Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Disciplina: Equações Diferenciais Ordinárias
Professor: Milton

1ª Lista de Exercícios

1) Seja $g(t) = \dfrac{2}{t^2 - 1}$, $|t| \neq 1$.

   a) Mostre que toda solução de $x' = g(t)$ é da forma

   $$\varphi(t) = c + \log\left|\frac{t-1}{t+1}\right|$$

   onde $c \in IR$.

   b) Faça um esboço destas soluções em

   $$\Omega = \{t : |t| \neq 1\} \times IR.$$

2) *Equações homogêneas.* Seja $f : IR \to IR$

   a) As equações da forma

   $$x' = f\left(\frac{x}{t}\right), |t| \neq 0$$

   são chamadas equações homogêneas. Prove que a mudança de variáveis $x = yt$ transforma equações homogêneas em equações com variáveis separáveis.

   b) Resolva a equação

   $$x' = \frac{x+t}{t}, \ \ x(1) = 0.$$

3) Seja

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{at + bx + c}{dt + ex + f}\right) \qquad (*)$$

a) Mostre que se $ae - bd \neq 0$ então existem h,k tais que as mudanças de variáveis

$$t = \tau - h, \qquad x = y - k$$

transformam (*) numa equação homogênea.

b) Se $ae - bd = 0$ encontre uma mudança de variáveis que transforma (*) numa equação com variáveis separáveis.

4) <u>*Equação de Bernoulli*</u>. Mostre que a mudança de variáveis $x^{1-n} = y$ transforma a equação de Bernoulli

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x + c(t)x^n$$

numa equação linear.

5) <u>*Equação de Riccati*</u>. A equação do tipo

$$x' = r(t)x^2 + a(t)x + b(t) \qquad (*)$$

chama-se equação de Riccati. Mostre que se φ_1 é uma solução de (*) então $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ é solução de (*) se e só se φ_2 é uma solução da equação de Bernoulli:

$$y' = (a(t) + 2r(t)\varphi_1(t))y + r(t)y^2 .$$

Ache as soluções de

$$x' = \frac{x}{t} + t^3x^2 - t^5$$

sabendo que esta equação admite $\varphi_1(t) = t$ como solução.

6) Seja a equação diferencial $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$, onde $f : IR^2 \to IR$ é dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

i) Mostre que a equação acima admite soluções para condições iniciais $y(x_0) = y_0$ arbitrárias.

j) f satisfaz localmente as condições do Teorema de Picard ? Justifique.

k) E as do Teorema de Peano? Justifique.

7) Sejam $g, f : IR \to IR$ contínuas sendo f Lipschitziana. Prove que o sistema

$$\begin{cases} x' = f(x), \ x(t_0) = x_0, \\ y' = g(x)y, \ y(t_0) = y_0; \end{cases}$$

tem solução única em qualquer intervalo onde ela esteja definida. Pode-se retirar a hipótese de f ser Lipschitziana e obter a mesma conclusão.

8) (Soluções aproximadas) (i) Seja $f : IR \times IR^n \to IR^n$ contínua com constante de Lipschitz k relativamente à segunda variável. Sejam $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ funções seccionalmente diferenciáveis num intervalo $I = (a,b)$ que contém o ponto t_0. Suponha que para $t \in I$

$$(*) \qquad \left|\varphi'_i(t) - f(t, \varphi_i(t))\right| \le \varepsilon_i, \ i = 1, 2,$$

mostre que

$$\left|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\right| \le \left|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\right| e^{k(t-t_0)} + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{k}(e^{k(t-t_0)} - 1).$$

(ii) Sejam $f_m : I \times IR^n \to IR^n$ tais que $f_m \to f_0$ uniformemente em $I \times IR^n$ e todas tem a mesma constante de Lipschitz k. Se φ_m é a solução de

$$x' = f_m(t,x), \ x(t_0) = x_m,$$

use (i) para provar que φ_m tende uniformemente em I para φ_0 se $x_m \to x_0$. Onde φ_0 é a solução de

$$x' = f_0(t,x), \ x(t_0) = x_0.$$

(Sugestão: Use a sugestão do Livro de Eq. Dif. Ord. de Jorge Souto Maior, pág. 31).

9) Seja $\{\varphi_m\}$ a seqüência de funções definidas por

$$\varphi_0(x) = 0, \ \varphi_n(x) = 1 + \int_0^x (\varphi_{n-1}(t))^2 \, dt.$$

Mostre que φ_n é um polinômio de grau $2^{n-1} - 1$, cujos coeficientes estão em $[0,1]$.

Mostre que, para $|x| < 1$, $\varphi_n \to \varphi$, onde φ é a solução de $\dfrac{dy}{dx} = y^2$, $y(0) = 1$.

10) Seja $f_1, f_2, \cdots$ uma seqüência de funções contínuas em $\Omega = \{(t,x); \ t_0 \le t \le t_0 + a, \ |x - x_0| \le b\}$ tal que $f_n \to f$ uniformemente em Ω. Seja φ_n uma solução de

$$x' = f_n(t,x), \ x(t_n) = x_n$$

em $[t_0, t_0 + a]$, onde $n = 1, 2, \cdots$ e tal que $t_n \to t_0$, $x_n \to x_0$ quando $n \to \infty$. Prove que existe uma subseqüência $\varphi_{n_1}, \varphi_{n_2}, \cdots$ uniformemente convergente em $[t_0, t_0 + a]$ e que, para qualquer subseqüência nestas condições, o limite $\varphi(t) = \lim_{k\to\infty} \varphi_{n_k}(t)$ é uma solução de

$$x' = f(t, x), \; x(t_0) = x_0, \text{ em } [t_0, t_0 + a] \quad (*)$$

Em particular, se (*) possuir uma única solução $\varphi(t)$ em $[t_0, t_0 + a]$, então $\varphi(t) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(t)$ uniformemente.