

UFPB/CSEN/DM

PERÍODO 07.2

GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA TURMA: 01

DISCIPLINA: EDO

TURNO: Noite

PROFESSOR: Milton

#### 4<sup>a</sup> Lista de Exercícios

1. (a) Mostre que a matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

tem valores próprios  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 \neq 0$  se e só se  $ad - bc = 0$  e  $a + d \neq 0$ .

- (b) Discuta a estabilidade dos pontos de equilíbrio e descreva as curvas-soluções do sistema plano autônomo  $\dot{x} = Ax$  quando  $A$  tem valores próprios  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 \neq 0$ .

2. Discuta a estabilidade dos pontos de equilíbrio para cada um dos sistemas seguintes.

$$(a) \begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = x - 3y \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} \dot{x} = x - 3y \\ \dot{y} = 4x - 6y \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} \dot{x} = 4x - 6y \\ \dot{y} = 6x - 9y \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = x - y \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} \dot{x} = -x + y + z \\ \dot{y} = -2y \\ \dot{z} = -3z \end{cases}$$

$$(f) \begin{cases} \dot{x} = x + y + z \\ \dot{y} = 2x \\ \dot{z} = 3z \end{cases}$$

3. Converta a equação de coeficientes constantes  $y'' + ay' + by = 0$  em um sistema plano autônomo e discuta as trajetórias e estabilidade para este sistema.

4. Qual é o sistema de aproximação linear para

$$\dot{x} = P_1(x, y),$$

$$\dot{y} = P_2(x, y),$$

quando  $P_1$  e  $P_2$  são polinômios.

5. Qual o sistema de aproximação linear para

$$\dot{x} = F_1(x, y),$$

$$\dot{y} = F_2(x, y),$$

quando  $F_1$  e  $F_2$  tem expansões em séries de Taylor convergentes

$$F_1(x, y) = \sum a_{ij}x^i y^j,$$

$$F_2(x, y) = \sum b_{ij}x^i y^j$$

numa vizinhança de  $(0, 0)$  que se anulam na origem?

6. Aplique os exercícios 4 e 5 para obter as aproximações lineares em  $(0, 0)$  para cada um dos seguintes sistemas

$$(a) \begin{aligned} \dot{x} &= \sin x + e^y - 1 \\ \dot{y} &= xy \end{aligned} \quad (b) \begin{aligned} \dot{x} &= \tan x + y^2 \\ \dot{y} &= \ln(1 + x) + \cosh y - 1 \end{aligned} \quad (c) \begin{aligned} \dot{x} &= -(\sinh x)(\cosh y) \\ \dot{y} &= -2ye^x(1 + y) \end{aligned}$$

7. Construa uma função de Liapunov para cada um dos seguintes sistemas.

$$(a) \begin{aligned} \dot{x} &= -x \\ \dot{y} &= 4x - 3y \end{aligned} \quad (b) \begin{aligned} \dot{x} &= -2x - y \\ \dot{y} &= -2x - 5y \end{aligned} \quad (c) \begin{aligned} \dot{x} &= -x + y + z \\ \dot{y} &= -2y \\ \dot{z} &= -3z \end{aligned}$$

8. Construa funções de Liapunov para os sistemas do exercício 6 se for possível.

9. Investigue a estabilidade de todos os pontos de equilíbrio do sistema

$$\dot{x} = y,$$

$$\dot{y} = -6x - y + y^2.$$

10. Converta a equação de *Van der Pol*

$$y'' + \mu(y^2 - 1)y' + y = 0, \quad \mu \text{ uma constante,}$$

num sistema plano autônomo e mostre que a origem é assintoticamente estável se  $\mu < 0$ .