3. Integrais Múltiplas

3.1 Integrais Iteradas

3.1A Em cada caso abaixo, observe a região D e escreva a integral dupla $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dA$ como uma integral iterada (repetida) de modo a obter o cálculo mais simples.

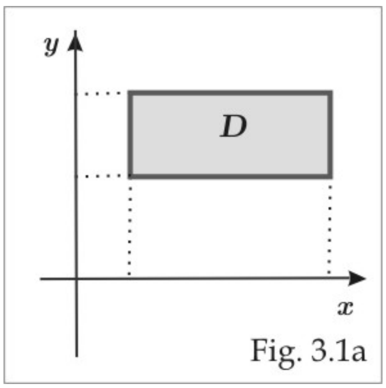

Fig. 3.1a

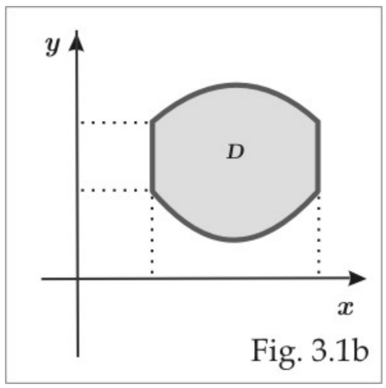

Fig. 3.1b

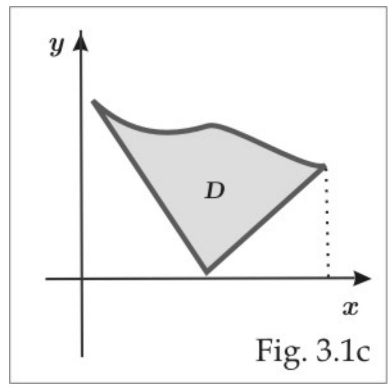

Fig. 3.1c

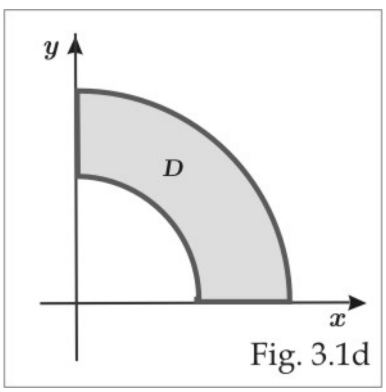

Fig. 3.1d

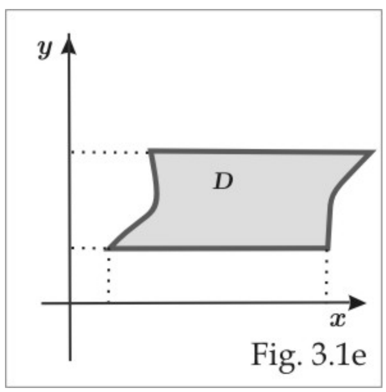

Fig. 3.1e

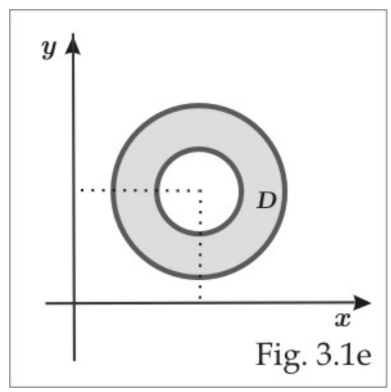

Fig. 3.1e

3.1B Calcule as seguintes integrais iteradas e em cada caso esboce a região de integração. Inverta a ordem de integração e compare o grau de dificuldade no cálculo da integral nas duas ordens.

