Unicidade de solução para a equação do calor

Suponha que $u_1(x, t)$ e $u_2(x, t)$ sejam duas soluções do sistema (8.35)-(8.37). Então, $u = u_1 - u_2$ é uma função contínua em $\mathfrak{R}$ e tal que

$$\begin{cases} u_t = Ku_{xx}, \text{ em } \mathfrak{R} \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, \text{ para } t > 0 \\ u(x, 0) = 0, \text{ para } 0 \leq x \leq L \end{cases} \quad (8.65)$$

A unicidade de solução do sistema (8.35)-(8.37) segue das relações acima se provarmos que $u \equiv 0$. Isso é, porém, consequência imediata do resultado enunciado a seguir.

Teorema 5.8.1 (Princípio do Máximo-Mínimo) *Seja $u(x, t)$ uma função contínua no retângulo $\bar{\mathfrak{R}}_{12} = (x, t) : \{x_1 \leq x \leq x_2, t_1 \leq t \leq t_2\}$ e tal que $u_t = Ku_{xx}$, para $x_1 < x < x_2$ e $t_1 < t < t_2$. Então o máximo de u é assumido em um dos seguintes lados de $\bar{\mathfrak{R}}_{12}$:*

$$\begin{cases} l_1 = \{x = x_1, t_1 \leq t \leq t_2\} \\ l_2 = \{x_1 \leq x \leq x_2, t = t_1\} \\ l_3 = \{x = x_2, t_1 \leq t \leq t_2\} \end{cases} \quad (8.66)$$

Demonstração (Privalov)

Sejam M o máximo de u em $\bar{\mathfrak{R}}_{12}$ e m o máximo de u em $l_1 \cup l_2 \cup l_3$. Quer-se provar que $M = m$. Suponha, por contradição, que $M > m$ e seja (x_0, t_0) um ponto de $\bar{\mathfrak{R}}_{12} \setminus (l_1 \cup l_2 \cup l_3)$, onde u assume seu valor máximo. Defina a função

$$v(x, t) = u(x, t) + \frac{M - m}{4L^2} (x - x_0)^2, \quad (8.67)$$

onde $L = x_2 - x_1$. Como em $l_1 \cup l_2 \cup l_3$ temos

$$v(x, t) < m + \frac{M - m}{4L^2} L^2 = \frac{M + 3m}{4} < M \quad (8.68)$$

e

$$v(x_0, t_0) = u(x_0, t_0) = M, \quad (8.69)$$

segue-se que o máximo de v é assumido em um ponto $(\bar{x}, \bar{t})$ de $\bar{\mathfrak{R}}_{12} \setminus (l_1 \cup l_2 \cup l_3)$.

Em tal ponto de máximo devemos ter

$$v_t(\bar{x}, \bar{t}) \geq 0 \text{ e } v_{xx}(\bar{x}, \bar{t}) \leq 0 \quad (8.70)$$

Por outro lado, usando (34), tem-se

$$v_t(\bar{x}, \bar{t}) = u_t(\bar{x}, \bar{t}) \quad v_{xx}(\bar{x}, \bar{t}) = u_{xx}(\bar{x}, \bar{t}) + \frac{M - m}{2L^2} \quad (8.71)$$

multiplicando esta última expressão por K , e isolando o termo que contém u_{xx} , temos

$$Ku_{xx}(\bar{x}, \bar{t}) = Kv_{xx}(\bar{x}, \bar{t}) - K \frac{M - m}{2L^2} \quad (8.72)$$

e, como u satisfaz à equação do calor,

$$v_t(\bar{x}, \bar{t}) = Kv_{xx}(\bar{x}, \bar{t}) - K \frac{M - m}{2L^2} < Kv_{xx}(\bar{x}, \bar{t}) \quad (8.73)$$

que contradiz as desigualdades em (35). Portanto provamos que u assume seu máximo em $l_1 \cap l_2 \cap l_3$. Para ver que o mínimo também é atingido, aí basta observar que $-u$ também satisfaz à equação do calor e que o mínimo de u é igual a $-\max(-u)$.

Para referência futura enunciamos o seguinte resultado de unicidade que foi provado acima.

Teorema 5.8.2 (Unicidade) *Seja f uma função nas condições do teorema de Fourier definida em $[0, L]$. Então, a solução de (8.35)-(8.37), caso exista, é única.*

Demonstração: Basta mostrar que u solução do sistema (8.65) é nula. Mas isto segue diretamente do Princípio do Máximo-Mínimo mostrado no Teorema 5.8.1 acima.

Teorema 5.8.3 (Continuidade da solução com os dados iniciais) *Sejam $f_1(x)$ e $f_2(x)$ funções contínuas em $[0, L]$, para as quais o problema*

$$\begin{cases} u_t = Ku_{xx}, \text{ em } \mathfrak{R} \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, \text{ para } t > 0 \\ u(x, 0) = f_i(x), \text{ para } 0 \leq x \leq L \end{cases} \quad (8.74)$$

para $i = 1, 2$, têm soluções u_1 e u_2 . Então,

$$\max_{(x,t) \in \mathfrak{R}} |u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq \max_{x \in [0, L]} |f_1(x) - f_2(x)|. \quad (8.75)$$

Demonstração

Consequência imediata do Teorema 5.8.1. Defina a função

$$v(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t) \quad (8.76)$$

Derivando v com relação a t e depois duas vezes com relação a x ,

$$v_t(x, t) = u_{1t}(x, t) - u_{2t}(x, t); \quad v_{xx}(x, t) = u_{1xx}(x, t) - u_{2xx}(x, t).$$

Como u_1 e u_2 são soluções para o problema acima, temos

$$v_t(x, t) = Kv_{xx}(x, t). \quad v(0, t) = v(L, t) = 0$$

$$v(x, 0) = u_1(x, 0) - u_2(x, 0) = f_1(x) - f_2(x) = g(x)$$

Ou seja, temos um outro problema

$$\begin{cases} v_t = K v_{xx}, \text{ em } \mathfrak{R} \\ v(0, t) = v(L, t) = 0, \text{ para } t > 0 \\ v(x, 0) = g(x), \text{ para } 0 \leq x \leq L \end{cases} \quad (8.77)$$

Daí pelo Teorema 5.8.1,

$$\begin{aligned} \max_{(x,t) \in \mathfrak{R}} |v(x, t)| &= \max_{(x,t) \in l_1 \cup l_2 \cup l_3} |v(x, t)| \\ &\leq \max_{(x,t) \in l_2} |v(x, t)| = \max_{x \in [0, L]} |v(x, 0)| = \max_{x \in [0, L]} |g(x)| \end{aligned}$$

nesse caso estamos considerando que

$$\begin{cases} l_1 = \{x = 0, t \geq 0\} \\ l_2 = \{0 \leq x \leq L, t = 0\} \\ l_3 = \{x = L, t \geq 0\}. \end{cases} \quad (8.78)$$

5.9 Equação de Laplace

5.9.1 Problema de Dirichlet

Consideremos uma região Ω do plano; região e domínio são expressões usadas para designar conjuntos abertos e conexos. Os três tipos de região que aparecem aqui são:

(i) o disco de raio ρ e centro na origem

$$D_\rho = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < \rho^2\}; \quad (9.79)$$

(ii) um retângulo

$$\mathfrak{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < a, 0 < y < b\}; \quad (9.80)$$

(iii) um semiplano

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\infty < x < \infty, y > 0\}. \quad (9.81)$$

Designamos por $\bar{\Omega}$ a aderência de Ω e por $\partial\Omega$ a fronteira de Ω .

Definição 5.9.1 *Uma função contínua $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ será harmônica se ela satisfizer à equação de Laplace*

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (9.82)$$

O operador Δ é conhecido como laplaciano.

Exemplo 5.9.2 *Funções harmônicas:*

a)

$$u(x, y) = ax + by + c,$$

para quaisquer constantes a, b, c .

b)

$$u(x, y) = x^2 - y^2.$$

c) Se $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ for uma função analítica complexa, então suas partes real e imaginária serão funções harmônicas. isso decorre imediatamente das equações de Cauchy-Riemann.

5.9.2 Laplaciano em coordenadas polares

Usando as fórmulas de mudança de variáveis, entre coordenadas cartesianas e polares,

$$x = r \cos \theta \text{ e } y = r \sin \theta, \quad (9.83)$$

temos

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ e } \theta = \arctan \frac{y}{x} \quad (9.84)$$

fazendo $u(x, y) = v(r, \theta)$, então

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

e ainda,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial v}{\partial r} \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial v}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}. \quad (9.85)$$

Também temos que

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y}$$

e ainda,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \left(\frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial v}{\partial r} \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial v}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}. \quad (9.86)$$

Mas, das igualdades em (9.84), utilizando a regra da cadeia, do produto ou do quociente, temos:

$$\bullet \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

analogamente,

$$\bullet \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

- $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + x \left[-\frac{1}{2} \cdot 2x \cdot \frac{1}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} \right] = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{x^2}{(x^2 + y^2) \sqrt{(x^2 + y^2)}} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{y^2}{(x^2 + y^2) \sqrt{(x^2 + y^2)}};$
- $\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{x^2}{(x^2 + y^2) \sqrt{(x^2 + y^2)}};$
- $\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left[y \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \right] = -\frac{\frac{y}{x^2}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = -\frac{\frac{y}{x^2}}{\frac{x^2 + y^2}{x^2}} \Rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2};$
- $\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2};$
- $\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = -y \cdot (-1) \cdot (2x) \cdot \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2};$
- $\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = x \cdot (-1) \cdot (2y) \cdot \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$

Agora, somando os segundos membros de (9.85) e (9.86) e igualando a zero (já que a soma dos primeiros membros destas igualdades é igual a zero em virtude de (9.82)), ao substituir os resultados acima, obtemos:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2 + \frac{\partial v}{\partial r} \cdot \frac{y^2}{(x^2 + y^2) \sqrt{(x^2 + y^2)}} + 2 \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{-y}{x^2 + y^2} \\ & + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right)^2 + \frac{\partial v}{\partial \theta} \cdot \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2 + \frac{\partial v}{\partial r} \cdot \frac{x^2}{(x^2 + y^2) \sqrt{(x^2 + y^2)}} \\ & + 2 \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right)^2 + \frac{\partial v}{\partial \theta} \cdot \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} = 0 \end{aligned}$$

daí

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \left(\frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} \right) + \frac{\partial v}{\partial r} \left(\frac{y^2}{(x^2 + y^2) \sqrt{(x^2 + y^2)}} + \frac{x^2}{(x^2 + y^2) \sqrt{(x^2 + y^2)}} \right) \\ & + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \left(\frac{x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) = 0 \end{aligned}$$

segue que

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \left(\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} \right) + \frac{\partial v}{\partial r} \left(\frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2) \sqrt{(x^2 + y^2)}} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \left(\frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) = 0$$

logo

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{\partial v}{\partial r} \cdot \frac{1}{r} + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \cdot \frac{1}{r^2} = 0.$$

Ou ainda,

$$\Delta_r v = v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v_{\theta\theta} = 0. \quad (9.87)$$

Esta é a equação de Laplace em coordenadas polares.

5.9.3 Problema de Dirichlet para a equação de Laplace

Dada uma função contínua $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$, tem-se que determinar uma função $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo às seguintes condições:

- (i) u é contínua em $\bar{\Omega}$,
- (ii) u é harmônica em Ω
- (iii) $u = f$ em $\partial\Omega$ (condições de fronteira).

Esse problema para uma região arbitrária Ω não é trivial. Há certas situações dependendo do domínio escolhido em que nem sempre existe solução desse problema. O aluno interessado pode ver isto no livro do Djairo de Equações Diferenciais Parciais, [?]. Trataremos desse problema para alguns tipos especiais de regiões, utilizando as séries de Fourier.

Unicidade do problema de Dirichlet

Para mostrar que a solução do problema de Dirichlet é única, utilizaremos o Princípio do Máximo, que a seguir enunciamos e provamos, seguindo uma demonstração de Privalov.

Teorema 5.9.3 (*Princípio do Máximo*) *Sejam Ω uma região limitada do plano e $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $\bar{\Omega}$ e harmônica em Ω . Então o máximo de u é atingido na fronteira.*

Demonstração

Sendo Ω limitado, segue-se que $\bar{\Omega}$ e $\partial\Omega$ são conjuntos compactos (isto é, fechados e limitados) do plano. Utilizaremos um teorema de Análise que estabelece: "Toda função real contínua $g : K \rightarrow \mathbb{R}$, em um compacto K , tem um valor máximo μ , i.e., existe $(\bar{x}, \bar{y}) \in K$, tal que $f(x, y) \leq f(\bar{x}, \bar{y}) = \mu$, para todo (x, y) em K ." Sejam

$$M = \max_{\bar{\Omega}} u(x, y) \quad e \quad m = \max_{\partial\Omega} u(x, y). \quad (9.88)$$

e suponhamos, por contradição, que $m < M$. Então u assume seu máximo em um ponto (x_0, y_0) que deve estar em Ω , e não em $\partial\Omega$. Definamos a função

$$v(x, y) = u(x, y) + \frac{M - m}{2d^2} [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2], \quad (9.89)$$

onde d é o diâmetro da região Ω , i.e., d é o supremo das distâncias entre pares de pontos de Ω . Agora, observando que

$$v(x_0, y_0) = u(x_0, y_0) = M \quad (9.90)$$

e

$$v(x, y) \leq m + \frac{M - m}{2d^2}d^2 = \frac{M + m}{2} < \frac{M + M}{2} = M, \forall (x, y) \in \partial\Omega \quad (9.91)$$

concluimos que a função v assume seu máximo em um ponto (x_1, y_1) de Ω e não de $\partial\Omega$. Portanto neste ponto $v_{xx}(x_1, y_1) \leq 0$ e $v_{yy}(x_1, y_1) \leq 0$, que nos dá

$$\Delta v(x_1, y_1) \leq 0. \quad (9.92)$$

Por outro lado, temos, a partir de (9.89), que

$$v_x = u_x + \frac{M - m}{2d^2} [2(x - x_0) + 0] = u_x + \frac{(M - m)(x - x_0)}{d^2},$$

segue que

$$v_{xx} = u_{xx} + \frac{M - m}{d^2}$$

analogamente,

$$v_{yy} = u_{yy} + \frac{M - m}{d^2}, \quad (9.93)$$

daí, como u é harmônica,

$$\Delta v = \frac{M - m}{2d^2} > 0 \quad (9.94)$$

para todos os pontos de Ω . As desigualdades (9.92) e (9.94) são contraditórias. C.Q.D.

Corolário 5.9.4 *Seja u como no Teorema 5.9.3 acima. Então u assume seu mínimo em $\partial\Omega$.*

Demonstração

Fazendo-se $v(x, y) = -u(x, y)$ pelo teorema anterior,

$$\max_{\partial\Omega} v(x, y) = \alpha \Rightarrow \alpha \geq v(x, y), \forall (x, y) \in \partial\Omega, \quad (9.95)$$

daí,

$$\alpha \geq -u(x, y), \forall (x, y) \in \partial\Omega, \quad (9.96)$$

então,

$$u(x, y) \geq -\alpha = \beta, \quad (9.97)$$

logo β é cota inferior para $u(x, y)$. Deduzimos então que,

$$\beta = \min_{\partial\Omega} u(x, y). \quad (9.98)$$

Teorema 5.9.5 *Sejam u_1 e u_2 duas soluções do problema de Dirichlet, para uma mesma f . Então $u_1 \equiv u_2$.*

Demonstração

A função $u = u_1 - u_2$ é contínua em $\bar{\Omega}$, harmônica em Ω e igual a zero em $\partial\Omega$. Logo, pelo Princípio do Máximo, $u(x, y) \leq 0$, para todo (x, y) em $\bar{\Omega}$, e, pelo Corolário 5.9.4, $u(x, y) \geq 0$. Dai $u \equiv 0$. C.Q.D.

5.9.4 Problema de Dirichlet no retângulo

Para esse problema, a região Ω é o retângulo $\mathfrak{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < a \text{ e } 0 < y < b\}$. Assim, a fronteira da região se decompõe em quatro segmentos, digamos que as condições de fronteira sejam

$$u(x, 0) = f_0(x), u(x, b) = f_1(x), u(0, y) = g_0(y), u(a, y) = g_1(y), \quad (9.99)$$

dadas separadamente em cada um dos lados do retângulo. Mas esses dados de fronteira não podem ser arbitrários; pois, para eles comporem uma função continua, ao longo da fronteira, devemos ter as seguintes condições de compatibilidade: $f_0(0) = g_0(0)$, $f_0(a) = g_1(0)$, $g_1(b) = f_1(a)$ e $f_1(0) = g_0(b)$.

A idéia inicial para resolver esse problema é decompô-lo em quatro problemas de Dirichlet; cada um deles é obtido fazendo-se três das funções em (9.99) iguais a 0 e mantendo a outra. Resolve-se cada um desses problemas, isoladamente, e a solução do problema em pauta é a soma das quatro soluções dos problemas parciais. Portanto basta resolver o problema de Dirichlet para o retângulo com a condição de fronteira

$$u(x, 0) = f(x), u(x, b) = u(0, y) = u(a, y) = 0. \quad (9.100)$$

Como nosso objetivo é enfatizar o método de Fourier, vamos fazer a hipótese simplificadora $f(0) = f(a) = 0$, o que torna o dado de fronteira continuo ao longo de todo o contorno do retângulo.

