Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática e Estatística
Disciplina: Equações Diferenciais Ordinárias
Professor: Milton

2ª Lista de Exercícios

1) Comprovar cada uma das seguintes regras de derivação para funções matriciais, supondo que P e Q são deriváveis. Em a), P e Q devem ser do mesmo tamanho de modo que $P+Q$ tenha sentido. Em b) e d) não devem ser necessariamente do mesmo tamanho contanto que os produtos façam sentido. Em c) e d), Q se supõe não singular.

a) $(P+Q)' = P' + Q'$.

b) $(PQ)' = PQ' + P'Q.$

c) $(Q^{-1})' = -Q^{-1}Q'Q^{-1}$.

d) $(PQ^{-1})' = -PQ^{-1}Q'Q^{-1} + P'Q^{-1}$.

2) a) Seja P uma função matricial derivável. Demonstrar que as derivadas de P^2 e P^3 vem dadas pelas fórmulas

$$(P^2)' = PP' + P'P, \qquad (P^3)' = P^2P' + PP'P + P'P^2.$$

b) Enunciar uma fórmula geral para a derivada de P^k e demonstra-la por indução.

3) Seja P uma função matricial derivável e g uma função escalar derivável cujo imagem seja um subconjunto do domínio de P. Definir a função composta $F(t) = P(g(t))$ e demonstrar a regra da cadeia, $F'(t) = g'(t)P'(g(t))$.

4) Demonstrar que se $P'(t) = 0$ para todo t no intervalo aberto (a,b), então a função matricial P é constante em (a,b).

5) Demonstrar que as seguintes propriedades de normas são válidas:

$$\|A+B\| \le \|A\| + \|B\|, \qquad \|cA\| = |c|\,\|A\|.$$

6) Se uma função matricial P é integrável num intervalo $[a,b]$ demonstrar que

$$\left\| \int_a^b P(t)\,dt \right\| \le \int_a^b \|P(t)\|\,dt.$$

7) Seja D uma matriz diagonal $n\times n$, $D = diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$. Demonstrar que a série matricial $\sum_{k=0}^{\infty} D^k/k!$ converge e é também uma matriz diagonal,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{D^k}{k!} = diag(e^{\lambda_1},\ldots,e^{\lambda_n}).$$

(O termo correspondente a $k=0$ se entende que é a matriz identidade I.)

8) Seja D uma matriz diagonal $n\times n$, $D = diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$. Se a série matricial $\sum_{k=0}^{\infty} c_k D^k$ converge, demonstrar que

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k D^k = diag\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k\lambda_1^{\,k},\ldots,\sum_{k=0}^{\infty} c_k\lambda_n^{\,k}\right).$$

9) Suponhamos que a série matricial $\sum_{k=0}^{\infty} C_k$ converge, donde cada C_k é uma matriz $n\times n$. Demonstrar que a série matricial $\sum_{k=0}^{\infty}(AC_kB)$ também converge e que sua soma é a matriz

$$A\left(\sum_{k=0}^{\infty} C_k\right)B.$$

Aqui A e B são matrizes tais que o produto AC_kB faça sentido.

10) a) Se $A=\begin{bmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$, demonstrar que $e^{tA} = \begin{bmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{bmatrix}$.

b) Achar a fórmula correspondente para e^{tA} quando $A=\begin{bmatrix} a & b\\ -b & a\end{bmatrix}$, a,b reais.

11) Se $A(t)$ é uma função real escalar de t, a derivada de $e^{A(t)}$ é $e^{A(t)}A'(t)$. Calcular a derivada de $e^{A(t)}$ quando $A(t)=\begin{bmatrix} 1 & t\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ e demonstrar que o resultado não é igual a nenhum dos produtos $e^{A(t)}A'(t)$ ou $A'(t)e^{A(t)}$.

12) Para cada uma das matrizes abaixo, a) calcular A^n, e expressar A^3 em função de I, A, A^2. b) Calcular e^{tA}.

a) $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$, b) $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$, c) $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$.

13) Calcular cada uma das matrizes $e^A e^B, e^B e^A, e^{A+B}$ quando $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, e observar que os três resultados são distintos.

14) Se $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ demonstrar que $e^A = \begin{bmatrix} x^2 & xy & y^2 \\ 2xy & x^2+y^2 & 2xy \\ y^2 & xy & x^2 \end{bmatrix}$, donde $x = \cosh 1$ e $y = \sinh 1$.

15) Se $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, expressar e^{tA} como combinação linear de I, A, A^2.