Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências e Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Disciplina: EDO
Prof.: Milton de Lacerda Oliveira

3ª Lista de Exercícios

1) Para cada uma das matrizes abaixo, expressar e^{tA} como um polinômio em A.

a) $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$, b) $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -11 & -6\end{bmatrix}$, c) $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$.

2) Em cada uma das matrizes e dados iniciais abaixo, resolver o sistema $Y' = AY$.

a) $A=\begin{bmatrix}-5 & 3\\ -15 & 7\end{bmatrix}$, $Y(0)=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$, b) $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$, $Y(0)=\begin{bmatrix}2\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$,

c) $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$, $Y(0)=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$, d) $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$, $Y(0)=\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\\ c_3\end{bmatrix}$.

3) a) Seja A uma matriz constante $n\times n$, B e C sejam vetores constantes n-dimensionais. Demonstrar que a solução do sistema

$$Y'(t) = AY(t) + C,\ Y(a) = B,$$

em $(-\infty,\infty)$ vem dada pela fórmula

$$Y(x) = e^{(x-a)A}B + \left(\int_0^{x-a} e^{uA}\,du\right)C.$$

b) Se A é não-singular, demonstrar que a integral da parte a) tem o valor $\left\{e^{(x-a)A} - I\right\}A^{-1}$.

c)Calcular $Y(x)$ na forma explícita quando

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -2 & 3\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}b\\ c\end{bmatrix},\ a=0.$$

4) Sejam A uma matriz constante $n\times n$, B e C vetores constantes n-dimensionais, e seja α um escalar dado.

   a) Demonstrar que o sistema não homogêneo $Z'(t) = AZ(t) + e^{\alpha t}C$ tem uma solução da forma $Z(t) = e^{\alpha t}B$ se, e só se, $(\alpha I - A)B = C$.

b) Se α não é um autovalor de A, demonstrar que o vetor B sempre pode ser escolhido de modo que o sistema da parte a) tenha uma solução da forma $Z(t) = e^{\alpha t}B$.

c) Se α não é um autovalor de A, demonstrar que toda solução do sistema $Y'(t) = AY(t) + e^{\alpha t}C$ tem a forma $Y(t) = e^{tA}(Y(0) - B) + e^{\alpha t}B,$ donde $B = (\alpha I - A)^{-1}C.$

5) Considere o sistema não homogêneo

$$y'_1 = 3y_1 + y_2 + t^3$$
$$y'_2 = 2y_1 + 2y_2 + t^3.$$

a) Encontrar uma solução particular da forma $Y(t) = B_0 + tB_1 + t^2B_2 + t^3B_3$.

b) Encontrar uma solução do sistema com a condição $y_1(0) = y_2(0) = 1.$

6) Sejam A uma matriz constante $n \times n$, B, C e D vetores constantes n-dimensionais e α um número real não nulo dado. Demonstrar que o sistema não homogêneo

$$Y'(t) = AY(t) + (\cos \alpha t)C + (\operatorname{sen} \alpha t)D,\ Y(0) = B,$$

tem uma solução particular da forma

$$Y(t) = (\cos \alpha t)E + (\operatorname{sen} \alpha t)F,$$

sendo E e F vetores constantes, se e só se,

$$(A^2 + \alpha^2 I)B = -(AC + \alpha D).$$

Determinar E e F em função de A, B, C para uma tal solução. Observe que se $A^2 + \alpha^2 I$ é não singular, o vetor inicial B sempre pode ser escolhido de modo que o sistema tenha uma solução da forma indicada.

7) a) Achar uma solução particular do sistema homogêneo

$$y'_1 = y_1 + 3y_2 + 4\operatorname{sen} 2t$$
$$y'_2 = y_1 - y_2.$$

b) Achar uma solução do sistema com as condições iniciais $y_1(0) = y_2(0) = 1.$

8) Para cada um dos dados abaixo, resolver o sistema não homogêneo $Y'(t) = AY(t) + Q(t)$ sujeito à condição inicial dada.

a) $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix},\ Q(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -2e^t \end{bmatrix},\ Y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$

b) $A = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix},\ Q(t) = \begin{bmatrix} 7e^t - 27 \\ -3e^t + 12 \end{bmatrix},\ Y(0) = \begin{bmatrix} -\dfrac{1007}{442} \\ \dfrac{707}{221} \end{bmatrix}.$

9) Aplicar o método das aproximações sucessivas ao problema de valor inicial não linear

$$y' = x + y^2,\ \text{ com } y = 0 \text{ quando } x = 0.$$

Tomar $Y_0(x) = 0$ como função inicial e calcular $Y_3(x)$.

10) Considerar o problema de valor inicial não linear com $y = 1$ quando $x = 0$.

a) Aplicar o método das aproximações sucessivas, partindo da função inicial $Y_0(x) = 1$, e calcular $Y_2(x)$.

b) Seja $R=[-1,\ 1]\times[-1,\ 1]$. Achar o menor M tal que $|f(x,y)|\leq M$ em R. Achar um intervalo $I=(-c,c)$ tal que o gráfico de toda função aproximante Y_n em I, esteja em R.

c) Suponha que a solução $y=Y(x)$ tem um desenvolvimento em série de potências numa vizinhança da origem. Determinar os seis primeiros termos não nulos desse desenvolvimento e comparar o resultado com a parte a).