Resumindo - O problema é determinar uma função continua $u_1 : \mathfrak{R} \rightarrow \mathbb{R}$, harmônica em $\mathfrak{R}$ e satisfazendo à condição de fronteira (9.100). Ou seja, vamos resolver o seguinte problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \mathfrak{R} \\ u(x, 0) = f(x), u(x, b) = 0 & \text{para } 0 < x < a \\ u(0, y) = u(a, y) = 0 & \text{para } 0 < y < b. \end{cases} \quad (9.101)$$

Vamos tentar soluções na forma $u_1(x, y) = A(x)B(y)$. Substituindo na equação de Laplace, obtemos

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow A'' \cdot B + B'' \cdot A = 0 \Rightarrow A'' \cdot B = -B'' \cdot A \quad (9.102)$$

daí,

$$\frac{A''}{A} = -\frac{B''}{B} = \mu. \quad (9.103)$$

onde μ é uma constante. Daí, duas equações diferenciais ordinárias são obtidas,

$$A'' - \mu A = 0, \quad (9.104)$$

$$B'' + \mu B = 0. \quad (9.105)$$

A condição de fronteira exige $A(0)B(y) = A(a)B(y) = 0$, e como não nos interessa $B \equiv 0$, devemos ter

$$A(0) = A(a) = 0 \quad (9.106)$$

Então, vamos resolver a Equação (9.104) junto com as condições de fronteira (9.106).

Resolução:

(*) *Primeiro caso:*

Suponha-se $\mu > 0$. Fazendo-se $\mu = k^2$, a equação (9.104) toma a forma:

$$A'' - k^2 A = 0 \quad (9.107)$$

procuramos uma solução do tipo $A = e^{rx}$, temos $A' = re^{rx}$, $A'' = r^2 e^{rx}$, substituindo na equação, temos:

$$r^2 e^{rx} - k^2 e^{rx} = 0 \Rightarrow (r^2 - k^2) e^{rx} = 0, e^{rx} \neq 0 \Rightarrow r^2 - k^2 = 0 \Rightarrow r^2 = k^2 \Rightarrow r = \pm k$$

Daí, as raízes do polinômio característico são $-k$ e $+k$. Portanto, a solução geral será dada por:

$$X(x) = c_1 e^{-kx} + c_2 e^{kx} \quad (9.108)$$

sendo c_1 e c_2 constantes a serem determinadas pelas condições de contorno estabelecidas pela equação (9.106). Portanto, temos:

$$A(0) = c_1 e^0 + c_2 e^0 = 0$$

$$A(a) = c_1 e^{-ka} + c_2 e^{ka} = 0$$

que é um sistema linear homogêneo nas incógnitas c_1 e c_2 , cujo determinante D é não nulo:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{-ka} & e^{ka} \end{vmatrix} = e^{ka} - e^{-ka} \neq 0 \text{ e } D_{c_1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & e^{ka} \end{vmatrix} = 0, D_{c_2} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ e^{-ka} & 0 \end{vmatrix} = 0, \text{ temos}$$

que $c_1 = \frac{D_{c_1}}{D}$ e $c_2 = \frac{D_{c_2}}{D}$, daí concluímos que a única solução do sistema é a solução trivial $c_1 = c_2 = 0$. Conclui-se que o problema da equação (9.104) não possui solução diferente da solução nula se $\mu > 0$.

(*) *Segundo caso:*

Suponha-se $\mu = 0$. Assim sendo, a equação reduz-se a $A''(x) = 0$ e a solução é $A(x) = c_1 x + c_2$. As condições $X(0) = c_2 = 0$, $X(a) = c_1 a + c_2 = 0$ implicam que, também neste caso, o problema da equação (9.104) possui apenas a solução nula.

(*) *Terceiro caso:*

Suponha-se $\mu < 0$. Fazendo $\mu = -k$, a equação 9.104) toma a forma:

$$A'' + kA = 0, \quad (9.109)$$

cujo polinômio característico é: $r^2 + k = 0$ e possui as raízes $+i\sqrt{k}$ e $-i\sqrt{k}$ e a solução geral da equação diferencial é:

$$A(x) = c_1 \sin \sqrt{k} \cdot x + c_2 \cos \sqrt{k} \cdot x \quad (9.110)$$

De $A(0) = 0$ deduzimos que:

$$c_1 \sin 0 + c_2 \cos 0 = 0 \Rightarrow 0 + c_2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \quad (9.111)$$

e a solução anterior tem a forma:

$$A(x) = c_1 \operatorname{sen} \sqrt{k} x \quad (9.112)$$

na qual, evidentemente, supomos $c_1 \neq 0$. Portanto, de $A(a) = 0$ resulta que $c_1 \operatorname{sen} \sqrt{k} a = 0$, isto é, $\sqrt{k} a = n\pi$, sendo n um número inteiro positivo. Portanto, o problema da equação (9.104) possui uma coleção enumerável de soluções não nulas para valores de μ , dados por:

$$\mu_n = -k_n = -\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, n = 1, 2, \dots \quad (9.113)$$

a cada μ_n corresponde uma solução $A_n(x)$ definida por:

$$A_n(x) = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a}, n = 1, 2, \dots \quad (9.114)$$

onde cada μ_n é um autovalor do problema dado em (9.104), (9.106), cujas autofunções correspondentes são dadas por (9.114).

Para cada n , temos a Equação (9.105) na forma

$$B'' - \frac{n^2 \pi^2}{a^2} B = 0, \quad (9.115)$$

cuja solução geral é

$$B_n(y) = \beta_n e^{n\pi y/a} + \gamma_n e^{-n\pi y/a}. \quad (9.116)$$

A condição de fronteira (9) exige $A(x)B(b) = 0$, e como $A \equiv 0$ não interessa, obtemos $B(b) = 0$. Essa condição imposta em (9.116) nos dá

$$0 = \beta_n e^{n\pi b/a} + \gamma_n e^{-n\pi b/a} \Rightarrow \beta_n = -\gamma_n e^{-2n\pi b/a}, \quad (9.117)$$

e, daí,

$$B_n(y) = -\gamma_n e^{-n\pi b/a} \left[e^{(n\pi/a)(y-b)} - e^{(-n\pi/a)(y-b)} \right] \quad (9.118)$$

multiplicando e dividindo por 2,

$$B_n(y) = -2\gamma_n e^{-n\pi b/a} \left[\frac{e^{(n\pi/a)(y-b)} - e^{(-n\pi/a)(y-b)}}{2} \right]$$

segue que

$$B_n(y) = -2\gamma_n e^{-n\pi b/a} \sinh \frac{n\pi (y-b)}{a}. \quad (9.119)$$

E finalmente,

$$u_{1n}(x, y) = \alpha_n e^{-n\pi b/a} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} \sinh \frac{n\pi (y-b)}{a}, \quad (9.120)$$

é harmônica e satisfaz à condição de fronteira (9.100), com exceção da primeira igualdade. Tentamos agora obter uma função harmônica, que também satisfaça à condição (9.100), na forma

$$u_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{-n\pi b/a} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} \sinh \frac{n\pi (y-b)}{a}. \quad (9.121)$$

Consequentemente, os coeficientes α_n devem ser escolhidos de modo que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{-n\pi b/a} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} \sinh \frac{-n\pi b}{a}, \quad (9.122)$$

o que será viável se $f'(x)$ for seccionalmente contínua, e periódica de $2a$, por exemplo. Designando por

$$f_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} dx, \quad (9.123)$$

e fazendo

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a}, \quad (9.124)$$

onde

$$k_n = \alpha_n e^{-n\pi b/a} \sinh \frac{-n\pi b}{a},$$

temos que

$$2 \int_0^a f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} dx = k_n \cdot a \Rightarrow k_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} dx = f_n, \quad (9.125)$$

daí,

$$\alpha_n e^{-n\pi b/a} = \frac{f_n}{\sinh \frac{-n\pi b}{a}}. \quad (9.126)$$

então, (9.121) toma a forma

$$u_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} \frac{\sinh \frac{n\pi(y-b)}{a}}{\sinh \frac{-n\pi b}{a}}. \quad (9.127)$$

Que é o candidato a solução do problema (9.101).

Obedecendo a idéia inicial proposta para resolver o problema de Dirichlet no retângulo, temos outros três problemas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u_2 = 0 \\ u_2(x, b) = f_1(x) \\ u_2(x, 0) = u_2(0, y) = u_2(a, y) = 0 \end{array} \right., \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta u_3 = 0 \\ u_3(0, y) = g_0(x) \\ u_3(x, 0) = u_3(x, b) = u_3(a, y) = 0 \end{array} \right., \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta u_4 = 0 \\ u_4(a, y) = g_1(x) \\ u_4(x, 0) = u_4(x, b) = u_4(0, y) = 0 \end{array} \right.,$$

que devem ser resolvidos isoladamente, e de maneira análoga ao problema parcial anterior no qual foi determinada a função u_1 .

Assim, a solução do problema principal em pauta é a soma das quatro soluções dos problemas parciais acima. Ou seja,

$$u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y) + u_3(x, y) + u_4(x, y) \quad (9.128)$$

é a solução procurada. A qual é harmônica em $\mathfrak{R}$, contínua em $\bar{\mathfrak{R}}$, obedece as seguintes condições de compatibilidade

$$f_0(0) = g_0(0), f_0(a) = g_1(0), g_1(b) = f_1(a) \text{ e } f_1(0) = g_0(b), \quad (9.129)$$

e as seguintes condições de fronteira

$$u(x, 0) = f_0(x), u(x, b) = f_1(x), u(0, y) = g_0(y), u(a, y) = g_1(y). \quad (9.130)$$

5.10 Exercícios

- 1) Utilize o método de separação de variáveis e as séries de Fourier para achar uma solução do problema

$$4u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0,$$

$$u(0, t) = 0 = u(2, t), \quad t \geq 0,$$

$$u(x, 0) = 2\text{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \text{sen}(\pi x) + 4\text{sen}(2\pi x), \quad 0 \leq x \leq 2.$$

- 2) Considere o problema de contorno

$$u \in C^2((0, L) \times (0, \infty)) \cap C([0, L] \times [0, \infty)),$$

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

$$u(0, t) = 0 = u_x(L, t) + \gamma u(L, t), \quad t \geq 0,$$

onde γ e α são constantes positivas.

- (i) Procure soluções da forma $u(x, t) = X(x)T(t)$ e mostre que X e T satisfazem

$$-X''(x) = \lambda X(x), \quad 0 < x < L,$$

$$X(0) = 0 = X'(L) + \gamma X(L),$$

$$T'(t) + \lambda \alpha^2 T(t) = 0, \quad t > 0.$$

- (ii) Mostre que os auto-valores λ em (i) são estritamente positivos e satisfazem a equação

$$\sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}L) + \gamma \text{sen}(\sqrt{\lambda}L) = 0.$$

(iii) Desenhe os gráficos das funções $y = \tan x$ e $y = \frac{-x}{(\gamma L)}$, $x > 0$, e deduza graficamente que existe um número infinito e enumerável de auto-valores positivos. Denotando esses auto-valores por $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$ verifique graficamente que $\lambda_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$.

(iv) Ache a solução $u_n(x, t)$ correspondente ao autovalor λ_n .

(v) Sabendo que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_n} x),$$

determine a solução do problema que satisfaz a condição inicial $u(x, 0) = f(x)$.

3) Seja $\Omega = (0, \pi) \times (0, \pi)$. Ache uma solução $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ para o problema

$$\Delta u = 0 \text{ em } \Omega,$$

$$u(0, y) = \operatorname{sen} y = u(\pi, y), \quad 0 \leq y \leq \pi,$$

$$u(x, 0) = \operatorname{sen} x = u(x, \pi), \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

4) Ache uma solução $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ da equação de Laplace em $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < a, 0 < y < b\}$, a e b constantes positivas, satisfazendo as condições de contorno $u(0, y) = 0 = u(a, y)$, $0 \leq y \leq b$, $u(x, 0) = 0$, $u(x, b) = g(x)$, $0 \leq x \leq a$, onde

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x \leq a/2, \\ a - x & \text{se } a/2 \leq x \leq a. \end{cases}$$

5) Resolva o problema

$$u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}),$$

$$\Delta u = 0, \text{ em } \Omega,$$

$$u|_{\partial\Omega} = f \in C(\partial\Omega),$$

onde $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < r^2\}$ e $r > 0$ é constante.

6) Resolva o problema acima no caso em que f é constante.

7) Resolva o problema do exercício (5) no caso em que $f(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta) = A \cos \theta + B \operatorname{sen} \theta + C$ com A, B e C são constantes, $\theta \in [0, 2\pi]$.

8) Nos exercícios (3), (4) e (5) mostre o caso da unicidade de solução para esses problemas.

9) Considere a equação da onda

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

(i) suponha que as soluções dessa equação seja da forma

$$u(x, t) = \psi(x)e^{\pm wt}, \quad w > 0,$$

e mostrar que $u(x, t)$ deve ser da forma

$$u(x, t) = (A \cos kx + B \operatorname{sen} kx)e^{\pm wt} \text{ ou } (Ae^{kx} + Be^{-kx})e^{\pm wt}.$$

(ii) Supor a corda fixa nos extremos $x = 0$ e $x = L$. Se ela é abandonada com velocidade inicial nula, então seu movimento é descrito por

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} (A_n \cos w_n t + B_n \operatorname{sen} w_n t),$$

sendo $w_n = \frac{n\pi c}{L}$.

(iii) Usar a identidade

$$\operatorname{sen}(a + b) + \operatorname{sen}(a - b) = 2 \operatorname{sen} a \cos b$$

e mostrar que o deslocamento u é dado por

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi(x - ct)}{L} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi(x + ct)}{L}.$$

(iv) Seja $\tilde{u}_0$ a extensão ímpar de período $2L$ de u_0 a $(-\infty, \infty)$, isto é,

$$\tilde{u}_0(x) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq L,$$

$$\tilde{u}_0(x) = -u_0(-x), \quad -L \leq x \leq 0,$$

$$\tilde{u}_0(x + 2L) = \tilde{u}_0(x), \quad -\infty < x < \infty.$$

Supor ainda que u_0 contínua com derivada primeira contínua por partes e $u_0(0) = u_0(L) = 0$. Neste caso, mostrar que o deslocamento pode ser expresso como

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\tilde{u}_0(x + ct) + \tilde{u}_0(x - ct)], \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0.$$

11) Se a corda oscila num meio que oferece resistência a seu movimento (ar, por exemplo) e essa resistência pode ser considerada proporcional à velocidade, a equação obtida é

$$u_{tt} + \gamma u_t - c^2 u_{xx} = 0, \quad 0 \leq x \leq L, \quad t > 0, \quad \gamma > 0, \quad \gamma = 2\mu,$$

que é chamada "equação de ondas amortecidas" para a corda vibrante.

(a) Usar o método de separação de variáveis, mostrar que

$$u_n(x, t) = e^{-\gamma t} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} (A_n \cos w_n t + B_n \operatorname{sen} w_n t), \quad n = 1, 2, \dots,$$

onde as frequências de vibração w_n são dadas por

$$w_n = \left(\frac{n^2 \pi^2 c^2}{L^2} - \gamma^2 \right)^{1/2} \quad n = 1, 2, \dots$$

supor que γ seja pequeno o suficiente para que os modos normais de vibração $u_n(x, t)$ sejam oscilatórios amortecidos.

(b) Com as condições iniciais

$$u(0, t) = 0, u(L, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad 0 \leq x \leq L,$$

mostrar que a solução formal é, então

$$u(x, t) = e^{-\gamma t} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{L} (A_n \cos w_n t + B_n \sin w_n t),$$

onde

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx,$$

$$B_n = \frac{\gamma A_n}{w_n} + \frac{2}{L w_n} \int_0^L u_1(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx.$$

Capítulo 6

Cálculo Variacional

6.1 Introdução

Apresentaremos uma extensão das idéias de extremização de funções de várias variáveis. Denominamos essa extensão de cálculo variacional, o qual é de grande importância na história da física-matemática e em aplicações modernas nas engenharias e nas outras ciências consideradas exatas. Agora, em vez de atentarmos para os pontos locais que extremizam funções de uma ou mais variáveis, queremos encontrar funções que extremizem aplicações que chamaremos de funcionais (que são funções de funções). Daremos ênfase à obtenção das condições necessárias para se obter tais extremizações. Vamos agora expor e formular alguns problemas modelos que servirão posteriormente para desenvolver e ilustrar as técnicas do Cálculo Variacional.

Problema 1. Encontre a curva de menor comprimento que liga os pontos fixos $P_0(x_0, y_0)$ e $P_1(x_1, y_1)$ no plano. Primeiro, vamos supor que a curva C está parametrizada por $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$. Nosso objetivo é encontrar funções ϕ e ψ continuamente diferenciáveis de modo que o comprimento de C seja um mínimo, ou seja, queremos achar funções ϕ e ψ que minimizem a integral

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{[\phi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt$$

Desde que C passe por P_0 e P_1 , ϕ e ψ devem satisfazer as condições de bordo $(\phi(t_0), \psi(t_0)) = (x_0, y_0)$ e $(\phi(t_1), \psi(t_1)) = (x_1, y_1)$. Podemos formular este problema de uma outra maneira, qual seja, assumimos que C pode ser representada na forma $y = y(x)$. Então o comprimento L de C é dado por

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx$$

Neste caso, queremos encontrar uma função y continuamente diferenciável que minimize a integral acima e satisfaça as condições de bordo $y(x_0) = y_0$ e $y(x_1) = y_1$. Este mesmo problema pode ser formulado em três dimensões. Neste caso, as três funções continuamente diferenciáveis que parametrizam a curva são determinadas de forma que o comprimento $L = \int_{t_0}^{t_1} \left| \frac{dr}{dt} \right| dt =$

$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{[\phi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\omega'(t)]^2} dt$ seja minimizado. A solução deste problema é bem conhecida: é a linha reta que une os dois pontos P_0 e P_1 .