(a) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{|x|} dydx$ (b) $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{x} \cos\left(x^2\right) dydx$ (c) $\displaystyle\int_0^3\int_1^2 \left(12xy^2 - 8x^3\right) dydx$

(d) $\displaystyle\int_1^3\int_{1-x}^{\sqrt{x}} xydydx$ (e) $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_{-y}^{y} \operatorname{sen} x dxdy$ (f) $\displaystyle\int_1^2\int_0^1 (x - 3\ln y)\, dxdy$

(g) $\int_0^1 \int_{x^2}^{x} e^{y/x} dy dx$ (h) $\int_0^1 \int_0^x e^{x^2} dy dx$ (i) $\int_0^2 \int_1^3 |x-2| \operatorname{sen} y dx dy$

(j) $\int_0^\pi \int_{-1}^{\cos y} x \operatorname{sen} y dx dy$ (k) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y dy dx$ (l) $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} (x \cos y - y \cos x) dy dx$

(m) $\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} xy dy dx$ (n) $\int_0^1 \int_0^x x \operatorname{sen} y dy dx$ (o) $\int_0^2 \int_1^2 \left(2xy - y^3\right) dy dx$

(p) $\int_0^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{4-2y^2}}^{\sqrt{4-2y^2}} y dx dy$ (q) $\int_0^2 \int_1^{e^x} dy dx$ (r) $\int_0^{\sqrt{2}/2} \int_y^{\sqrt{1-y^2}} xy dx dy$

(s) $\int_{-2}^1 \int_{x^2+4x}^{3x+2} dy dx$ (t) $\int_0^4 \int_{-\sqrt{4-y}}^{(y-4)/2} xy dx dy$ (u) $\int_0^1 \int_0^{x^2} \operatorname{sen}\left(x^3\right) dy dx$

3.1C Em cada caso esboce a região D e calcule a integral dupla $\iint_D f(x,y)\, dA$. Escolha a ordem de integração de modo a tornar o cálculo mais simples.

(a) $D: 0 \le x \le 1,\ 2x \le y \le 2;\ f = e^{y^2}$ (b) $D: 0 \le y \le 8,\ \sqrt[3]{y} \le x \le 2;\ f = xy$

(c) $D: x \ge 0,\ 1 \le x^2 + y^2 \le 2;\ f = x^2$ (d) $D: -1 \le x \le 2,\ -\sqrt{4-x^2} \le y \le 4 - x^2;\ f = 1$

3.1D Em cada caso, esboce a região D e calcule a integral dupla $\iint_D f(x,y)\, dA$. Utilize uma mudança de coordenadas, se necessário.

(a) D é a região triangular de vértices $(2,9)$, $(2,1)$ e $(-2,1)$; $f = xy^2$

(b) D é a região retangular de vértices $(-1,-1)$, $(2,-1)$ $(2,4)$ e $(-1,4)$; $f = 2x + y$

(c) D é a região delimitada por $8y = x^3$, $y = -x$ e $4x + y = 9$; $f = x$

(d) D é a região do 1^o quadrante delimitada por $x^2 + y^2 = 1$; $f = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

(e) D é a região triangular de vértices $(0,0)$, $(1,-1)$ e $(-1,4)$; $f = x^2 - y^2$

(f) D é a região delimitada por $y^2 = x$, $x = 0$ e $y = 1$; $f = \exp(x/y)$

(g) D é a região delimitada por $y = x^2/2$, e $y = x$; $f = x\left(x^2 + y^2\right)^{-1}$

(h) D é a região delimitada por $y = x$, $y = 0$, $x = 5$ e $xy = 16$; $f = 1$

(i) D é a região delimitada por $y = e^x$, $y = \ln x$, $x + y = 1$ e $x + y = 1 + e$; $f = 1$

(j) D é a região delimitada por $y = x^2$, $y = 0$ e $x + y = 2$; $f = xy$

3.1E Use coordenadas polares para calcular as seguintes integrais duplas:

(a) $\displaystyle\int_0^2 \int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}} x dx dy$ (b) $\displaystyle\int_1^2 \int_0^x \left(x^2+y^2\right)^{-1} dy dx$

(c) $\displaystyle\int_{-a}^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \exp\left(-x^2-y^2\right) dy dx$ (d) $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2} dA,\ D: 0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le x$

(e) $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\le 1} \left(x^2+y\right) dA$ (f) $\displaystyle\iint_D (x+y)\, dA,\ D: x^2+y^2-2y \le 0.$

3.1F Use a mudança de variável $u = x+y$ e $v = x-y$ e calcule a integral de $f(x,y) = (x+y)^2 \operatorname{sen}^2(x-y)$ sobre a região $D: |x|+|y| \le \pi$.

