

UFPB/CCEN/DM

PERÍODO 07.2

GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA TURMA: 01

DISCIPLINA: EDO

TURNOS: Noite

PROFESSOR: Milton

4ª Lista de Exercícios

1. (a) Mostre que a matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

tem valores próprios $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$ se e só se $ad - bc = 0$ e $a + d \neq 0$.

(b) Discuta a estabilidade dos pontos de equilíbrio e descreva as curvas-soluções do sistema plano autônomo $\dot{x} = Ax$ quando A tem valores próprios $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$.

2. Discuta a estabilidade dos pontos de equilíbrio para cada um dos sistemas seguintes.

$$(a) \begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = x - 3y \end{cases} \quad (b) \begin{cases} \dot{x} = x - 3y \\ \dot{y} = 4x - 6y \end{cases} \quad (c) \begin{cases} \dot{x} = 4x - 6y \\ \dot{y} = 6x - 9y \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = x - y \end{cases} \quad (e) \begin{cases} \dot{x} = -x + y + z \\ \dot{y} = -2y \\ \dot{z} = -3z \end{cases} \quad (f) \begin{cases} \dot{x} = x + y + z \\ \dot{y} = 2x \\ \dot{z} = 3z \end{cases}$$

3. Converta a equação de coeficientes constantes $y'' + ay' + by = 0$ em um sistema plano autônomo e discuta as trajetórias e estabilidade para este sistema.

4. Qual é o sistema de aproximação linear para

$$\dot{x} = P_1(x, y),$$

$$\dot{y} = P_2(x, y),$$

quando P_1 e P_2 são polinômios.

5. Qual o sistema de aproximação linear para

$$\begin{aligned}\dot{x} &= F_1(x, y), \\ \dot{y} &= F_2(x, y),\end{aligned}$$

quando F_1 e F_2 tem expansões em séries de Taylor convergentes

$$\begin{aligned}F_1(x, y) &= \sum a_{ij}x^i y^j, \\ F_2(x, y) &= \sum b_{ij}x^i y^j\end{aligned}$$

numa vizinhança de $(0, 0)$ que se anulam na origem?

6. Aplique os exercícios 4 e 5 para obter as aproximações lineares em $(0, 0)$ para cada um dos seguintes sistemas

$$\begin{array}{lll}(a) \quad \begin{aligned}\dot{x} &= \sin x + e^y - 1 \\ \dot{y} &= xy\end{aligned} & (b) \quad \begin{aligned}\dot{x} &= \tan x + y^2 \\ \dot{y} &= \ln(1+x) + \cosh y - 1\end{aligned} & (c) \quad \begin{aligned}\dot{x} &= -(\sinh x)(\cosh y) \\ \dot{y} &= -2ye^x(1+y)\end{aligned}\end{array}$$

7. Construa uma função de Liapunov para cada um dos seguintes sistemas.

$$\begin{array}{lll}(a) \quad \begin{aligned}\dot{x} &= -x \\ \dot{y} &= 4x - 3y\end{aligned} & (b) \quad \begin{aligned}\dot{x} &= -2x - y \\ \dot{y} &= -2x - 5y\end{aligned} & (c) \quad \begin{aligned}\dot{x} &= -x + y + z \\ \dot{y} &= -2y \\ \dot{z} &= -3z\end{aligned}\end{array}$$

8. Construa funções de Liapunov para os sistemas do exercício 6 se for possível.

9. Investigue a estabilidade de todos os pontos de equilíbrio do sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -6x - y + y^2.\end{aligned}$$

10. Converta a equação de *Van der Pol*

$$y'' + \mu(y^2 - 1)y' + y = 0, \quad \mu \text{ uma constante,}$$

num sistema plano autônomo e mostre que a origem é assintoticamente estável se $\mu < 0$.