Problema 2. Encontre a curva suave de menor comprimento, situada sobre uma superfície S , e unindo dois pontos P_0 e P_1 sobre S .

Vamos representar S parametricamente por $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$, $z = h(u, v)$, (u, v) em R_{uv} , onde f , g e h são funções conhecidas e R_{uv} é qualquer região do plano- uv . Vamos assumir que qualquer curva suave C sobre S ligando os dois pontos é a imagem de uma curva em R_{uv} unindo (u_0, v_0) a (u_1, v_1) . Se esta curva em R_{uv} é dada por $u = u(t)$, $v = v(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$. Seu comprimento é então

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \left[\left(\frac{df}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dg}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dh}{dt} \right)^2 \right]^{1/2} dt$$

Aplicando a regra da cadeia podemos escrever o integrando de L em termos de $u(t)$ e $v(t)$ e suas derivadas:

$$\begin{aligned} \left(\frac{df}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dg}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dh}{dt} \right)^2 &= (x_u u'(t) + x_v v'(t))^2 + (y_u u'(t) + y_v v'(t))^2 + (z_u u'(t) + z_v v'(t))^2 \\ &= (x_u)^2 [u'(t)]^2 + 2x_u x_v u'(t) v'(t) + (x_v)^2 [v'(t)]^2 + (y_u)^2 [u'(t)]^2 \\ &\quad + 2y_u y_v u'(t) v'(t) + (y_v)^2 [v'(t)]^2 + (z_u)^2 [u'(t)]^2 \\ &\quad + 2z_u z_v u'(t) v'(t) + (z_v)^2 [v'(t)]^2 \\ &= [(x_u)^2 + (y_u)^2 + (z_u)^2] \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2[x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v] \left(\frac{du}{dt} \right) \left(\frac{dv}{dt} \right) \\ &\quad + [(x_v)^2 + (y_v)^2 + (z_v)^2] \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 \end{aligned}$$

chamando $E = (x_u)^2 + (y_u)^2 + (z_u)^2$, $F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v$ e $G = (x_v)^2 + (y_v)^2 + (z_v)^2$ obtemos que L toma a seguinte forma

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \left[E \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2F \left(\frac{du}{dt} \right) \left(\frac{dv}{dt} \right) + G \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 \right]^{1/2} dt.$$

O problema agora consiste em encontrar duas funções $u(t)$ e $v(t)$ continuamente diferenciáveis que minimizem L .

Problema 3. Encontre a curva situada na metade superior do plano- xy ligando dois pontos fixos P_0 e P_1 (que podem estar sobre o eixo- x) tal que a área da superfície de revolução obtida quando a curva é rotacionada em torno do eixo- x é minimizada.

Assuma que a curva que une os dois pontos $P_0(x_0, y_0)$ e $P_1(x_1, y_1)$ é representada por $y = y(x)$, com $y(x_0) = y_0$ e $y(x_1) = y_1$, então a área da superfície A é dada por

$$A = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y(x) \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx$$

Queremos então encontrar a função diferenciável $y(x)$ que minimize a integral acima. É óbvio que se as coordenadas y_0, y_1 dos dois pontos forem iguais, a linha reta $y = y_0$ minimiza a área da superfície. Para $y_0 \neq y_1$, a solução não é tão óbvia.

Problema 4. Entre todos os caminhos suaves num plano vertical ligando dois pontos P_0 e P_1 , encontre o caminho ao longo do qual uma partícula, partindo do repouso, sem atrito e sob a ação da gravidade, leva o tempo mínimo para se deslocar do ponto mais alto para o mais baixo. Este problema foi proposto pela primeira vez em 1696 pelo grande matemático, físico

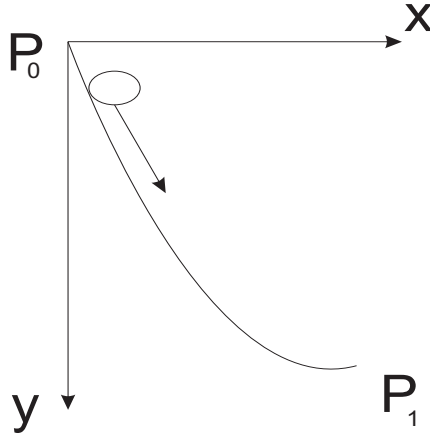


Figura 6.1: Problema da Braquistócrona

e engenheiro John Bernoulli e forneceu ímpeto para o desenvolvimento do cálculo variacional. Este problema é chamado *problema da Braquistócrona*.

Vamos introduzir um sistema de coordenadas- xy para representar o plano vertical tal que o ponto mais alto P_0 seja a origem e o eixo- y positivo verticalmente para baixo conforme a figura 6.1. As coordenadas do ponto mais baixo P_1 são (x_1, y_1) , $y_1 > 0$ e a curva C unindo o ponto P_0 e P_1 é dada na forma $y = y(x)$. Observe que $y(0) = 0$ e $y(x_1) = y_1$. Sabemos que a velocidade de uma partícula que se desloca ao longo de uma curva é $\frac{ds}{dt}$, onde t é o tempo e s é o comprimento do arco ao longo da curva C . Da física elementar pode-se deduzir que a velocidade de uma partícula que cai do repouso sob a ação da gravidade g ao longo de qualquer curva é proporcional à raiz quadrada do deslocamento vertical, sendo $\sqrt{2g}$ a constante de proporcionalidade. Em nosso caso, o deslocamento vertical de uma partícula localizada em (x, y) é y . Assim, $\frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy}$. Portanto, o tempo T gasto pela partícula para percorrer a curva de $(0, 0)$ a (x_1, y_1) é dado pela integral do comprimento de arco

$$T = \int_{(0,0)}^{(x_1,y_1)} \frac{ds}{\sqrt{2gy}}$$

Desde que $ds = [1 + (y'(x))^2]^{1/2} dx$, temos que

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_1} \left\{ \frac{1 + (y'(x))^2}{y(x)} \right\}^{1/2} dx$$

O problema, neste caso, é encontrar a função diferenciável $y(x)$ que minimize a integral T .

Problema 5. De todas as curvas simples, suaves e fechadas, de um dado comprimento, encontre a que cerca a maior área.

Este problema é chamado de *problema isoperimétrico*. Sabemos que a área A da região no plano limitada pela curva simples, suave e fechada C : $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ é dada por

$$\oint_C x dy = \int_{t_0}^{t_1} \phi(t) \psi'(t) dt$$

Desde que o comprimento da curva seja $L_0 = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{[\phi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt$ o problema se reduz à descoberta das duas funções diferenciáveis ϕ e ψ que maximizem a integral de área A sujeita ao vínculo L_0 .

Problema 6. De todas as superfícies suaves fechadas, com área dada, encontre a que inclui maior volume.

Este é uma extensão do problema 5 para dimensões maiores. Para formulá-lo parametrizemos a superfície S : $\vec{r}(x, y, z) = \vec{r}(u, v) = (f(u, v), g(u, v), h(u, v))$, (u, v) em R_{uv} . O volume pode ser

expresso na forma

$$V = \frac{1}{3} \iint_S \vec{r} \cdot \vec{n} d\sigma$$

onde $\vec{n}$ é o vetor normal unitário exterior à superfície S e é dado por

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} [(y_u z_v - y_v z_u) \vec{i} + (z_u x_v - z_v x_u) \vec{j} + (x_u y_v - x_v y_u) \vec{k}]$$

em que o sinal é determinado pela parametrização escolhida para S e onde E , F e G são definidas por: $E = (x_u)^2 + (y_u)^2 + (z_u)^2$, $F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v$ e $G = (x_v)^2 + (y_v)^2 + (z_v)^2$. Acima assumimos que a parametrização escolhida para S é tal que a expressão para $\vec{n}$ represente o vetor normal exterior e não o interior. Assim, resolvendo a expressão acima para o volume, obtemos:

$$V = \iint_{R_{uv}} [x(y_u z_v - y_v z_u) + y(z_u x_v - z_v x_u) + z(x_u y_v - x_v y_u)] du dv$$

A área fixa S_0 da superfície S é dada por $S_0 = \int \int_{R_{uv}} \sqrt{EG - F^2} du dv$. Deste modo o problema se reduz à descoberta das funções diferenciáveis f , g e h que maximizem o volume V sujeito ao vínculo S_0 .

Observe que em cada um dos problemas acima temos uma integral de uma ou mais funções a serem extremizadas. Estas funções são chamadas *funções extremizantes*, enquanto que as funções que satisfazem a diferenciabilidade e às condições de bordo são chamadas *funções admissíveis*.

Os problemas 5 e 6, contudo, são diferentes, pois além dos funcionais L e S há também as condições adicionais L_0 e S_0 . Devemos então combinar os funcionais L e S com seus vínculos para produzir um novo funcional. Daí, o problema resultante pode ser resolvido através do uso de *multiplicadores de Lagrange*.

Vamos agora provar o seguinte lema que será fundamental durante o desenvolvimento dos procedimentos para a resolução de alguns dos problemas formulados acima.

Lema 6.1.1 *Se G é uma função contínua definida sobre o intervalo $x_0 \leq x \leq x_1$ e se*

$$\int_{t_0}^{t_1} \eta(x)G(x)dx = 0 \quad (1.1)$$

para qualquer função η continuamente diferenciável satisfazendo as condições $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$, então $G(x) = 0$ para todo x no intervalo $[x_0, x_1]$.

Prova: Provaremos este lema por contradição. Suponha que $G(x) \neq 0$ para algum ponto, digamos $\tilde{x}$, no intervalo $[x_0, x_1]$. Sem perda de generalidade podemos assumir que $G(\tilde{x}) > 0$. Então, desde que G é contínua, deve existir um intervalo aberto na vizinhança de $\tilde{x}$, digamos o conjunto dos pontos x tais que $|x - \tilde{x}| < \delta$, onde G é positiva. Como (1.1) é válida para η arbitrária, escolhemos η continuamente diferenciável e positiva em $|x - \tilde{x}| < \delta$ e zero em qualquer outro ponto. Logo $\eta(x)G(x) > 0$ em $|x - \tilde{x}| < \delta$, desse modo, a integral de $\eta(x)G(x)$ não pode ser nula. Mas isto contradiz a hipótese (1.1) do lema. Portanto G tem que ser nulo para todo x no intervalo $[x_0, x_1]$.

6.2 Funcionais de funções de uma variável

Para motivar o procedimento do problema geral a ser formulado mais adiante, vamos discutir a solução do problema 1 da seção anterior. Isto é, de todas as funções $y = \bar{y}(x)$ continuamente diferenciáveis satisfazendo as condições de bordo

$$\bar{y}(x_0) = y_0, \quad \bar{y}(x_1) = y_1 \quad (2.2)$$

Vamos encontrar a função que minimize a integral (funcional)

$$\tilde{L}[\bar{y}] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + [\bar{y}'(x)]^2} dx.$$

Observe a notação $\tilde{L}[\bar{y}]$. Isto significa que a integral $\tilde{L}$ pode assumir valores diferentes para diferentes funções $\bar{y}$. Vamos denotar a função extremizante, se existir, por $y(x)$. Essa função deve ser encontrada na classe de funções admissíveis $\bar{y}(x)$ satisfazendo a diferenciabilidade e às condições iniciais.

Poderemos agora deduzir as condições necessárias sobre $y(x)$. Se $\bar{y}(x) = y(x)$ minimiza o funcional $\tilde{L}$, então

$$\tilde{L}[\bar{y}] \geq \tilde{L}[y] \quad (2.3)$$

para qualquer $\tilde{y}$ admissível "próximo de" y , ou seja,

$$\bar{y}(x) = y(x) + \epsilon \eta(x), \quad x_0 \leq x \leq x_1, \quad (2.4)$$

para qualquer função η continuamente diferenciável satisfazendo as condições homogêneas de bordo

$$\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0 \quad (2.5)$$

e para todo ϵ suficientemente pequeno. Na equação (2.4) a combinação $\epsilon\eta$ é chamada de "variação de y ". Desde que a desigualdade (2.3) é satisfeita para cada $\bar{y}$ da forma (2.4), a função definida por

$$L(\epsilon) = \tilde{L}(y + \epsilon\eta) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (y' + \epsilon\eta')^2} dx$$

deve satisfazer a seguinte condição: $L(\epsilon) \geq L(0)$ para todo ϵ suficientemente pequeno e para toda η continuamente diferenciável satisfazendo as condições homogêneas de bordo (2.5). Portanto $L(\epsilon)$ tem um mínimo local em $\epsilon = 0$. As condições de continuidade sobre y e η implicam que L é uma função de ϵ diferenciável e as condições necessárias para mínimo local implicam que $L'(0) = 0$. Assim, calculando $L'(\epsilon)$, usando a regra de Leibniz e impondo a condição $L'(0) = 0$, obtemos

$$L'(0) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} \eta' dx = 0.$$

A idéia agora é integrar por partes para eliminar a derivada sobre η , claro que aqui supomos η continuamente diferenciável. Integrando por partes e usando as condições de bordo (2.5), temos

$$\int_{x_0}^{x_1} \eta \frac{d}{dx} \left[\frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} \right] dx = 0.$$

Daí, segue do lema (6.1.1) que

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} \right] = 0 \quad (2.6)$$

Esta equação é chamada de *equação de Euler-Lagrange* para o funcional $\tilde{L}$. Isto é uma condição necessária que deve ser satisfeita pela função minimizante $y(x)$. Em geral, as condições para um mínimo, são muito difíceis de se mostrar e discutir inteiramente. Contudo, para este problema, é fácil mostrar que

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{(\eta')^2}{[1 + (y')^2]^{3/2}} > 0, \quad \text{para } \eta \neq 0.$$

Portanto, qualquer solução admissível de (2.6) pode produzir um mínimo para $\tilde{L}$.

A equação de Euler-Lagrange em (2.6) implica que y' deve ser constante e sua solução geral é

$$y = \alpha x + \beta$$

onde α e β são escolhidas tal que as condições de bordo (2.2) sejam satisfeitas. Assim, a linha reta é a curva de menor comprimento entre dois pontos num plano.

Vamos agora analisar nosso problema: seja F uma função de três variáveis x , y e z com derivadas parciais de segunda ordem contínuas. Se $y = \bar{y}(x)$ e $z = \bar{y}'(x)$, então $F(x, y, z) = F(x, \bar{y}(x), \bar{y}')$ é uma função apenas de x . Consideremos o problema a seguir.

Problema: Extremize o funcional $\tilde{I}$, definido por $\tilde{I}[\bar{y}] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, \bar{y}, \bar{y}') dx$ na classe de funções duas vezes continuamente diferenciáveis $\bar{y}(x)$ definidas sobre o intervalo $x_0 \leq x \leq x_1$ e satisfazendo as condições de bordo

$$\bar{y}(x_0) = y_0, \quad \bar{y}(x_1) = y_1$$

Caracterizamos cada função admissível $\bar{y}(x)$ por

$$\bar{y}(x) = y(x) + \epsilon \eta(x)$$

onde y é a função extremizante procurada e η é a função arbitrária duas vezes continuamente diferenciável satisfazendo as condições homogêneas de bordo (2.5). Transformemos o funcional $\tilde{I}$ em função de ϵ dado por

$$I(\epsilon) = \tilde{I}[y + \epsilon \eta] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y + \epsilon \eta, y' + \epsilon \eta') dx$$

Uma condição necessária para $\tilde{I}$ ter um extremo em $\bar{y} = y$ é que $I(\epsilon)$ tenha um extremo em $\epsilon = 0$ e daí $I'(0) = 0$. Usando a regra de Leibniz e a regra da cadeia, obtemos

$$I'(\epsilon) = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial F(x, \bar{y}, \bar{y}')}{\partial \bar{y}} \eta + \frac{\partial F(x, \bar{y}, \bar{y}')}{\partial \bar{y}'} \eta' \right] dx$$

onde $\frac{\partial F}{\partial \bar{y}}$ e $\frac{\partial F}{\partial \bar{y}'}$ denotam as derivadas parciais de $F(x, \bar{y}, \bar{y}')$ com respeito às suas 2ª e 3ª variáveis, respectivamente. Estabelecendo $\epsilon = 0$ e usando $\tilde{I}(0) = 0$, obtemos

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial F(x, \bar{y}, \bar{y}')}{\partial \bar{y}} \eta + \frac{\partial F(x, \bar{y}, \bar{y}')}{\partial \bar{y}'} \eta' \right] dx = 0 \quad (2.7)$$

agora integrando a segunda expressão do lado esquerdo da igualdade acima por partes e usando as condições homogêneas de bordo (2.5), obtemos

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \eta dx = 0.$$

Desde que esta equação vale para η arbitrária, pelo lema 6.1.1 obtemos a equação de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0. \quad (2.8)$$

Esta equação, em geral, é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem em $y(x)$, não linear. Para ver isto, basta aplicar a regra da cadeia ao segundo termo do lado esquerdo da igualdade e obter a seguinte equação equivalente: $F_y + F_{y'x} - y' F_{y'y} - y'' F_{y'y'} = 0$. Devido à complexidade desta equação, geralmente não há nenhum procedimento possível para obter sua solução em termos de funções elementares. Contudo, é possível proceder com esta equação para algumas classes de especiais de $F(x, y, y')$.