3.1G A fronteira da região D é o paralelogramo de vértices $(0,1)$, $(1,2)$ $(2,1)$, e $(1,0)$. Use a mudança de variáveis do exercício precedente e calcule a integral dupla sobre D da função $f(x,y) = (x-y)^2 \cos^2(x+y)$.

3.1H Ainda com a mudança de variável do Exercício 5.6 calcule a integral dupla da função $f(x,y) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{x-y}{x+y}\right)$ sobre a região D delimitada pelo quadrilátero de vértices $(1,1)$, $(2,2)$ $(4,0)$, e $(2,0)$.

3.1I Use a mudança de variáveis $u = xy,\ y = v$ e calcule a integral dupla $\iint_D \left(x^2+2y^2\right) dA$, sendo D a região do plano xy delimitada pelas curvas $xy = 1,\ xy = 2,\ y = |x|$ e $y = 2x$.

3.1J Use a mudança de variáveis $x = u - v,\ y = 2u - v$ e calcule a integral dupla $\iint_D xy dA$, sendo D a região do plano xy delimitada pelas retas $y = 2x,\ y = 2x-2,\ y = x$ e $y = x+1$.

3.1K Use a mudança de variáveis $u = \frac{1}{2}y,\ v = x - 2y$ e calcule a integral dupla da função $f(x,y) = \sqrt{x-2y} + y^2/4$, sobre a região D do plano xy delimitada pelo triângulo de vértices $(0,0), (4,0)$ e $(4,2)$.

3.1L Calcule a integral dupla de $f(x,y) = x^2$ sobre a região delimitada pela cardióide $r = 1 - \cos\theta$.

3.1M Use coordenadas polares e calcule a integral dupla $\iint_D \sqrt{x^2+y^2} dA$, sendo D a região do plano xy delimitada pelas curvas $y = \sqrt{2x - x^2}$ e $y = x$.

3.2 Áreas e Volumes

3.2A Por integração dupla calcule a área de um círculo de raio R e da elipse de semi-eixos a e b.

3.2B Em cada caso calcule, por integral dupla, a área da região D do plano xy delimitada pelas curvas indicadas:

(a) $D: x = 1,\ x = 2,\ y = -x^2$ e $y = 1/x^2$ (b) $D: x = 1,\ x = 4,\ y = -x$ e $y = \sqrt{x}$

(c) $D: y = x^2$ e $y = 2/\left(1+x^2\right)$ (d) $D: y^2 = -x,\ x - y = 4,\ y = -1$ e $y = 2$

(e) $D: y = 0,\ x + y = 3a$, e $y^2 = 4ax,\ a > 0$ (f) $D: y = e^x,\ y = \operatorname{sen} x,\ x = \pi$ e $x = -\pi$.

3.2C Por integração dupla, calcule a área da região compreendida entre a cardióide $r = a\,(1 + \operatorname{sen}\theta)$ e o círculo $r = a$.

3.2D Calcule a área da região delimitada pelas parábolas $x^2 = y,\ x^2 = 2y,\ y^2 = x$ e $y^2 = 2x$. (sugestão: use a mudança $x^2 = yu$ e $y^2 = xv$)

3.2E Calcule a área da região delimitada pelas retas $y = x$, e $y = 0$ e pelos círculos $x^2+y^2 = 2x$ e $x^2 + y^2 = 4x$.

3.2F Identifique a região D do plano xy cuja área vem dada pela expressão:

$$A\,(D) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{1}^{1+\cos\theta} r dr d\theta$$

e calcule o valor da área.

3.2G Calcule a área da região delimitada pelas parábolas $y^2 = 10x + 25$ e $y^2 = -6x + 9$.