Se F não depende explicitamente de y , então (2.8) reduz-se a $\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0$, que após a integração se reduz a $\frac{\partial F}{\partial y'} = c_1$, c_1 constante.

Uma segunda e muito importante classe de funções F é quando F não depende explicitamente de x . Neste caso, (2.8) implica que

$$\frac{d}{dx} \left(F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \quad (2.9)$$

Para ver isto, basta verificar que $\frac{d}{dx} \left(F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = \frac{\partial F}{\partial x} + y' \left[\frac{F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right]$ e depois usar (2.8) e o fato que $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$.

A equação (2.9) pode ser integrada uma vez para produzir $F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = c_1$, onde c_1 é uma constante. Esta é uma equação diferencial de primeira ordem em $y(x)$ e pode ser resolvida facilmente em alguns casos especiais. Por exemplo, no Problema 3 da seção anterior, onde queríamos encontrar a curva situada na metade superior do plano- xy , ligando os pontos P_0 e P_1 , que minimiza a área da superfície obtida através da revolução da curva em torno do eixo- x . Temos que a função F será $F = 2\pi y \sqrt{1 + (y')^2}$ e, portanto,

$$y \sqrt{1 + (y')^2} - \frac{y(y')^2}{\sqrt{1 + (y')^2}} = c_1.$$

Podemos simplificar o lado esquerdo da equação acima e usar o fato de que $y \geq 0$ para concluir que $c_1 \geq 0$. Se elevarmos a expressão ao quadrado, obtemos

$$(c_1)^2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = y^2 - (c_1)^2 \quad (2.10)$$

Em adição, desde que a curva ligue os pontos $P_0(x_0, y_0)$ e $P_1(x_1, y_1)$, devemos ter

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1. \quad (2.11)$$

Uma possível solução de (2.10) é $y = \text{constante} = c_1$, que inclui o caso $y(x) = 0$ quando $c_1 = 0$. Isto pode acontecer apenas quando $y_0 = y_1 = c_1$, isto é, quando as coordenadas de P_0 e P_1 são iguais. Se $y(x) \neq \text{constante}$, então podemos resolver (2.10) para x em termos y como

$$x = \pm c_1 \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - c_1^2}} + c_2$$

Portanto, $y = c_1 \cosh \left(\frac{x - c_2}{c_1} \right)$, onde c_1 e c_2 são constantes a ser determinadas por (2.11). As curvas cosseno-hiperbólicas são chamadas de *catenárias* e minimizam a área da superfície se as constantes c_1 e c_2 puderem ser encontradas tais que (2.11) seja satisfeita. Podemos verificar que tal não é o caso, por exemplo, se $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Quando c_1 e c_2 não puderem

ser encontradas, pode-se mostrar que a curva solução existe, porém é parcialmente contínua e diferenciável e consiste de duas linhas verticais por P_0 e P_1 e a porção do eixo- x entre x_0 e x_1 . Portanto, podemos deduzir deste exemplo que nem todos os problemas no cálculo variacional têm soluções dentro da classe admissível das funções consideradas. Geralmente, para se obter uma solução pode-se aumentar esta classe através do relaxamento das condições admissíveis.

Em todos os problemas discutidos até agora temos procurado uma solução satisfazendo as condições de bordo (2.11). Há, porém, muitos problemas interessantes onde é necessário apenas especificar que a função extremizante está limitada em um ou ambos pontos das extremidades. Este tipo de problema produz, para o funcional $\tilde{I}$, a mesma equação de Euler-Lagrange (2.8) junto com um novo conjunto de condições que devem ser satisfeitas nos pontos das extremidades. Assim consideremos o problema de achar uma função $y(x)$, na classe de funções duas vezes continuamente diferenciáveis que são limitadas em $x = x_0$ e $x = x_1$. Então, seguindo o mesmo raciocínio feito anteriormente, chegamos nas condições necessárias (2.7), isto é,

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial F(x, \bar{y}, \bar{y}')}{\partial \bar{y}} \eta + \frac{\partial F(x, \bar{y}, \bar{y}')}{\partial \bar{y}'} \eta' \right] dx = 0$$

que agora deve ser válida para toda função η duas vezes continuamente diferenciável limitada em ambos os pontos das extremidades. Integrando a segunda expressão por partes, temos

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \eta dx + \left[\eta \frac{\partial F}{\partial y'} \right]_{x_0}^{x_1} = 0. \quad (2.12)$$

Em muitos casos, o valor de η nos pontos x_0 e x_1 não são necessariamente nulos. Contudo, sabemos que entre todas as funções admissíveis η vai existir uma η_0 que se anule em x_0 e x_1 . Para essas funções, o último termo em (2.12) novamente se anula e podemos concluir que a equação de Euler-Lagrange (2.8) segue. Portanto, isto continua sendo uma condição necessária para um extremo. Com isso, (2.12) acima torna-se: $\left[\eta \frac{\partial F}{\partial y'} \right]_{x_0}^{x_1} = 0$. Desde que todas as funções η admissíveis não se anulem nos pontos das extremidades, devemos ter

$$\frac{\partial F}{\partial y'} \Big|_{x=x_0} = \frac{\partial F}{\partial y'} \Big|_{x=x_1} = 0 \quad (2.13)$$

Estas condições são chamadas de *condições naturais de bordo*. É claro que se tivéssemos especificado o valor de y em $x = x_0$, mantendo somente as condições limitantes em $x = x_1$, então apenas a segunda das condições (2.13) seria necessária. É importante observar que a equação de Euler-Lagrange não é afetada pelas condições de bordo.

6.3 Operador Variacional

Introduziremos um importante e útil procedimento formal para a dedução das condições necessárias para um funcional ser extremizado. Considere o funcional

$$\tilde{I}[\bar{y}] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, \bar{y}, \bar{y}') dx.$$

Se y denota a função extremizante, temos

$$\tilde{I}[\bar{y}] - \tilde{I}[y] = \int_{x_0}^{x_1} [F(x, \bar{y}, \bar{y}') - F(x, y, y')] dx. \quad (3.14)$$

Se assumirmos que a função admissível $\bar{y}$ está "perto" da função extremizante y (desse modo $\bar{y}'$ está também perto de y'), podemos expandir o integrando, para cada x , numa série dupla de Taylor próximo de $\bar{y} = y$ e $\bar{y}' = y'$ para obter

$$\begin{aligned} F(x, \bar{y}, \bar{y}') - F(x, y, y') &= (\bar{y} - y)F_y(x, y, y') + (\bar{y}' - y')F_{y'}(x, y, y') \\ &+ (\text{termos de ordem superior em } \bar{y} - y \text{ e } \bar{y}' - y') \end{aligned}$$

Assim parece razoável aproximar o lado direito de (3.14) pela integral dos dois primeiros termos desta série. Se denotamos por $\delta\tilde{I}$ a *primeira variação* de $\tilde{I}$, então temos

$$\delta\tilde{I} = \int_{x_0}^{x_1} [(\delta y)F_y + (\delta y)'F_{y'}] dx \quad (3.15)$$

onde

$$\delta y = \bar{y} - y \quad (3.16)$$

é chamada a *primeira variação* de y . Observe de (3.16) que $\delta(\overset{(k)}{y}) = \overset{(k)}{\delta y}$ onde $\overset{(k)}{y}$ denota a k -ésima derivação de y . O símbolo $\delta\tilde{I}$ denota a operação variacional definida por (3.15) e δ é chamado *operador variacional*.

A condição necessária para que y extremize $\tilde{I}$ é que a primeira variação de $\tilde{I}$ se anule para variações arbitrárias em y , isto é, $\delta\tilde{I} = 0$ para todas as variações δy duas vezes continuamente diferenciáveis satisfazendo as condições apropriadas de bordo. Para deduzir as condições necessárias para um extremo, estabelecemos $\delta\tilde{I} = 0$ em (3.15) e integramos por partes a segunda expressão do lado direito para obter

$$\int_{x_0}^{x_1} [F_y - \frac{d}{dx}(F_{y'})](\delta y) dx + (\delta y)F_{y'}|_{x_0}^{x_1} = 0 \quad (3.17)$$

Observe que δy em (3.17) tem a mesma função de η em (2.12) e assim as condições necessárias para um extremo são deduzidas da mesma forma como foram deduzidas anteriormente. A vantagem aqui é simplesmente de notação e cálculo, é mais simples proceder diretamente de (3.15) do que introduzir as variações $\bar{y} = y + \epsilon\eta$ e diferenciar com respeito a ϵ .

6.4 Funcionais de funções de várias variáveis

consideremos agora duas extensões dos resultados anteriores. A primeira extensão é extremizar um funcional que depende de uma função de duas variáveis. Tais problemas aparecem naturalmente nos princípios físicos tais como o princípio de Hamilton de ação mínima e o princípio de energia potencial mínima na elasticidade. O problema matemático é o de encontrar uma

função $\mu(x, y)$, com derivadas parciais segundas contínuas e definidas sobre uma região R do plano- xy , que extremize o funcional

$$\tilde{I}[\bar{\mu}] = \iint_R F(x, y, \bar{\mu}, \bar{\mu}_x, \bar{\mu}_y) dx dy \quad (4.18)$$

onde as funções admissíveis $\bar{\mu}$ satisfazem a condição de bordo $\bar{\mu}(x, y) = f(x, y)$, (x, y) em C . Onde C , o limite de R , é uma curva simples, suave fechada e f é dada sobre C . Em (4.18), assumiremos que F possua derivadas parciais segundas contínuas com respeito às suas cinco variáveis. Denotamos a função extremizante, se existir, por μ e caracterizamos cada função admissível $\bar{\mu}$ por

$$\bar{\mu}(x, y) = \mu(x, y) + \epsilon \eta(x, y) \quad (4.19)$$

onde ϵ assume todos os valores próximos de $\epsilon = 0$, e η é uma função arbitrária com derivadas parciais segundas contínuas que se anula sobre C , isto é,

$$\eta(x, y) = 0, \quad (x, y) \text{ sobre } C \quad (4.20)$$

Substituindo (4.19) no funcional (4.18), obtemos a função $I(\epsilon)$ definida por

$$I(\epsilon) = \iint_R F(x, y, \mu + \epsilon \eta, \mu_x + \epsilon \eta_x, \mu_y + \epsilon \eta_y) dx dy$$

Assim, as suposições feitas sobre F implicam que uma condição necessária para I ter um extremo em $\bar{\mu} = \mu$ é que $I'(0) = 0$ para toda função admissível η satisfazendo as condições homogêneas de bordo (4.20). Diferenciando $I(\epsilon)$ com respeito a ϵ , temos

$$I'(\epsilon) = \iint_R \left(\eta \frac{\partial F}{\partial \bar{\mu}} + \eta_x \frac{\partial F}{\partial \bar{\mu}_x} + \eta_y \frac{\partial F}{\partial \bar{\mu}_y} \right) dx dy$$

onde $\frac{\partial F}{\partial \bar{\mu}_x}$ e $\frac{\partial F}{\partial \bar{\mu}_y}$ denotam as derivadas parciais de F com respeito às suas 4ª e 5ª variáveis, respectivamente. Agora

$$\eta_x \frac{\partial F}{\partial \bar{\mu}_x} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{\partial F}{\partial \bar{\mu}_x} \right) \right\} - \eta \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial \bar{\mu}_x} \right) \right\} \quad (4.21)$$

Semelhantemente a (4.21), temos

$$\eta_y \frac{\partial F}{\partial \bar{\mu}_y} = \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial F}{\partial \bar{\mu}_y} \right) \right\} - \eta \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial \bar{\mu}_y} \right) \right\} \quad (4.22)$$

substituindo (4.21) e (4.22) em $I'(\epsilon)$, obtemos

$$\begin{aligned} I'(\epsilon) &= \iint_R \eta \left[\frac{\partial F}{\partial \bar{\mu}} - \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial \bar{\mu}_x} \right) \right\} - \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial \bar{\mu}_y} \right) \right\} \right] dx dy \\ &\quad + \iint_R \left[\left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{\partial F}{\partial \bar{\mu}_x} \right) \right\} + \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial F}{\partial \bar{\mu}_y} \right) \right\} \right] dx dy \end{aligned}$$

A segunda integral acima pela aplicação do teorema de Green produz uma integral de linha sobre C que se anula quando a condição de bordo (4.20) é usada. Reforçamos a condição de que $I'(0) = 0$ sobre a integral acima e aplicamos a extensão bidimensional do lema 6.1.1 para obtermos a seguinte equação de Euler-Lagrange para μ :

$$\frac{\partial F}{\partial \mu} - \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial \mu_x} \right) \right\} - \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial \mu_y} \right) \right\} = 0 \quad (4.23)$$

6.5 Diversas funções de uma variável

Nosso objetivo é extremizar um funcional de duas funções de uma variável. O problema consiste em encontrar, entre todas as funções $\bar{\phi}(t)$ e $\bar{\psi}(t)$ duas vezes continuamente diferenciáveis, definidas para $t_0 \leq t \leq t_1$, as duas que extremizem o funcional

$$\tilde{I}[\bar{\phi}, \bar{\psi}] = \int_{t_0}^{t_1} F(t, \bar{\phi}, \bar{\psi}, \bar{\phi}', \bar{\psi}') dt \quad (5.24)$$

onde F deve ter derivadas parciais segundas contínuas com respeito às suas cinco variáveis. Em geral, as funções admissíveis $\bar{\phi}(t)$ e $\bar{\psi}(t)$ devem satisfazer as condições de bordo

$$\bar{\phi}(t_0) = x_0, \bar{\psi}(t_0) = y_0, \text{ e } \bar{\phi}(t_1) = x_1, \bar{\psi}(t_1) = y_1$$

Denotaremos por $\phi(t)$ e $\psi(t)$ as funções extremizantes. Podemos introduzir dois parâmetros ϵ_1, ϵ_2 independentes, assumindo valores bem próximos de $(\epsilon_1, \epsilon_2) = (0, 0)$. Caracterizamos, então, as funções admissíveis por

$$\bar{\phi}(t) = \phi(t) + \epsilon_1 \eta_1(t)$$

$$\bar{\psi}(t) = \psi(t) + \epsilon_2 \eta_2(t)$$

onde η_1 e η_2 são arbitrárias e duas vezes continuamente diferenciáveis e satisfazendo as condições homogêneas

$$\eta_1(t_0) = \eta_1(t_1) = 0$$

$$\eta_2(t_0) = \eta_2(t_1) = 0$$

Poderíamos definir uma função $I(\epsilon_1, \epsilon_2)$ e usar o resultado que em um extremo $\frac{\partial I(0, 0)}{\partial \epsilon_1} = \frac{\partial I(0, 0)}{\partial \epsilon_2} = 0$. Porém procederemos de modo diferente. Usaremos o conceito de *operador variacional*. Para que ϕ e ψ extremizem $\tilde{I}$, é necessário que $\delta \tilde{I}$ se anule em $\bar{\phi} = \phi$ e $\bar{\psi} = \psi$ para variações $\delta \phi = 0 = \delta \psi$ em t_0 e t_1 . Desde que $\tilde{I}$ dependa só de duas funções independentes e de suas derivadas, podemos obter $\delta \tilde{I}$ através de uma aplicação da regra da cadeia ao integrando F em (5.24):

$$\delta \tilde{I} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{t_0}^{t_1} F(t, \bar{\phi}, \bar{\psi}, \bar{\phi}', \bar{\psi}') dt = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial F}{\partial \phi}(\delta \phi) + \frac{\partial F}{\partial \psi}(\delta \psi) + \frac{\partial F}{\partial \phi'}(\delta \phi)' + \frac{\partial F}{\partial \psi'}(\delta \psi)' \right] dt$$

Integrando os dois últimos termos por partes e usando o fato que $\delta\phi$ e $\delta\psi$ se anulam em t_0 e t_1 e fazendo $\delta\tilde{I} = 0$, obtemos

$$\delta\tilde{I} = \int_{t_0}^{t_1} \left[\delta\phi \left(\frac{\partial F}{\partial \phi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \phi'} \right) \right] dt + \int_{t_0}^{t_1} \left[\delta\psi \left(\frac{\partial F}{\partial \psi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \psi'} \right) \right] dt \quad (5.25)$$

Desde que (5.25) seja válida para variações independentes e arbitrárias $\delta\phi$ e $\delta\psi$, podemos considerar $\delta\psi = 0$ e $\delta\phi \neq 0$ para obter $\int_{t_0}^{t_1} \left[\delta\phi \left(\frac{\partial F}{\partial \phi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \phi'} \right) \right] dt = 0$ para variações $\delta\phi$ arbitrárias satisfazendo $\delta\phi(t_0) = \delta\phi(t_1) = 0$. Considerando agora $\delta\phi = 0$ e $\delta\psi \neq 0$ chegamos $\int_{t_0}^{t_1} \left[\delta\psi \left(\frac{\partial F}{\partial \psi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \psi'} \right) \right] dt = 0$ para variações $\delta\psi$ arbitrárias satisfazendo $\delta\psi(t_0) = \delta\psi(t_1) = 0$. Daí, obtemos duas equações de Euler-Lagrange:

$$(i) \frac{\partial F}{\partial \phi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \phi'} = 0 \quad (ii) \frac{\partial F}{\partial \psi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \psi'} = 0$$

Essas duas equações juntamente com as condições de bordo $\phi(t_0) = x_0$, $\psi(t_0) = y_0$ e $\phi(t_1) = x_1$, $\psi(t_1) = y_1$, fornecem as condições necessárias sobre as funções extremizantes ϕ e ψ .

Exemplo 6.5.1 Encontre a curva suave de menor comprimento ligando os pontos $P_0(x_0, y_0)$ e $P_1(x_1, y_1)$ no plano- xy .

Solução Queremos encontrar uma curva suave $C : x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, de menor comprimento e que une $P_0(x_0, y_0)$ e $P_1(x_1, y_1)$. Para tanto, devemos minimizar o funcional

$$\tilde{I}[\bar{\phi}, \bar{\psi}] = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(\bar{\phi}')^2 + (\bar{\psi}')^2} dt$$

Temos que a função F é dada por $\sqrt{(\bar{\phi}')^2 + (\bar{\psi}')^2}$. Aplicando as equações de Euler-Lagrange a F , obtemos

$$(i) \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \phi'} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{2\phi'}{2\sqrt{(\phi')^2 + (\psi')^2}} \right) = 0 \text{ já que } \frac{\partial F}{\partial \phi} = 0$$

$$(ii) \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \psi'} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{2\psi'}{2\sqrt{(\phi')^2 + (\psi')^2}} \right) = 0 \text{ já que } \frac{\partial F}{\partial \psi} = 0$$

Em geral $\phi(t)$ e $\psi(t)$ devem satisfazer as condições de bordo $\phi(t_0) = x_0$, $\psi(t_0) = y_0$ e $\phi(t_1) = x_1$ e $\psi(t_1) = y_1$. Agora integramos (i) e (ii) com relação a t para obtermos $\frac{\phi'}{\sqrt{(\phi')^2 + (\psi')^2}} = c_1$ e $\frac{\psi'}{\sqrt{(\phi')^2 + (\psi')^2}} = c_2$ onde c_1 e c_2 são constantes de integração. Observe que se $c_1 = 0$, teremos que $\phi' = 0$ e, portanto, $\phi = \text{constante}$. Donde $x_0 = x_1$ e ψ arbitrária. Neste caso, a solução é uma linha paralela ao eixo- y , que é o resultado antecipado se P_0 e P_1 têm a mesma abscissa. Agora, se $c_1 \neq 0$, podemos dividir c_2 por c_1 :

$$\frac{c_2}{c_1} = k_1 = \frac{\psi'}{\sqrt{(\phi')^2 + (\psi')^2}} \cdot \frac{\sqrt{(\phi')^2 + (\psi')^2}}{\phi'} \Rightarrow k_1 = \frac{\psi'}{\phi'} \Rightarrow \psi' = k_1 \phi'$$

integrando a última igualdade acima obtemos: $(**) \psi(t) = k_1 \phi(t) + k_2$. Logo, a solução do problema é a linha reta $y = k_1 x + k_2$, onde k_1 e k_2 são determinadas através das condições iniciais, ou seja, através da condição de que a curva deve estar entre (x_0, y_0) e (x_1, y_1) .

Observação 6.5.2 *Em $(**)$ uma das duas funções ϕ ou ψ não é determinada unicamente, apesar de o resultado final ser um traço determinado unicamente. Isto reflete o fato de que os traços podem ser parametrizados de várias maneiras.*

6.6 Problemas com vínculos: Multiplicadores de Lagrange

Para facilitar a apresentação, consideremos primeiro um funcional vinculado envolvendo somente uma função; depois generalizamos os resultados da análise para resolvermos o problema isoperimétrico.

Suponha que queremos encontrar uma função y entre todas as funções $\bar{y}$ duas vezes continuamente diferenciáveis satisfazendo as condições

$$\bar{y}(x_0) = y_0 \text{ e } \bar{y}(x_1) = y_1 \quad (6.26)$$

que extremiza o funcional

$$\tilde{I}[\bar{y}] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, \bar{y}, \bar{y}') dx \quad (6.27)$$

sujeito ao vínculo

$$\tilde{J}[\bar{y}] = \int_{x_0}^{x_1} G(x, \bar{y}, \bar{y}') dx = k \quad (6.28)$$

onde k é uma constante dada no problema. Assumimos que as funções F e G tenham derivadas parciais segundas contínuas com respeito a todos os seus argumentos. Diferentemente dos problemas sem vínculos, nos quais caracterizamos as funções admissíveis por $\bar{y}(x) = y(x) + \epsilon \eta(x)$, $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$, aqui uma variação $\epsilon \eta(x)$ poderia não ser adequada. Isto porque, em geral, qualquer variação em $\bar{y}$ de (6.27) muda o valor de $\tilde{J}$ em (6.28) e, portanto, viola a restrição de $\tilde{J}$ é constante. Para conseguir esta limitação, introduzimos duas variações independentes para $\bar{y}$. É então possível ajustá-las de modo a manter $\tilde{J}$ com seu valor prescrito k , enquanto ao mesmo tempo, extremizamos o funcional $\tilde{I}$. Assim, caracterizamos as funções admissíveis $\bar{y}$ por

$$\bar{y}(x) = y(x) + \epsilon_1 \eta_1(x) + \epsilon_2 \eta_2(x) \quad (6.29)$$

onde ϵ_1 e ϵ_2 assumem valores nas vizinhanças de $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$, e η_1, η_2 são funções independentes, duas vezes continuamente diferenciáveis satisfazendo $\eta_1(x_0) = \eta_1(x_1) = \eta_2(x_0) = \eta_2(x_1) = 0$. Substituindo (6.29) nos funcionais (6.27) e (6.28), obtemos duas funções $I[\epsilon_1, \epsilon_2]$ e $J[\epsilon_1, \epsilon_2]$ definidas por

$$I[\epsilon_1, \epsilon_2] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y + \epsilon_1 \eta_1 + \epsilon_2 \eta_2, y' + \epsilon_1 \eta_1' + \epsilon_2 \eta_2') dx \quad (6.30)$$

$$J[\epsilon_1, \epsilon_2] = \int_{x_0}^{x_1} G(x, y + \epsilon_1 \eta_1 + \epsilon_2 \eta_2, y' + \epsilon_1 \eta'_1 + \epsilon_2 \eta'_2) dx = k \quad (6.31)$$

O problema agora é extremizar o funcional $I[\epsilon_1, \epsilon_2]$ de duas variáveis sujeito ao vínculo (6.31), com o ponto crítico sendo $(\epsilon_1, \epsilon_2) = (0, 0)$. Daí, introduzimos um *multiplicador de Lagrange* λ e extremizamos o funcional H de três variáveis definido por

$$H[\epsilon_1, \epsilon_2, \lambda] = I + \lambda(J - k) = \int_{x_0}^{x_1} (F + \lambda G) dx - \lambda k$$

onde os argumentos de F e G são como em (6.30) acima. Assim, a condição para que H tenha um extremo em $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$ produz

$$\frac{\partial H}{\partial \epsilon_1}(0, 0, \lambda) = \frac{\partial I}{\partial \epsilon_1}(0, 0) + \lambda \frac{\partial J}{\partial \epsilon_1}(0, 0) = 0 \quad (6.32)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \epsilon_2}(0, 0, \lambda) = \frac{\partial I}{\partial \epsilon_2}(0, 0) + \lambda \frac{\partial J}{\partial \epsilon_2}(0, 0) = 0 \quad (6.33)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda}(0, 0, \lambda) = J(0, 0) - k = 0 \quad (6.34)$$

Calculando as derivadas de I e J de (6.30) e (6.31), respectivamente, e usando o mesmo procedimento das seções anteriores, obtemos a equação de Euler-Lagrange dada por

$$\frac{\partial}{\partial y}[F(x, y, y') + \lambda G(x, y, y')] - \frac{d}{dx} \left\{ \frac{\partial}{\partial y'}[F(x, y, y') + \lambda G(x, y, y')] \right\} = 0$$

Em adição, o vínculo (6.34) torna-se

$$\int_{x_0}^{x_1} G(x, y, y') dx = k \quad (6.35)$$

Observe que a equação de Euler-Lagrange dada acima é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem em y , envolvendo o multiplicador de Lagrange λ . Sua solução conterá duas constantes de integração que são determinadas junto com λ , através da imposição das condições de bordo (6.26) e do vínculo (6.35).

Acabamos de mostrar as idéias para determinar a equação de Euler-Lagrange para problemas vinculados envolvendo uma função. Estenderemos agora o resultado acima para o problema de determinação de funções $\phi(t)$ e $\psi(t)$ suficientemente diferenciáveis que extremizem o funcional

$$\tilde{I}[\bar{\phi}, \bar{\psi}] = \int_{t_0}^{t_1} F(t, \bar{\phi}, \bar{\psi}, \bar{\phi}', \bar{\psi}') dt \quad (6.36)$$

sujeito ao vínculo

$$\tilde{J}[\bar{\phi}, \bar{\psi}] = \int_{t_0}^{t_1} G(t, \bar{\phi}, \bar{\psi}, \bar{\phi}', \bar{\psi}') dt = k \quad (6.37)$$

As condições necessárias são dadas por

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\phi}}(F + \lambda G) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \bar{\phi}'}(F + \lambda G) \right] = 0 \quad (6.38)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\psi}}(F + \lambda G) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \bar{\psi}'}(F + \lambda G) \right] = 0 \quad (6.39)$$

$$\int_{t_0}^{t_1} G dt = k \quad (6.40)$$

em que os argumentos de F e G são $(t, \bar{\phi}, \bar{\psi}, \bar{\phi}', \bar{\psi}')$ e λ é um multiplicador de Lagrange. Agora, vamos aplicar estes resultados para resolver o problema isoperimétrico.

Exemplo 6.6.1 *Resolva o problema isoperimétrico. Ou seja, de todas as curvas simples, suaves e fechadas C : $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, de comprimento dado, encontre a única que inclui a maior área.*

Solução: A expressão que representa a área de uma curva será

$$A = \oint_C x dy = \int_{t_0}^{t_1} \phi(t) \psi'(t) dt$$

e o comprimento dessa curva é dado por

$$L_0 = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{[\phi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt$$

identificamos os integrandos F e G nos funcionais (6.36) e (6.37) acima como $F = \phi\psi'$ e $G = \sqrt{[\phi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}$. Consequentemente as equações (6.38)-(6.40) produzem

$$\psi' - \frac{d}{dt} \left(\frac{\lambda \phi'}{\sqrt{[\phi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}} \right) = 0, \quad (6.41)$$

$$-\frac{d}{dt} \left(\phi + \frac{\lambda \psi'}{\sqrt{[\phi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}} \right) = 0, \quad (6.42)$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{[\phi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt = L_0, \quad (6.43)$$

Cada uma das equações (6.41) e (6.42) podem ser integradas uma vez para produzirem, respectivamente

$$\psi - \frac{\lambda \phi'}{\sqrt{[\phi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}} = c_1, \quad \phi + \frac{\lambda \psi'}{\sqrt{[\phi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}} = c_2$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias. Agora resolvemos a primeira equação por $\psi - c_1$, a segunda por $\phi - c_2$, depois elevamos ambos os membros ao quadrado e somamos estes resultados, produzindo (desde que $x = \phi$ e $y = \psi$):

$$(x - c_2)^2 + (y - c_1)^2 = \lambda^2$$

o que prova que a curva desejada é um círculo. Como o comprimento da curva é L_0 e a circunferência do círculo mede $2\pi\lambda$, temos que $\lambda = \frac{L_0}{2\pi}$.

6.7 Problemas da física-matemática

01) O *princípio de Hamilton* estabelece que um sistema de partículas se move num intervalo de tempo de t_0 a t_1 de modo que a ação $A = \int_{t_0}^{t_1} (T - V)dt$ é minimizada, onde T e V são, respectivamente, a energia cinética e a energia potencial do sistema.

Considere a vibração lateral de uma viga elástica com energia cinética igual a $\frac{1}{2} \int_0^L \rho A (W_t)^2 dx$ e a energia de tensão dada por $\frac{1}{2} \int_0^L EI (W_{xx})^2 dx$, onde ρ , A , I , L e W são a densidade, área da seção transversa, momento de inércia da seção transversa, comprimento e deslocamento lateral da viga, respectivamente, e E é o módulo de Young. Dizemos que a viga está executando oscilações harmônicas livres se o deslocamento for dado na forma $W(x, t) = \bar{\mu}(x) \sin(\omega t)$ ou $W(x, t) = \bar{\mu}(x) \cos(\omega t)$ onde ω é a frequência natural de vibração da viga. Seja V e T o máximo, tomados sobre um período $0 \leq t \leq 2\pi/\omega$, da energia potencial e cinética, respectivamente. Então, assumindo que as oscilações livres são caracterizadas pela função $\mu(x)$ que extremiza $V - T$, deduza que esta condição conduz à extremização de $J[\bar{\mu}] = \frac{1}{2} \int_0^L [EI(\bar{\mu}'')^2 - \omega^2 \rho A \bar{\mu}^2] dx$. Obtenha a seguinte equação diferencial para oscilações livres da viga: $(EI\mu'')'' - \rho A \omega^2 \mu = 0$.

Resolução: Calculando as derivadas de W com respeito a x , obtemos:

(i) para $W(x, t) = \bar{\mu}(x) \sin(\omega t)$ temos que $W_{xx} = \bar{\mu}_{xx} \sin(\omega t)$; $W_t = \omega \bar{\mu} \cos(\omega t)$.

(ii) para $W(x, t) = \bar{\mu}(x) \cos(\omega t)$ temos que $W_{xx} = \bar{\mu}_{xx} \cos(\omega t)$; $W_t = -\omega \bar{\mu} \sin(\omega t)$.

Usando (i) temos

$$V - T = \frac{1}{2} \int_0^L [EI(\bar{\mu}'')^2 \sin^2(\omega t) - \rho A \omega^2 \bar{\mu}^2 \cos^2(\omega t)] dx \quad (7.44)$$

e, usando (ii) temos

$$V - T = \frac{1}{2} \int_0^L [EI(\bar{\mu}'')^2 \cos^2(\omega t) - \rho A \omega^2 \bar{\mu}^2 \sin^2(\omega t)] dx \quad (7.45)$$

somando (7.44) e (7.45), obtemos

$$V - T = \frac{1}{2} \int_0^L [EI(\bar{\mu}'')^2 - \omega^2 \rho A \bar{\mu}^2] dx$$

Observe que extremizar $(V - T)$ é equivalente a extremizar o funcional dado pela expressão a seguir

$$J[\bar{\mu}] = \frac{1}{2} \int_0^L [EI(\bar{\mu}'')^2 - \omega^2 \rho A \bar{\mu}^2] dx.$$

Fazendo $\bar{\mu} = \mu + \epsilon \eta$ e considerando $\eta(0) = \eta(L) = 0$ e $\eta'(0) = \eta'(L) = 0$, obtemos

$$J[\epsilon] = \frac{1}{2} \int_0^L [EI(\mu'' + \epsilon \eta'')^2 - \omega^2 \rho A (\mu + \epsilon \eta)^2] dx$$

$$J[\epsilon] = \frac{1}{2} \int_0^L \{EI[(\mu'')^2 + 2\mu''\epsilon\eta'' + \epsilon^2(\eta'')^2] - \omega^2 \rho A (\mu^2 + 2\mu\epsilon\eta + \epsilon^2\eta^2)\} dx$$

Fazendo agora $\frac{d}{d\epsilon}J[\epsilon] = 0$ temos

$$\frac{1}{2} \int_0^L \{EI[2\mu''\eta'' + 2\epsilon(\eta'')^2] - \omega^2 \rho A(2\mu\eta + 2\epsilon\eta^2)\} dx = 0$$

Estabelecendo $\frac{d}{d\epsilon}J[0] = 0$, obtemos

$$\int_0^L \{EI\mu''\eta'' - \omega^2 \rho A\mu\eta\} dx = 0$$

ou

$$EI \int_0^L \mu''\eta'' dx - \omega^2 \rho A \int_0^L \mu\eta dx = 0$$

integrando a primeira integral por partes, temos

$$EI \int_0^L \eta(\mu'')'' dx - \omega^2 \rho A \int_0^L \mu\eta dx = 0$$

ou

$$\int_0^L [(EI\mu'')'' - \omega^2 \rho A\mu]\eta dx = 0$$

usando o lema 6.1.1 concluímos que

$$(EI\mu'')'' - \omega^2 \rho A\mu = 0.$$

02) Seja $\vec{u} = (u_1(\vec{r}, t), u_2(\vec{r}, t), u_3(\vec{r}, t))$ o vetor deslocamento de um sólido isotrópico elástico que ocupa uma região V limitado por uma superfície S . A *distorção tensora* ε_{ij} e a *pressão tensora* σ_{ij} $i, j = 1, 2, 3$, são definidas, respectivamente, por:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad \sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

onde δ_{ij} é o *delta de Kronecker* definido por $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$ e λ, μ são constantes elásticas.

A energia potencial V e a energia cinética T são definidas por

$$V = \frac{1}{2} \iiint_R \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV, \quad T = \frac{1}{2} \iiint_R \rho |\vec{u}_t|^2 dV$$

onde ρ é a densidade do sólido. Assumimos que $\int_{t_0}^{t_1} (T - V) dt$ é estacionária, deduza as **equações de Navier de elasticidade linear** dadas na forma vetorial por: $\mu \nabla^2 \vec{u} + (\lambda + \mu) \nabla(\text{div} \vec{u}) = \rho \vec{u}_{tt}$.