3.2H Use integral dupla e calcule a área da região D indicada na figura:

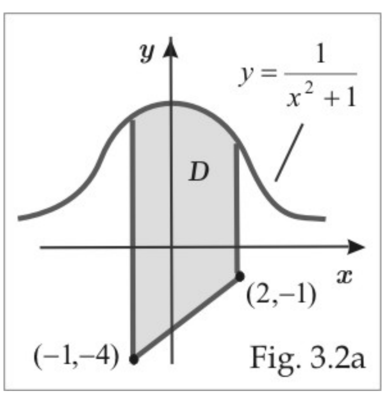

Fig. 3.2a

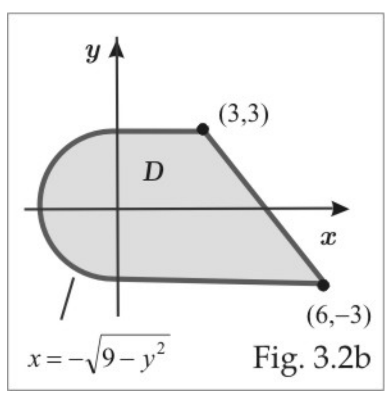

Fig. 3.2b

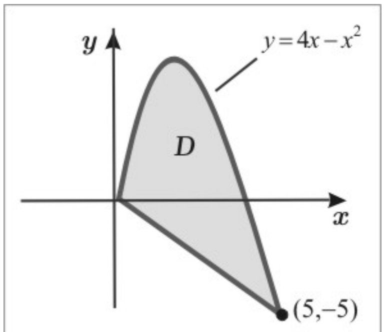

Fig. 3.2c

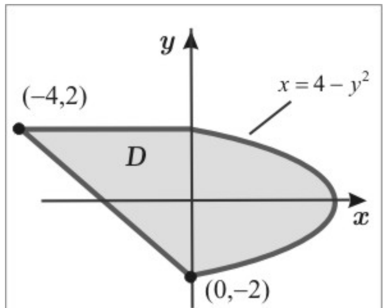

Fig. 3.2d

3.2I Calcule a área da região no primeiro quadrante delimitada pelas retas $y = x$, $y = 0$ e $x = 8$ e pela curva $xy = 16$.

3.2J Por integral dupla, calcule a área de um laço da curva descrita em coordenadas polares pela equação $r^2 = 9\cos 2\theta$.

3.2K Expresse a área da região D indicada como uma integral dupla iterada em coordenadas polares:

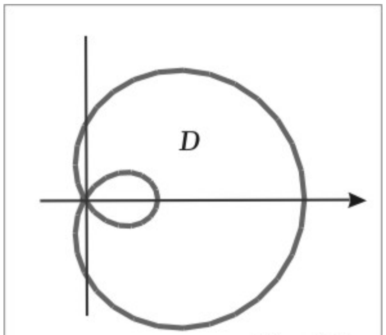

Fig. 3.3a

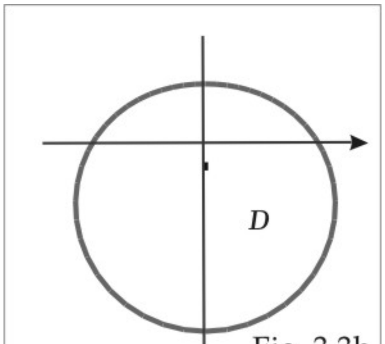

Fig. 3.3b

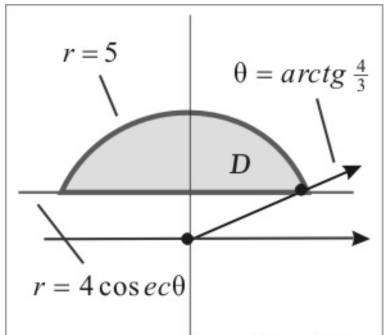

Fig. 3.3c

3.2L Calcule o volume do sólido delimitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $x + y + z = 1$.