Resolução: Para simplificar os cálculos vamos considerar o vetor deslocamento com apenas duas componentes: $\vec{u} = (u_1(\vec{r}, t), u_2(\vec{r}, t))$. Primeiramente vamos calcular o somatório $\sum_{i,j=1}^2 \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \sigma_{11} \varepsilon_{11} + \sigma_{12} \varepsilon_{12} + \sigma_{21} \varepsilon_{21} + \sigma_{22} \varepsilon_{22}$. temos que

$$\sigma_{11} \varepsilon_{11} = [\lambda \delta_{11} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + 2\mu \varepsilon_{11}] \varepsilon_{11} = \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + 2\mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{12}\varepsilon_{12} &= [\lambda\delta_{12}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + 2\mu\varepsilon_{12}]\varepsilon_{12} = 2\mu\varepsilon_{12}^2 = \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 \\
\sigma_{21}\varepsilon_{21} &= [\lambda\delta_{21}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + 2\mu\varepsilon_{21}]\varepsilon_{21} = 2\mu\varepsilon_{21}^2 = \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 \\
\sigma_{22}\varepsilon_{22} &= [\lambda\delta_{22}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + 2\mu\varepsilon_{22}]\varepsilon_{22} = \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + 2\mu \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 \\
|\vec{u}_t|^2 &= u_{1,t}^2 + u_{2,t}^2
\end{aligned}$$

Devemos agora extremizar o funcional

$$\begin{aligned}
\tilde{I}[\bar{u}] = T - V &= \frac{1}{2} \iint_R \left\{ \rho[(\bar{u}_{1,t})^2 + (\bar{u}_{2,t})^2] - \lambda \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. - 2\mu \left[\left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2} \right)^2 \right] - \mu \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_1} \right)^2 \right\} dV
\end{aligned}$$

Fazendo $\bar{u}_1 = u_1 + \varepsilon\eta_1$ e $\bar{u}_2 = u_2 + \varepsilon\eta_2$, ficamos com

$$\begin{aligned}
I[\varepsilon] &= \frac{1}{2} \iint_R \left\{ \rho[(u_{1,t} + \varepsilon\eta_{1,t})^2 + (u_{2,t} + \varepsilon\eta_{2,t})^2] - \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \varepsilon \frac{\partial \eta_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \varepsilon \frac{\partial \eta_2}{\partial x_2} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. - 2\mu \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \varepsilon \frac{\partial \eta_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \varepsilon \frac{\partial \eta_2}{\partial x_2} \right)^2 \right] - \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \varepsilon \frac{\partial \eta_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \varepsilon \frac{\partial \eta_2}{\partial x_1} \right)^2 \right\} dV
\end{aligned}$$

Fazemos agora $I'(0) = 0$ para obtermos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \iint_R \left\{ \rho(u_{1,t}\eta_{1,t} + u_{2,t}\eta_{2,t}) - \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \eta_2}{\partial x_2} \right) \right. \\
&\quad \left. - 2\mu \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial x_1} \right) + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial x_2} \right) \right] - \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \eta_2}{\partial x_1} \right) \right\} dV = 0
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
&\iint_R \left[\rho u_{1,t}\eta_{1,t} - \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial x_1} \right) \right. \\
&\quad \left. - 2\mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial x_1} \right) - \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial x_2} \right) \right] dV \\
&\quad + \iint_R \left[\rho u_{2,t}\eta_{2,t} - \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial x_2} \right) \right. \\
&\quad \left. - 2\mu \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial x_2} \right) - \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial x_1} \right) \right] dV = 0
\end{aligned}$$

daí obtemos

$$\begin{aligned}
&\iint_R \left[-\rho u_{1,tt} + \lambda \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right. \\
&\quad \left. + 2\mu \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \right] \eta_1 dV
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \iint_R \left[-\rho u_{2,tt} + \lambda \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right. \\
& \left. + 2\mu \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \right] \eta_2 dV = 0
\end{aligned}$$

do lema 6.1.1 segue que

$$\rho u_{1,tt} - \lambda \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) - 2\mu \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) - \mu \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = 0$$

$$\rho u_{2,tt} - \lambda \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) - 2\mu \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) - \mu \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = 0$$

ou

$$\rho u_{1,tt} - (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) - \mu \nabla^2 u_1 = 0$$

$$\rho u_{2,tt} - (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) - \mu \nabla^2 u_2 = 0$$

Podemos expressar as equações acima na forma vetorial:

$$\rho \vec{u}_{tt} = \mu \nabla^2 \vec{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\operatorname{div} \vec{u}),$$

que é a equação de Navier de elasticidade linear.

6.8 Exercícios

1. Achar a função duas vezes continuamente diferenciável $y(x)$ que extremize a integral

$$\tilde{I}[\bar{y}] = \int_0^1 \{ \bar{y} [1 + (\bar{y}')^2] \}^{1/2} dx$$

e satisfaz as condições

$$y(0) = y_0 \quad y(1) = y_1, \quad y_0 \text{ e } y_1 \geq 0.$$

2. Ache a equação de Euler-Lagrange para a função y que extremiza o funcional $\tilde{I}[\bar{y}] = \int_{x_0}^{x_1} (p\bar{y}'^2 + q\bar{y}^2) dx$ sujeito a $\bar{y}(x_0) = y_0$ e $\bar{y}(x_1) = y_1$, onde p e q são funções contínuas de x dadas, com $p, q > 0$ para $a < x < b$. Quais as condições de diferenciabilidade que temos que assumir para p e q e a função extremizante? Qual a natureza do extremo?
3. Mostre que a equação de Euler-Lagrange satisfeita pela função $y(x)$ duas vezes continuamente diferenciável que extremiza o raio

$$\Gamma[\bar{y}] = \frac{\int_{x_0}^{x_1} F(x, \bar{y}, \bar{y}') dx}{\int_{x_0}^{x_1} G(x, \bar{y}, \bar{y}') dx}$$

e satisfaz as condições de fronteira $\bar{y}(x_0) = y_0$ $\bar{y}(x_1) = y_1$, é

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \Gamma[y] \left[\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial G}{\partial y'} \right) \right] = 0,$$

onde F e G têm derivadas parciais de segunda ordem contínuas com respeito a seus três argumentos.

4. Use o resultado do exercício acima para achar a função não-nula que extremiza o raio $\Gamma[\bar{y}] = \int_0^1 (\bar{y}')^2 dx / \int_0^1 \bar{y}^2 dx$ sujeito às condições $\bar{y}(0) = \bar{y}(1) = 0$. Qual o valor mínimo desse raio?
5. Obtenha a equação de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) + \cdots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \right) = 0$$

onde $y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$, para $y(x)$ que extremiza o funcional

$$\tilde{I}[\bar{y}] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, \bar{y}, \bar{y}', \dots, \bar{y}^{(n)}) dx$$

sujeito às condições $\bar{y}^{(j)}(x_0) = y_{0j}$, $\bar{y}^{(j)}(x_1) = y_{1j}$, $j = 0, 1, \dots, n-1$. Assuma que F e y são suficientemente continuamente diferenciáveis.

6. Considere o problema de determinar a função $y(x)$ que extremiza o funcional

$$\tilde{I}[\bar{y}] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, \bar{y}, \bar{y}') dx / \int_{x_0}^{x_1} G(x, \bar{y}, \bar{y}') dx$$

sujeito a algumas condições de fronteira. O método que utilizaremos é o método conhecido como de *Rayleigh-Ritz* que consiste em considerar funções admissíveis $\bar{y}(x)$ que podem ser expressas na forma $\bar{y}(x) = \sum_{n=1}^N a_n f_n(x)$, onde $f_n(x)$, $n = 1, 2, \dots, N$, são funções conhecidas que satisfazem as condições de fronteira naturais sobre y . Essas são chamadas condições de fronteiras geométricas, ou cinemáticas. Essa série finita é substituída no funcional $\tilde{I}$ para obter uma função I de N coeficientes a_n . Portanto,

$$\begin{aligned} \tilde{I}[\bar{y}] &= I(a_1, \dots, a_n) \\ &= \int_{x_0}^{x_1} F(x, \sum a_n f_n(x), \sum a_n f'_n(x)) dx / \int_{x_0}^{x_1} G(x, \sum a_n f_n(x), \sum a_n f'_n(x)) dx \end{aligned}$$

Essas a_n são escolhidas de modo que I é extremizada usando os métodos conhecidos do cálculo diferencial para encontrar máximos e mínimos de funções de várias variáveis. (Note que, se as condições de fronteira sobre y não são homogêneas, então esses coeficientes devem ser escolhidos de modo que $\bar{y}$ satisfaça essas condições. Isso leva a restrições sobre

os coeficientes a_n .) Com os coeficientes escolhidos dessa maneira a série acima será uma aproximação para a solução $y(x)$.

(a) Aplique esse método para determinar uma boa aproximação para a função $y(x)$ que minimiza o raio $\tilde{I}[\bar{y}] = \int_0^1 \bar{y}'^2 / \int_0^1 \bar{y}^2 dx$ sujeito às condições $\bar{y}(0) = \bar{y}(1) = 0$. Tome $N = 2$ e se (i) $f_n(x) = \sin(n\phi x)$, (ii) $f_1(x) = x(1-x)$, $f_2(x) = x^2(1-x)$, então calcule o correspondente valor de $\tilde{I}$.

(b) Obtenha a solução exata para o problema variacional na parte (a) e compare o valor mínimo de $\tilde{I}$ com o aproximado obtido na parte (a).

7. Deduza as equações de Euler-Lagrange para as funções $u(x, y)$ e $v(x, y)$ duas vezes continuamente diferenciáveis que extremizam o funcional

$$\tilde{I}[\bar{u}, \bar{v}] = \iint_R F(x, y, \bar{u}, \bar{v}, \bar{u}_x, \bar{u}_y, \bar{v}_x, \bar{v}_y) dx dy$$

onde R é a região no plano- xy limitada pela curva suave, fechada, simples C , e F tem derivadas parciais segundas contínuas com respeito a seus argumentos. Extenda esse resultado para funções de n variáveis.

8. Uma partícula se move sob a ação de um *campo de força central*. Por ação de um campo de força central entendemos como sendo o gradiente de uma energia potencial $V(r)$, onde r é a distância ao ponto de origem.

(a) Assuma que a força central está agindo na origem do plano- xy e que a posição num tempo t de uma partícula de massa unitária é descrita em coordenadas polares por $r(t)$ e $\theta(t)$. Usando o princípio de Hamilton, formule o problema como um problema variacional e deduza as seguintes equações de Euler-Lagrange para r e θ :

$$(i) \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\theta}) = 0,$$

$$(ii) \ddot{r} + V'(r) - r\dot{\theta}^2 = 0, \quad (\cdot) = \frac{d}{dt}(\cdot)$$

(Sugestão: A energia cinética é $\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ e a energia potencial é $V(r)$.)

(b) A equação (i) pode ser integrada para obter $\dot{\theta} = k/r^2$, onde k é uma constante. Assuma que a órbita da partícula pode ser descrita por uma equação polar da forma $r = r(\theta)$; use a regra da cadeia para mostrar que a equação (ii) na parte (a) torna-se

$$k^2 \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \right) + r^2 \left[V'(r) - \frac{k^2}{r^3} \right] = 0.$$

(c) Assuma que $V'(r) = \frac{\mu}{r^2}$, $\mu > 0$, a qual é uma aproximação para o potencial devido a força gravitacional exercida pelo sol sobre os planetas no sistema solar, e escreva a equação na parte (b) como

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = \frac{\mu}{k^2}.$$

Integre essa fórmula e mostre que o caminho da partícula é uma seção cônica. Isto é uma verificação de uma das *Leis de Kepler do movimento planetário*.

9. De todas as curvas suaves fechadas C : $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, que englobam uma área fixa, ache aquela que tem menor perímetro.
10. Ache a função duas vezes continuamente diferenciável y que minimize $\int_0^1 (\bar{y}')^2 dx$ sujeito à condição de normalização $\int_0^1 \bar{y}^2 dx = 1$ com $\bar{y}(0) = 0$ e com a condição natural de fronteira em $x = 1$. Determine seu mínimo.

Apêndice A

Séries e Sequências de Funções

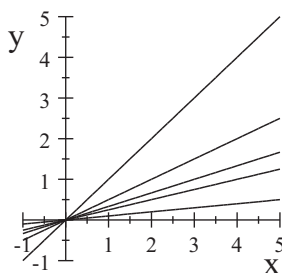
A.1 Convergência simples e convergência uniforme.

Definição A.1.1 *Seja X um conjunto de números reais. Uma sequência de funções $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ é uma correspondência que associa a cada número natural $n \in \mathbb{N}$ uma função f_n , definida em X e tomando valores reais.*

Definição A.1.2 *Uma sequência de funções $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ converge simplesmente para a função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ quando para cada $x \in X$, a sequência de números $(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots)$ converge para o número $f(x)$. Ou seja, para todo $x \in X$ fixado, tem-se $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$.*

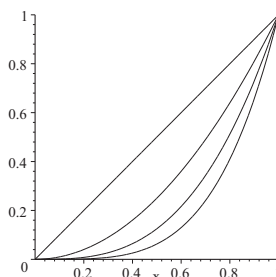
Exemplo A.1.3 *Dado o conjunto $X \subset \mathbb{R}$, sejam (a_n) uma sequência de números reais com $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, e $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Podemos considerar a sequência de funções $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por $f_n(x) = a_n \cdot g(x)$ e a função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = a \cdot g(x)$. Para cada $x \in X$ temos $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} [a_n \cdot g(x)] = a \cdot g(x) = f(x)$. Logo a sequência de funções $f_n(x) = a_n \cdot g(x)$ converge simplesmente em X para a função $f(x) = a \cdot g(x)$.*

Exemplo A.1.4 *A sequência de funções $f_n(x) = \frac{x}{n}$, converge simplesmente em toda a reta, para zero, ou seja, ao tomarmos o limite, ela converge para a função identicamente nula $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Observe o gráfico abaixo com $f_1, f_2, f_3, f_4, f_{10}$:*



Para cada $x \in \mathbb{R}$, a sequência de números $f_n(x) = \frac{x}{n}$ converge a zero.

Exemplo A.1.5 Seja a sequência de funções $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por $f_n(x) = x^n$, ($n = 1, 2, 3, \dots$). Então (f_n) converge simplesmente para a função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 0$, se $0 \leq x < 1$ e $f(1) = 1$. Com efeito, para cada $x \in [0, 1)$ temos $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$, enquanto $\lim_{n \rightarrow \infty} 1^n = 1$.



A figura mostra os gráficos das funções $f_n(x) = x^n$ para f_1, f_2, f_3 e f_4 , no intervalo $[0, 1]$. Qualquer reta vertical levantada de um ponto cujas ordenadas convergem monotonamente para zero. No ponto $x = 1$, temos $f_n(1) = 1$ para todo n .

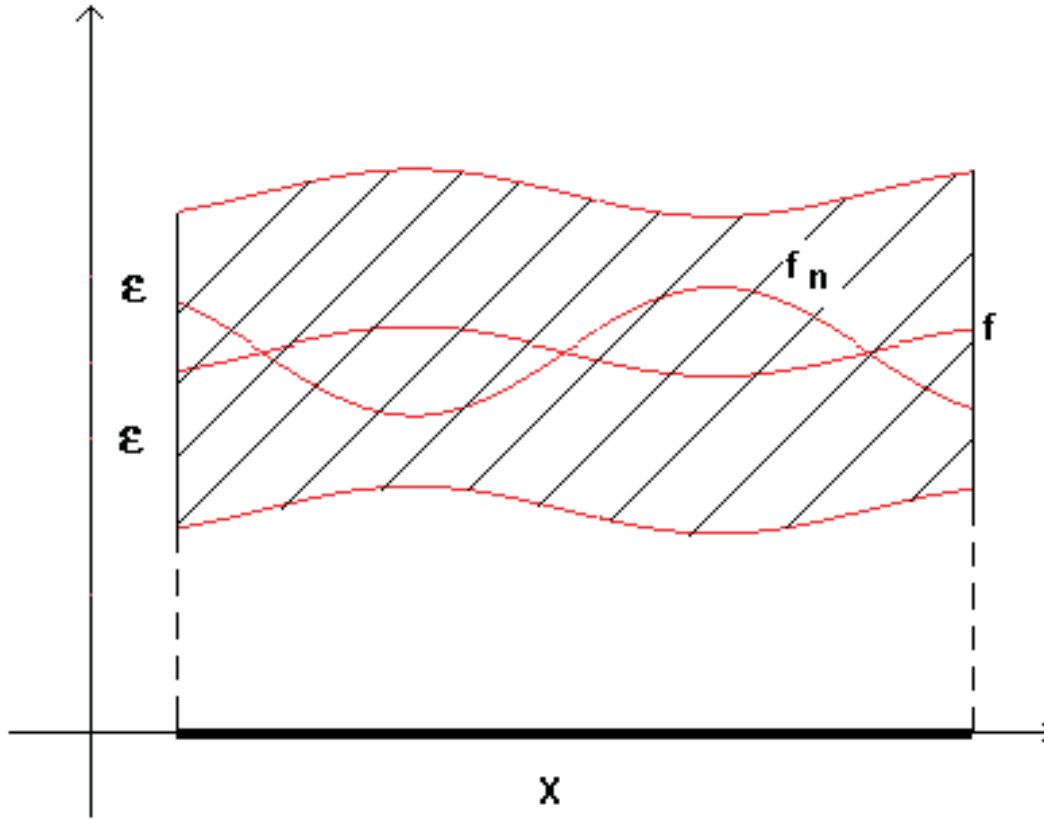
Definição A.1.6 Dizer que a sequência de funções $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ converge simplesmente para a função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ significa, formalmente, o seguinte: dado qualquer $\varepsilon > 0$, pode-se obter para cada $x \in X$, um inteiro $n_0 = n_0(\varepsilon, x)$, o qual depende de ε e de x , tal que $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Definição A.1.7 Diz-se que uma sequência de funções $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ converge uniformemente para uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe um inteiro $n_0 = n_0(\varepsilon)$, o qual depende apenas de ε , tal que $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, seja qual for $x \in X$.