3.2M A base de um sólido é a região do plano xy delimitada pelo disco $x^2 + y^2 \leq a^2$, $a > 0$, e a parte superior é a superfície do parabolóide $az = x^2 + y^2$. Calcule o volume do sólido.

3.2N Calcule o volume do sólido limitado inferiormente pelo plano xy, nas laterais pelas superfícies $y = 4 - x^2$ e $y = 3x$ e cuja parte superior jaz no plano $z = x + 4$.

3.2O Ao calcular o volume de um sólido Ω abaixo de um parabolóide e acima de uma certa região D do plano xy obteve-se a seguinte expressão:

$$\operatorname{vol}(\Omega) = \int_0^1 \int_0^y \left(x^2 + y^2\right) dxdy + \int_1^2 \int_0^{2-y} \left(x^2 + y^2\right) dxdy.$$

Identifique a região D, expresse $\operatorname{vol}(\Omega)$ por uma integral dupla iterada com a ordem invertida e, em seguida, calcule a integral.

3.2P Calcule o volume da região comum aos cilindros $x^2 + y^2 = a^2$ e $x^2 + z^2 = a^2,\ a > 0$.

3.2Q Um sólido Ω no primeiro octante tem seu volume calculado pela expressão:

$$\operatorname{vol}(\Omega) = \int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x - y)\, dydx.$$

Identifique o sólido e calcule o seu volume. Idem para:

$$\operatorname{vol}(\Omega) = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x)\, dydx.$$

3.2R Calcule o volume do sólido limitado pelo cilindro $x^2 + z^2 = 1$ e pelos planos $y = 0,\ z = 0$ e $y = x$.

3.2S Calcule o volume do sólido limitado pelo plano $z = 0$, pelo cilindro $x^2 + y^2 = 2x$ e pelo cone $x^2 + y^2 = z^2$.

3.2T Calcule o volume do sólido interior à esfera de centro na origem e raio $R = 5$ e exterior ao cilindro $x^2 + y^2 = 9$.

3.2U Calcule o volume do sólido interior ao cubo $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1$ e exterior ao parabolóide $x^2 + y^2 = z$.

3.2V Calucule o volume do sólido limitado pelos planos $y = 1$ e $z = 0$, pelo parabolóide $x^2 + y^2 = z$ e pelo cilindro $y = x^2$.

3.2W Verfique que o parabolóide $x^2 + y^2 = z$ divide o cilindro $x^2 + y^2 = 4,\ 0 \le z \le 4$, em dois sólidos de volumes iguais.

3.2X Calcule o volume da porção do elipsóide $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 16$ cortada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

3.2Y Calcule o volume da região interior à esfera $x^2+y^2+z^2=16$ e ao cilindro $x^2+y^2=4y$.

3.2Z Calcule o volume do sólido delimitado pelo parabolóide $x^2+y^2=z$ e pelos planos $z=0$ $z=16,$ $x=1$ e $x=3$.

Área de um a Superfície

Seja S uma superfície suave descrita por $z=f(x,y)\,,\ (x,y)\in D$, e representemos por dS a *área elementar*, isto é, a porção da superfície S que jaz acima do retângulo elementar dA de área $dxdy$. Usaremos a integral dupla para calcular a área da superfície S. Primeiro aproximamos o dS pela porção do plano tangente acima do dA (projeção do dS) e em seguida integramos sobre a região D. Veja a figura 3.4 abaixo.