Interpretemos esta definição geometricamente. Dada uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ chamaremos de faixa de raio ε em torno do gráfico de f ao conjunto dos pontos (x, y) do plano tais que $x \in X$ e $|y - f(x)| < \varepsilon$ isto é, $-\varepsilon < y - f(x) < +\varepsilon \Rightarrow f(x) - \varepsilon < y < f(x) + \varepsilon$, sendo ε um número real positivo. A condição $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, para todo $x \in X$ significa que o gráfico de f_n está contido na faixa de raio ε em torno do gráfico de f . assim dizer que $f_n \rightarrow f$ uniformemente em X significa afirmar que, para qualquer $\varepsilon > 0$ dado, pode-se obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todas as funções f_n , com $n > n_0$, têm seus gráficos contidos na faixa de raio ε em torno do gráfico de f .

Definição A.1.8 Uma sequência de funções $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se uma sequência de Cauchy quando, para qualquer $\varepsilon > 0$, dado arbitrariamente, pode-se obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$, qualquer que seja $x \in X$.

Teorema A.1.9 Uma sequência de funções $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ é uniformemente convergente se, e somente se, é uma sequência de Cauchy. Este teorema chama-se o critério de Cauchy para convergência uniforme.



Demonstração:

Suponhamos primeiro que $f_n \rightarrow f$ uniformemente em X . Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $x \in X$. Então se tomarmos m e n ambos maiores que n_0 , vale a desigualdade acima e também $|f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $x \in X$. Portanto, a hipótese $m, n > n_0$ implica $|f_m(x) - f_n(x)| = |f_m(x) - f(x) + f(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, para todo $x \in X$. Logo (f_n) é uma sequência de Cauchy. Reciprocamente, se a sequência de funções $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ é de Cauchy então, para cada $x \in X$, os números $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$ formam uma sequência de Cauchy de números reais. Pelo seguinte Teorema: Toda sequência de Cauchy (x_n) de números reais é convergente. Temos que a sequência numérica acima converge para um número real que chamamos $f(x)$. Isto define uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ para todo $x \in X$. Para mostrar que $f_n \rightarrow f$ uniformemente em X , seja dado $\varepsilon > 0$. Existe n_0 tal que $m, n > n_0 \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$, para todo $x \in X$. Nesta desigualdade mantenhamos n e x fixos e façamos $m \rightarrow \infty$. Obteremos: $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in X$, desde que seja $n > n_0$. Isto prova que $f_n \rightarrow f$ uniformemente.

Corolário A.1.10 Se as funções $f_n : \overline{X} \rightarrow \mathbb{R}$ (definidas no fecho de X) são contínuas e (f_n) converge uniformemente em X , então a sequência (f_n) converge (uniformemente) em $\overline{X}$. (onde $\overline{X}$ são todos os pontos $x \in X$ tal que $\exists x_n \in X$, e $x_n \rightarrow x$.)

Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in$

X . Como as funções f_n são contínuas em $\overline{X}$, segue-se daí que $m, n > n_0 \Rightarrow |f_m(y) - f_n(y)| \leq \varepsilon$ para todo $y \in \overline{X}$ (já que todo $y \in \overline{X}$ é limite de uma sequência de pontos de X) e, portanto, (f_n) é uma sequência de Cauchy (logo uniformemente convergente) em $\overline{X}$.

Teorema A.1.11 *Seja (f_n) uma sucessão de funções contínuas, definidas em um intervalo I , que converge uniformemente, e seja f seu limite. Então f é uma função contínua.*

Demonstração:

Provemos a continuidade da f em um ponto $x_0 \in I$. Da convergência uniforme, tem-se que, dado $\varepsilon > 0$, tome n_0 tal que:

$$|f_{n_0}(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \quad (1.1)$$

para todo $x \in I$. Agora, use a continuidade de f_{n_0} para obter $\delta > 0$ tal que:

$$|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| \leq \varepsilon, \quad (1.2)$$

para $|x - x_0| < \delta$. Como

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0) + f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| \end{aligned}$$

segue-se aplicando (1) e (2) que:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq 3\varepsilon \quad (1.3)$$

para $|x - x_0| < \delta$, o que prova a continuidade de f em x_0 .

Observação A.1.12 *A continuidade de $f = \lim f_n$ não é suficiente para garantir que a convergência seja uniforme. Mas a descontinuidade da função limite é uma maneira prática e imediata de provar que uma sequência de funções contínuas não converge uniformemente.*

A.2 Séries de Funções

Definição A.2.1 *Uma série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, onde $u_n : I \rightarrow \mathbb{R}$, convergirá pontualmente se, para cada $x_0 \in I$ fixado, a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ convergir. Isso equivale a dizer que,*

dados $\varepsilon > 0$ e $x_0 \in I$, existe um inteiro N , dependendo de ε e de x_0 , tal que: $\left| \sum_{j=n}^m u_j(x_0) \right| < \varepsilon$ para todos $n < m$, tais que $n \geq N$.

Definição A.2.2 Uma série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, convergirá uniformemente, se, dado $\varepsilon > 0$, existir um inteiro N , dependendo apenas de ε (e não de x), tal que: $\left| \sum_{j=n}^m u_j(x) \right| < \varepsilon$ para todos $n < m$, tais que $n \geq N$.

Exemplo A.2.3 A série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, onde $u_n(x) = \frac{x}{n^2}$ é definida em $[0, 1]$, converge uniformemente. De fato, para $x \in [0, 1]$:

$$\left| \sum_{j=n}^m u_j(x) \right| \leq \sum_{j=n}^m \frac{1}{j^2} \quad (2.4)$$

e portanto, dado $\varepsilon > 0$, podemos determinar um inteiro N , e portanto, dado $\varepsilon > 0$, podemos determinar um inteiro N , independentemente de x e dependente apenas de ε , tal que $\sum_{j=n}^m \frac{1}{j^2} < \varepsilon$, para $m > n \geq N$. Pois temos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é uma série- p convergente. Sendo $S_m = \sum_{j=1}^m \frac{1}{j^2}$, e $S_n = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2}$, pelo critério de Cauchy: $|S_m - S_n| = \left| \sum_{j=n}^m \frac{1}{j^2} \right| < \varepsilon$, $\forall m > n \geq N$.

Exemplo A.2.4 A série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, onde $u_1(x) = x$, $u_n(x) = x^n - x^{n-1}$, $n > 1$, é uma função definida para $0 \leq x \leq 1$, converge pontualmente para cada $x \in [0, 1]$. De fato, a reduzida de ordem n , é: $U_n = \sum_{j=1}^n u_j(x) = \sum_{j=1}^n (x^j - x^{j-1}) = x^1 - x^0 + x^2 - x^1 + \dots + x^n - x^{n-1} = x^n$, convergirá para 0 se $0 \leq x < 1$, e para 1 se $x = 1$. Tal série não converge uniformemente, pois, dados $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ e N inteiro, tomamos $x = (2\varepsilon)^{\frac{1}{(N-1)}}$ em $\sum_{j=N}^m u_j(x) = x^m - x^{N-1}$, e daí, $|x^m - x^{N-1}| = \left| (2\varepsilon)^{\frac{m}{(N-1)}} - 2\varepsilon \right|$. Logo, se m for suficientemente grande, $(2\varepsilon)^{\frac{m}{(N-1)}} < \varepsilon$, e obteremos que: $\left| \sum_{j=N}^m u_j(x) \right| > \varepsilon$, para $x = (2\varepsilon)^{\frac{1}{(N-1)}}$.

Proposição A.2.5 A série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge simplesmente se, e somente se, dados $\varepsilon > 0$ e $x \in A$ existir n_0 (dependendo de ε e de x) tal que $\left| \sum_{j=n}^m u_j(x) \right| \leq \varepsilon$, para todos $m, n \geq n_0$.

A série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge uniformemente se a sucessão (S_n) das reduzidas convergir uniformemente.

Proposição A.2.6 A série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge uniformemente se, e somente se, dado $\varepsilon > 0$ existir n_0 (dependendo apenas de ε) tal que $\left| \sum_{j=n}^m u_j(x) \right| < \varepsilon$, para todo $x \in A$ e todos $m > n \geq n_0$.

Teorema A.2.7 *Seja (f_n) uma sucessão de funções contínuas, definidas em um intervalo I , que converge uniformemente e seja f seu limite. Então f é uma função contínua.*

Teorema A.2.8 *Seja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ uma série uniformemente convergente de funções contínuas, definidas em um intervalo I . Então sua soma u é uma função contínua em I .*

Definição A.2.9 (Convergência Absoluta) *A série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge absolutamente se a série $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ convergir. Se $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ convergir simplesmente (uniformemente), diremos que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge absoluta e simplesmente (uniformemente).*

Teorema A.2.10 (Teste M de Weierstrass) *Seja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ uma série de funções $u_n : A \rightarrow \mathbb{R}$, definidas em um subconjunto A de $\mathbb{R}$. Suponha que $|u_n(x)| \leq M_n$, para todo $x \in A$, e que $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$. Então, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge uniforme e absolutamente.*

Demonstração:

Observamos que:

$$\left| \sum_{j=n}^m u_j(x) \right| \leq \sum_{j=n}^m |u_j(x)| \leq \sum_{j=n}^m M_j \quad (2.5)$$

Temos que, como $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ é convergente ($< \infty$), podemos concluir que dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0(\varepsilon)$ tal que $\left| \sum_{j=n}^m M_j \right| \leq \varepsilon$, para todos $m > n \geq n_0$. E também temos que $\sum_{j=n}^m M_j \leq \left| \sum_{j=n}^m M_j \right| \leq \varepsilon$. Daí, de (2.5) temos:

$$\left| \sum_{j=n}^m u_j(x) \right| \leq \varepsilon, \text{ para todo } x \in A. \quad (2.6)$$

Agora usando a proposição A.2.6, podemos concluir que a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge uniformemente.

Exemplo A.2.11 *As séries abaixo convergem uniforme e absolutamente em $(-\infty, +\infty)$:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^{1+\alpha}}, \alpha > 0, \quad (2.7)$$

pois $\frac{1}{n^2 + x^2} \leq \frac{1}{n^2}$, $\left| \frac{\sin(nx)}{n^{1+\alpha}} \right| \leq \frac{1}{n^{1+\alpha}}$, e a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, denominada série- p , é convergente para todo $p > 1$.

Observação A.2.12 Os números M_n do Teorema A.2.10 podem ser escolhidos como o $\sup \{|u_n(x)| : x \in A\}$. No caso em que as funções u_n são contínuas e deriváveis, esses $\sup$'s podem ser achados, usando as técnicas do cálculo diferencial, veja o exemplo abaixo.

Exemplo A.2.13 A sucessão $\sum_{n=1}^{\infty} x^n e^{-nx}$ converge uniformemente em $0 \leq x \leq \infty$. De fato, a derivada de $x^n e^{-nx}$, em relação a x , se anula para $x = 0$ e para $x = 1$. É fácil de ver que o máximo de u_n é em $x = 1$. (Em $x = 0$ temos um mínimo, se n for par, e uma inflexão, se n for ímpar). Logo $x^n e^{-nx} \leq e^{-n}$. Como $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} = \frac{1}{e-1}$, pois é uma série geométrica de razão $\frac{1}{e}$, segue-se do teste M de Weierstrass que a série em pauta converge absoluta e uniformemente.

A.3 Convergência uniforme das séries de potências e o Teorema de Abel

Teorema A.3.1 Seja $r > 0$ o raio de convergência da série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Então a série converge absoluta e uniformemente em $|x| \leq c$, para qualquer $c < r$.

Demonstração:

Seja x_0 tal que $c < x_0 < r$. Sendo a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ convergente, temos que o termo geral dela tende a zero, em particular, existe $M > 0$ tal que $|a_n x_0^n| \leq M$. Agora, para $|x| \leq c$, temos:

$$|a_n x^n| = \left| a_n \frac{x_0^n}{x_0^n} x^n \right| = |a_n x_0^n| \left| \frac{x^n}{x_0^n} \right| = |a_n x_0^n| \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \leq M \left(\frac{c}{x_0} \right)^n \quad (3.8)$$

Como a série $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{c}{x_0} \right)^n$ converge, aplicamos o teste M de Weierstrass para concluir esta demonstração.

Proposição A.3.2 (i) Seja (f_n) uma sucessão de funções contínuas em um intervalo fechado $[a, b]$, e tal que f_n convirja uniformemente em (a, b) . Então (f_n) converge uniformemente em $[a, b]$.

(ii) Seja (u_n) uma sucessão de funções contínuas em um intervalo fechado $[a, b]$, e tal que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ convirja uniformemente em (a, b) . Então $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge uniformemente em $[a, b]$.

Demonstração (ii):

Usamos a Proposição A.2.6, para concluir que, dado $\varepsilon > 0$, tem-se n_0 tal que $\left| \sum_{j=n}^m u_j(x) \right| \leq \varepsilon$ para todos $x \in (a, b)$ e $m > n \geq n_0$. Pela continuidade das funções u 's, obtemos que a desigualdade acima é válida para todo $x \in [a, b]$, e aplicamos a Proposição A.2.6 novamente para obter o resultado.

Teorema A.3.3 *Seja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ uma série de potências, cujo raio de convergência é $r > 0$. Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ convergir, então a série de potências convergirá uniformemente em $[0, r]$. Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-r)^n$ convergir, então a série de potências convergirá uniformemente em $[-r, 0]$.*

A.4 Teste de Abel e de Dirichlet

O teste M de Weierstrass é uma excelente ferramenta para estabelecer a convergência uniforme de certas séries. Entretanto ele só resolve os casos onde há convergência absoluta.

Exemplo A.4.1 *A série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2 + n}{n^2}$ converge simplesmente, para cada x no intervalo $[-1, 1]$. Se quisermos testar a convergência uniforme, não poderemos aplicar o teste M de Weierstrass, pois a série não converge absolutamente.*

Teorema A.4.2 *(Teste de Dirichlet) Sejam (u_n) e (v_n) sucessões de funções definidas em um intervalo I . Suponha que a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ convirja uniformemente em I , e que exista uma constante k tal que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |v_{n+1}(x) - v_n(x)| \leq k, \quad |v_1(x)| \leq k \quad (4.9)$$

em I . Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ converge uniformemente.

Demonstração:

Seja $U_n = \sum_{j=n}^m u_j$. Dado $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que $|U_n(x)| \leq \varepsilon$, para $n \geq n_0$ e $x \in I$. Nosso objetivo será provar que $\left| \sum_{j=n}^m u_j(x) v_j(x) \right| \leq c\varepsilon$, para $m > n \geq n_0$ e $x \in I$, onde c é uma constante independente de ε e n_0 . Então, por um cálculo simples, temos:

$$\sum_{j=n}^m u_j v_j = U_n v_n - U_{m+1} v_m + \sum_{j=n+1}^m U_j (v_j - v_{j-1}). \quad (4.10)$$

A fim de obter uma majoração para o primeiro membro de (4.10) necessitamos ter uma estimativa dos v 's:

$$|v_n| \leq |v_n - v_{n-1}| + \dots + |v_2 - v_1| + |v_1| \leq 2k, \quad (4.11)$$

Logo, em (4.10) par $m > n \geq n_0$:

$$\left| \sum_{j=n}^m u_j v_j \right| \leq 2k\varepsilon + 2k\varepsilon + \varepsilon \sum_{j=n+1}^m |v_j - v_{j-1}| \leq 5k\varepsilon, \quad (4.12)$$

e a demonstração está completa.

Teorema A.4.3 (*Teste de Abel*) *Sejam (u_n) e (v_n) sucessões de funções definidas em um intervalo I . Suponha que (i) a sucessão (v_n) convirja uniformemente para 0 em I , (ii) a série $\sum_{n=1}^{\infty} |v_n - v_{n-1}|$ converge uniformemente, e (iii) existe $k > 0$ tal que $\left| \sum_{j=1}^n u_j(x) \right| \leq k$ para todo $x \in I$ e todo n . Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ converge uniformemente.*

Demonstração:

Dado $\varepsilon > 0$, tome n_0 tal que $|v_n(x)| \leq \varepsilon$ e $\sum_{j=n}^m |v_{j+1}(x) - v_j(x)| \leq \varepsilon$, para $x \in I$ e $m > n \geq n_0$. Devemos mostrar que $\left| \sum_{j=n}^m u_j(x) v_j(x) \right| \leq \varepsilon$, para $x \in I$ e $m > n \geq n_0 + 1$. Para tal, Seja $U_n = \sum_{j=1}^n u_j$. Por um cálculo simples temos:

$$\sum_{j=n}^m u_j v_j = U_m v_m - U_{n-1} v_n + \sum_{j=n}^{m-1} U_j (v_j - v_{j-1}), \quad (4.13)$$

e daí,

$$\left| \sum_{j=n}^m u_j v_j \right| = |U_m| |v_m| - |U_{n-1}| |v_n| + \sum_{j=n}^{m-1} |U_j| |v_j - v_{j-1}|. \quad (4.14)$$

Usando as estimativas acima temos, para $m > n \geq n_0 + 1$:

$$\left| \sum_{j=n}^m u_j v_j \right| \leq k\varepsilon + k\varepsilon + k\varepsilon, \quad (4.15)$$

e a demonstração está completa.