Representamos por γ o ângulo entre os vetores $\vec{k}$ e $\vec{n}$, sendo $\vec{n}$ a normal unitária exterior à superfície S. Temos que $\vec{n}=f_x\vec{i}+f_y\vec{j}-\vec{k}$ e, portanto, $\cos\gamma=(\vec{k}\cdot\vec{n})/||\vec{n}||=(1+f_x^2+f_y^2)^{-1/2}$. Assim, $dS=dA\cos\gamma=\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\ dxdy$ e teremos:

$$A(S)=\iint_D\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\ dxdy.$$

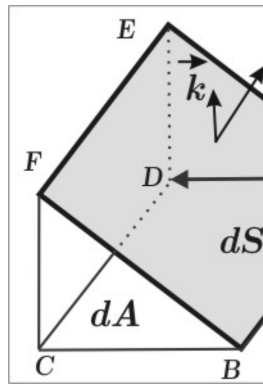

Fig. 3.4

3.3 Massa, Centro de Massa e Momento de Inércia

8.3A Calcule a massa de um disco de raio a, se a densidade no ponto (x,y) do disco é proporcional ao quadrado da distância a um ponto da circunferência.

8.3B Uma lâmina tem a forma de um triângulo retângulo isóceles com lados iguais de comprimento a. A densidade de massa por área em cada ponto da lâmina é diretamente proporcional ao quadrado da distância do ponto ao vértice oposto à hipotenusa. Determine o centro de massa da lâmina.

3.3C Determine a massa, o centro de massa e os momentos de inércia $I_x,\ I_y$ da lâmina de densidade $\sigma(x,y)$ e formato D :

(a) $D : y = \sqrt{x},\ x = 9,\ y = 0;\ \sigma = x + y$ (b) $D : y = \sqrt[3]{x},\ x = 8,\ y = 0;\ \sigma = y^2$

(c) $D : y = x^2,\ y = 4;\ \sigma = ky$ (d) $D : x^2 + y^2 = 1;\ \sigma = |x|$

3.3D Uma lâmina tem a forma da região D do plano xy delimitada pela parábola $x = y^2$ e pela reta $x = 4$. Determine o centro de massa da lâmina, se a densidade de massa por área em cada ponto da lâmina é proporcional à distância do ponto ao eixo y.

3.3E Uma lâmina homogênea, isto é, com densidade constante, tem a forma de um quadrado de lado a. Determine o momento de inércia com relação a um lado, a uma diagonal e ao centro de massa.

3.4 Integrais Duplas Impróprias

As integrais duplas dos Exercícios 8.4A, 8.4B e 8.4C diferem daquelas tratadas até o momento em dois aspectos:

(i) ou a região de integração D não é limitada;

(ii) ou a função $f(x, y)$ que se deseja integrar é descontínua ou torna-se ilimitada na região D. Nesses casos a integral dupla recebe a denominação de *integral imprópria*.

3.4A Calcule as seguintes integrais impróprias:

(a) $\displaystyle\int\int_{x^2+y^2\le 1} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ (b) $\displaystyle\int\int_{x^2+y^2\le 1} \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ (c) $\displaystyle\int\int_{x^2+y^2\le 1} \ln\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$

(d) $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 \frac{dxdy}{\sqrt{xy}}$ (e) $\displaystyle\int_0^\infty\int_0^\infty x^2 e^{-x^2-y^2}\,dxdy$ (f) $\displaystyle\int\int_{x^2+y^2\ge 1} \frac{dxdy}{1+x^2+y^2}$

(g) $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dxdy$ (h) $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 \frac{dxdy}{\sqrt{|x-y|}}$ (i) $\displaystyle\iint_D e^{x/y};\ D : 0 \le x \le y^2,\ 0 \le y \le 1$

3.4B Use o resultado do Exercício 5.45(g) e deduza que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.

3.4C Mostre que a função $f(x, y) = 1/(x - y)$ não é integrável em $D : 0 \le y < x \le 1$, embora seja contínua neste conjunto. Este exemplo mostra que *não basta ser contínua para ser integrável.*

3.5 Integral Tripla

O cálculo de integrais triplas se reduz ao cálculo de uma integral dupla seguida de uma integral simples e, dependendo da região de integração, a integral pode ser calculada de forma iterada como três integrais simples. A seguir mostra-se algumas situações para o cálculo da integral $\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dV$.