Corolário A.4.4 *Seja (v_n) uma sucessão de funções não-negativas, definidas em um intervalo I , e tal que (i) (v_n) convirja uniformemente para 0 em I , (ii) (v_n) é não-crescente, i.e., $v_{n-1}(x) \leq v_n(x)$ para todo n . Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n v_n$ converge uniformemente.*

Demonstração:

Aplicando o Teorema A.4.3, com $u_n = (-1)^n$. A verificação da condição (ii) é feita assim: seja R_n a reduzida de ordem n da série $\sum_{n=1}^{\infty} |v_{n+1} - v_n|$,

$$R_n = \sum_{j=1}^n |v_{j+1} - v_j| = \sum_{j=1}^n (v_j - v_{j+1}) = v_1 - v_{n+1}. \quad (4.16)$$

Logo a série $\sum_{n=1}^{\infty} |v_{n+1} - v_n|$ converge uniformemente para v_1 .

A.5 Convergência Uniforme e Integração

Seja (f_n) uma sucessão de funções $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$, definidas em um intervalo I , e que converge simplesmente para uma função f . Supondo que as f_n sejam integráveis, a primeira questão que se põe é saber se f é integrável. E a seguir, saber se a expressão abaixo é válida:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f \quad (5.17)$$

onde a e b são as extremidades de I . Para começar a primeira questão, em geral, tem resposta negativa.

Exemplo A.5.1 Consideremos, para cada $n \in \mathbb{N}$ a função $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por: $f_n(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\cos n! \pi x)^{2k}$. É claro que $f_n(x) = 1$ se $n!x$ for um inteiro, e 0 nos demais pontos, ou seja,

* $f_n(x) = 1$, se $x = \frac{j}{n!}$, $j = 0, 1, \dots, n!$ (o motivo para j ser no máximo igual a $n!$ é devido ao fato de que se $j > n!$, temos que $x > 1$, e este ponto está fora do intervalo $[0, 1]$); ou

* $f_n(x) = 0$, nos demais pontos.

Cada f_n é seccionalmente contínua, logo integrável. E mais ainda $\int_0^1 f_n = 0$ (observando o gráfico desta função para algum n qualquer, podemos concluir isto). Agora, seja $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$; logo:

$$\begin{cases} f(x) = 1, & \text{se } x \text{ racional; ou} \\ f(x) = 0, & \text{se } x \text{ irracional.} \end{cases} \quad (5.18)$$

pois dado $\frac{p}{q}$ (onde p , e q são números primos entre si, e inteiros), vem que $n! \left(\frac{p}{q}\right)$ é inteiro para todo $n \geq q$, e daí $f_n\left(\frac{p}{q}\right) = 1$, para $n \geq q$.

Como uma função limitada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável se, o valor da integral superior for o mesmo da integral inferior, então neste caso, temos que f não é integrável. Observe que f é apenas o limite simples da sucessão f_n .

Poderia parecer que a dificuldade toda advém da função limite não ser integrável. Em outras palavras, suponhamos que (f_n) convirja simplesmente para f e que, tanto as f_n como a f sejam integráveis; temos que $\lim \int_a^b f_n \neq \int_a^b f$.

Exemplo A.5.2 Seja $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$, definida em $[0, 1]$. Então, seu limite simples é $f(x) = 0$, para todo $x \in [0, 1]$. E $\int_0^1 f = 0$ e $\int_0^1 nxe^{-nx^2} dx = -\frac{1}{2} [e^{-nx^2}]_0^1 = \frac{1}{2} (1 - e^{-n})$, de onde se segue que $0 = \int_0^1 f \neq \lim \int_0^1 f_n = \frac{1}{2}$.

As dificuldades evidenciadas nos dois exemplos acima não ocorrem quando a convergência for uniforme.

Teorema A.5.3 *Seja (f_n) uma sucessão de funções integráveis em $[a, b]$ que converge uniformemente para a função f . Então, f é integrável e $\lim \int_a^b f_n = \int_a^b f$.*

Teorema A.5.4 *(Consequência do Teorema da Convergência Dominada) Seja (f_n) uma sucessão de funções integráveis em $[a, b]$ que converge simplesmente para a função f integrável em $[a, b]$. Suponha que exista uma função integrável g tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$ e todo n . (em particular, se as funções f_n forem uniformemente limitadas, isto é, se existir K tal que $|f_n(x)| \leq K$ para todo $x \in [a, b]$ e todo n). Então, $\lim \int_a^b f_n = \int_a^b f$.*

Exemplo A.5.5 *Seja $f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}$, para $x \in [0, 1]$. É fácil de ver que o limite de $f_n(x)$ é a função $f(x)$ que é igual a 1 para $x \in (0, 1]$ e a 0 para $x = 0$. Além disso, $\int_0^1 \frac{nx}{1+nx} dx = \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{1}{1+nx} dx = 1 - \int_0^1 \frac{1}{1+nx} dx$, fazendo $u = 1+nx$, temos: $p/x = 0 \Rightarrow u = 1$; $p/x = 1 \Rightarrow u = 1+n$, e, $du = ndx \Rightarrow dx = \frac{du}{n}$. Daí:*

$$\int_0^1 \frac{1}{1+nx} dx = \frac{1}{n} \int_1^{1+n} \frac{du}{u} = \left[\frac{1}{n} \ln u \right]_1^{1+n} = \frac{1}{n} [\ln(1+n) - \ln(1)] = \frac{1}{n} \ln(1+n). \quad (5.19)$$

Em fim, temos: $\int_0^1 \frac{nx}{1+nx} dx = 1 - \frac{1}{n} \ln(1+n)$. Logo, $\int_0^1 f_n \rightarrow \int_0^1 f$.

Teorema A.5.6 *Seja (u_n) uma sucessão de funções integráveis em $[a, b]$ e suponha que a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ convirja uniformemente. Então, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ é integrável e $\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n$.*

Demonstração: Usando as reduzidas e aplicando o teorema A.5.3, vamos obter a demonstração deste teorema:

Pelo fato da integral $\int_a^b \sum_{k=1}^n u_k$ ser finita, temos que a soma das integrais é igual a integral das somas e assim, vale a seguinte igualdade: $\int_a^b \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n \int_a^b u_k$. Agora, levando ao limite, temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \sum_{k=1}^n u_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_a^b u_k$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b S_n = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k$, onde $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$, é a reduzida de ordem n . Ao levarmos ao limite temos: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$.

Em fim, pelo teorema A.5.3:

$$\int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_a^b S = \int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} u_k = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k.$$

A.6 Convergência Uniforme e Derivação

Seja (f_n) uma sucessão de funções deriváveis em um intervalo I , que converge simplesmente para uma função f . Pergunta-se: (i) f é derivável? (ii) em caso afirmativo, $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n \rightarrow f'$? A primeira questão tem resposta negativa em geral. De fato, tome $f_n(x) = x^n$, para $x \in [0, 1]$, cujo limite $f(x)$ nem é contínuo (0 p/ $[0, 1)$; 1 p/ 1). A segunda questão também tem resposta negativa. De fato, seja $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$, para $x \in [0, 1]$ cujo limite é $f(x) = 0$ pelo teorema do sandwich; entretanto $f'_n(x) = \frac{n \cos(nx)}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \cos(nx)$ e, portanto, (f'_n) não converge em nenhum ponto de $[0, 1]$.

Teorema A.6.1 *Seja (f_n) uma sucessão de funções deriváveis em um intervalo $[a, b]$, e tais que f'_n sejam funções contínuas. Suponha que a sucessão (f'_n) convirja uniformemente em $[a, b]$ e que exista um ponto $x_0 \in [a, b]$, onde a sucessão $(f_n(x_0))$ converge. Então, (f_n) converge uniformemente e, se representarmos por f o limite de (f_n) , e por g o limite de (f'_n) , temos $f' = g$.*

Demonstração:

Aplicando o teorema fundamental do cálculo temos, para cada n :

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f'_n, \quad (6.20)$$

onde x e x_0 são pontos de $[a, b]$. Usando o Teorema 10, e chamando de c o limite de $(f_n(x_0))$ obtemos, para cada x fixado:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = c + \int_{x_0}^x g \quad (6.21)$$

representando por f o limite de (f_n) , concluímos:

$$f(x) = c + \int_{x_0}^x g \quad (6.22)$$

Como g é uma função contínua, pois é o limite uniforme de funções contínuas, obtemos do seguinte teorema: (Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função (limitada) integrável, e suponhamos que f seja contínua em um ponto $x_0 \in (a, b)$. Então, a função F definida por: $F(x) = \int_a^x f$, é

derivável em x_0 e $F'(x_0) = f(x_0) \cdot$, que $f'(x) = g(x)$. A convergência uniforme de (f_n) é consequência da desigualdade a seguir, obtida de (6.20) e (6.22):

$$\begin{aligned} f_n(x) - f(x) &= (f_n(x_0) - c) + \left| \int_a^b (f'_n - g) \right| \\ &\leq |f_n(x_0) - c| + \left| \int_a^b (f'_n - g) \right| \end{aligned} \quad (6.23)$$

como $f_n(x_0)$ converge para c , dado $\varepsilon > 0$, $\exists N > 0$, t.q.:

$$|f_n(x_0) - c| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \forall n \geq N, N = N(\varepsilon). \left| \int_a^b (f'_n - g) \right| \leq \int_a^b |f'_n - g| \quad (6.24)$$

dado $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 = n_0(\varepsilon)$, $n_0 > 0$, t.q. $\forall n \geq n_0$:

$$|f'_n - g| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \quad (6.25)$$

daí:

$$\int_a^b |f'_n - g| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \int_{x_0}^x dx \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} |x - x_0| \quad (6.26)$$

mas: $|x - x_0| \leq (b - a)$, daí:

$$\int_a^b |f'_n - g| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} |x - x_0| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} (b - a) = \frac{\varepsilon}{2}. \quad (6.27)$$

Com isso

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \forall n > \max\{n_0, N\} = N_1(\varepsilon), \forall x \in [a, b], \quad (6.28)$$

daí f_n converge uniformemente para f .

Observação:

Observação A.6.2 O Teorema A.6.1 nos diz que mediante a convergência uniforme de (f'_n) e a convergência de $(f_n(x_0))$ tem-se:

$$\frac{d}{dx} (\lim f_n(x)) = \lim \frac{d}{dx} f_n(x). \quad (6.29)$$

Teorema A.6.3 (forte) Mesmas hipóteses do Teorema A.6.1, menos a de que f'_n seja contínua.

Demonstração: Seja $x \in [a, b]$. Usando o Teorema do Valor Médio, que aplicado a função $f_n - f_m$ diz que, para todo $x \in [a, b]$, existe c entre x e x_0 tal que:

$$f_n(x) - f_m(x) - [f_n(x_0) - f_m(x_0)] = (x - x_0) [f'_n(c) - f'_m(c)]. \quad (6.30)$$

Apesar de c depender de n e m , segue-se da convergência uniforme de (f'_n) que (f_n) converge uniformemente em $[a, b]$. Agora, dado $\varepsilon > 0$, tome n_0 tal que, para $m > n \geq n_0$, tenhamos $|f'_n(y) - f'_m(y)| \leq \varepsilon$, para todo $y \in [a, b]$. Logo, de (1) :

$$|f_n(x) - f_m(x) - [f_n(x_0) - f_m(x_0)]| \leq \varepsilon |x - x_0| \quad (6.31)$$

e fazendo $m \rightarrow \infty$, temos:

$$\left| \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} - \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \leq \varepsilon n \geq n_0. \quad (6.32)$$

Seja agora n_1 , tal que $n \geq n_1$, $|f'_n(x_0) - g(x_0)| \leq \varepsilon$. Logo, se $|x - x_0| < \delta$, para um certo $\delta = \delta(\varepsilon, m)$, onde esse $m = \max(n_0, n_1)$, temos:

$$\left| \frac{f_m(x) - f_m(x_0)}{x - x_0} - g(x_0) \right| \leq 2\varepsilon \quad (6.33)$$

Finalmente, (2) e (3) nos dão:

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - g(x_0) \right| \leq 3\varepsilon \quad (6.34)$$

o que implica: $f'(x_0) = g(x_0)$.

Corolário A.6.4 *Seja (u_n) uma sequência de funções com derivadas contínuas em $[a, b]$. Suponha que $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n$ convirja uniformemente em $[a, b]$, e que exista $x_0 \in [a, b]$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ convirja. Então $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge uniformemente e $\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n$. (Diz-se que a série pode ser derivada termo a termo).*

A.7 O Teorema de Arzelá-Ascoli

Ao se trabalhar com funções é posta a seguinte questão: dada uma sucessão de funções (f_n) contínuas definidas em um intervalo $[a, b]$ e uniformemente limitadas (isto é, existe $k > 0$ tal que $|f(x)| \leq k$, para todo $x \in [a, b]$), será que essa sucessão contém uma subsucessão convergente? Em geral, não. O Teorema de Bolzano-Weierstrass nos diz que uma sucessão limitada de números reais tem uma subsucessão convergente. Portanto, para obtermos um resultado análogo, ao trabalharmos com funções, é necessário restringir o tipo de sucessões às quais o resultado aplicar-se-á. Para tal, vamos introduzir o conceito de equicontinuidade.

Definição A.7.1 *Uma família $\mathbb{F}$ de funções contínuas, definidas em um intervalo $[a, b]$, é equicontínua se, dado $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$, para toda $f \in \mathbb{F}$ e todos $x, y \in [a, b]$ com $|x - y| \leq \delta$.*

Exemplo A.7.2 *A sucessão $f_n(x) = x^n$ em $[0, 1]$ não é equicontínua.*

Teorema A.7.3 *Seja (f_n) uma sucessão uniformemente convergente de funções contínuas em um intervalo fechado $[a, b]$. Então, os elementos de (f_n) formam um conjunto equicontínuo de funções.*

Demonstração: Seja f o limite uniforme de f_n , o qual é uma função contínua, pelo Teorema 2. Agora, dado $\varepsilon > 0$, tome $\delta_0 > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$, para $|x - y| < \delta_0$, o que é possível em vista da continuidade uniforme de f (toda f_n e a f estão definidas num intervalo compacto e são funções contínuas), provada no seguinte Lema: (Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ para $|x_1 - x_2| < \delta$). Seja agora n_0 tal que $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$, para todo $x \in [a, b]$ e todos $n > n_0$. Logo, se $|x - y| \leq \delta_0$ e $n > n_0$, $|f_n(x) - f_n(y)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f(y)| + |f(y) - f_n(y)| \leq \varepsilon$. Agora, para cada j , $1 \leq j \leq n_0$, tome $\delta_j > 0$ tal que $|f_j(x) - f_j(y)| \leq \varepsilon$, para $|x - y| < \delta_j$. Portanto, se escolhermos $\delta = \min(\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{n_0})$, teremos que $|f_n(x) - f_n(y)| \leq \varepsilon$, para todo n e $|x - y| \leq \delta$.

Teorema A.7.4 (Arzelà-Ascoli) *Seja (f_n) uma sucessão equicontínua e uniformemente limitada de funções definidas em um intervalo $[a, b]$. Então (f_n) contém uma subsucessão que converge uniformemente.*

Demonstração:

Seja $(r_1, r_2, \dots)$ o conjunto enumerável de todos os racionais de $[a, b]$. Como $(f_n(r_1))$ é uma sucessão numérica limitada, a aplicação do Teorema de Bolzano-Weierstrass fornece uma subsucessão $(f_{1n}(r_1))$ convergente. Agora, olhe $(f_{1n}(r_2))$: é uma sucessão numérica limitada. O Teorema de Bolzano-Weierstrass fornece uma subsucessão $(f_{2n}(r_2))$ de $(f_{1n}(r_2))$, a qual converge. Assim produzimos uma sucessão de subsucessões de (f_n) :

$$\begin{array}{c} f_{11}, f_{12}, \dots, f_{1n}, \dots \\ f_{21}, f_{22}, \dots, f_{2n}, \dots \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ f_{n1}, f_{n2}, \dots, f_{nn}, \dots \end{array}$$

Com a propriedade que cada uma é subsucessão da anterior. Seja $g_n = f_{nn}$. Mostraremos que $(g_n(x))$ converge, qualquer que seja $x \in [a, b]$.

Primeiramente, se x for um racional r_k em $[a, b]$, temos que a sucessão numérica $(f_{kn}(r_k))_{n=1}^{\infty}$ converge. Daí segue que $(g_n(r_k))_{n=k}^{\infty}$ converge, pois se trata de uma subsucessão de $(f_{kn}(r_k))_{n=k}^{\infty}$. Agora seja $x \in [a, b]$ um real qualquer fixado, sabemos que sempre existe um racional r tal que $|x - r| < \delta$. Demonstraremos que, dado $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que se $m > n \geq n_0$, então $|g_m(x) - g_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Dado esse ε , usamos a equicontinuidade da sucessão (f_n) para obter um $\delta > 0$ tal que $|g_n(x) - g_n(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$, se $|x - y| \leq \delta$. E a seguir escolha n_0 tal que $|g_n(r) - g_m(r)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$, para $m > n \geq n_0$. Essa escolha é possível, pois já sabemos que $(g_n(r))$

converge. (Observe: n_0 pode, a priori, depender de r). Tudo isso posto, temos, para $m > n \geq n_0$ e para aquele x fixado que:

$$\begin{aligned} |g_n(x) - g_m(x)| &\leq |g_n(x) - g_n(r)| + |g_n(r) - g_m(r)| + |g_m(r) - g_m(x)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

segue daí que a sequência (g_n) é de Cauchy em $[a, b]$, e portanto, convergente, e como $[a, b]$ é compacto a convergência uniforme segue.