(a) $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ (x,y) \in D \text{ e } \varphi(x,y) \le z \le \psi(x,y)\right\}.$

Nesse caso D é a projeção no plano xy da região de integração Ω e o cálculo da integral tripla se reduz a:

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dV = \iint_D \left[\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right] dA.$$

(b) $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ a \le x \le b,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x) \text{ e } p(x,y) \le z \le q(x,y)\right\}.$

Nesse caso a integral tripla é calculada como uma integral iterada:

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dV = \int_a^b \left\{\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \left[\int_{p(x,y)}^{q(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right] dy\right\} dx.$$

Naturalmente, uma mudança na descrição da região Ω acarretará inversões na ordem de integração.

3.5A Expresse a integral tripla $\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dV$ como uma integral iterada e, em seguida, calcule o seu valor no caso em que $f(x,y,z) = xyz$ e a região Ω é descrita por:

(a) $-1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1,\ 1 \le z \le 2$ (b) $-\sqrt{y} \le x \le \sqrt{y},\ 0 \le y \le 4,\ 0 \le z \le 4-y$

(c) $0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le 1,\ 0 \le z \le x+y$ (d) $0 \le x \le z^2,\ x-z \le y \le x+z,\ 1 \le z \le 2.$

3.5B Escreva cada uma das integrais abaixo na ordem $dzdydx$:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \int_1^3 \int_4^5 f(x,y,z)\,dxdydz$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^y \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x,y,z)\,dzdxdy$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{\sqrt{(z-1)^2-y^2}} f(x,y,z)\,dxdydz$ (d) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{1-z-y} f(x,y,z)\,dxdydz$

3.5C Descreva o sólido Ω do $\mathbb{R}^3$, cujo volume é:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{1-z}}^{\sqrt{4-z}} \int_2^3 dxdydz$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \int_{z^3}^{\sqrt{z}} \int_0^{4-x} dydxdz$ (c) $\displaystyle\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} \int_0^{x+y} dzdydx$

(d) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{3x} \int_0^1 dzdydx$ (e) $\displaystyle\int_1^2 \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} \int_{-\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{z-x^2}} dydxdz$ (f) $\displaystyle\int_1^4 \int_{-z}^{z} \int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} dxdydz$

3.5D Em cada caso identifique o sólido Ω e calcule seu volume por integração tripla.

(a) Ω é delimitado pelo cilindro $y = x^2$ e pelos planos $y + z = 4$ e $z = 0$;

(b) Ω é delimitado pelo cilindro $z = 1 - y^2$ e pelos planos $x = z,\ x = 0$ e $y = 0$;

(c) Ω é delimitado pelos cilindros $z = 3x^2$ e $z = 4 - x^2$e pelos planos $y + z = 6$ e $y = 0$;

(d) Ω é a interseção dos parabolóides $z \leq 1 - x^2 - y^2$ e $z \geq x^2 + y^2 - 1$;

(e) Ω é delimitado pelos cilindros $x = y^2$ e $y^2 = 2 - x$ e pelos planos $z = 5 + x + y$ e $z = 0$;

(f) Ω é a interseção da bola $x^2 + y^2 + z^2 \leq 6$ com o parabolóide $z \geq x^2 + y^2$;

(g) Ω é delimitado pelo plano xy e pelas superfícies $x^2 + y^2 = 2x$ e $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

3.5E Em cada caso calcule o volume do sólido descrito pelas desigualdades.

(a) $0 \leq x \leq z \leq 1 - y^2$ (b) $x^2 + 4y^2 \leq 4$ e $x + y \leq z \leq x + y + 1$ (c) $x^2 + y^2 \leq z \leq 1 - x^2$

(d) $x^2 + y^2 \leq z \leq 2x$ (e) $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 6 - x^2 - y^2$ (f) $0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}$

3.6 Mudança de Coordenadas

Consideremos uma transformação (mudança de coordenadas) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ com jacobiano diferente de zero:

$$T : \begin{cases} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = x(u, v, w) \end{cases} \qquad \text{com } J(T) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \neq 0.$$

Representemos por D^* a imagem da região D pela tranformação T, como sugere a figura abaixo.

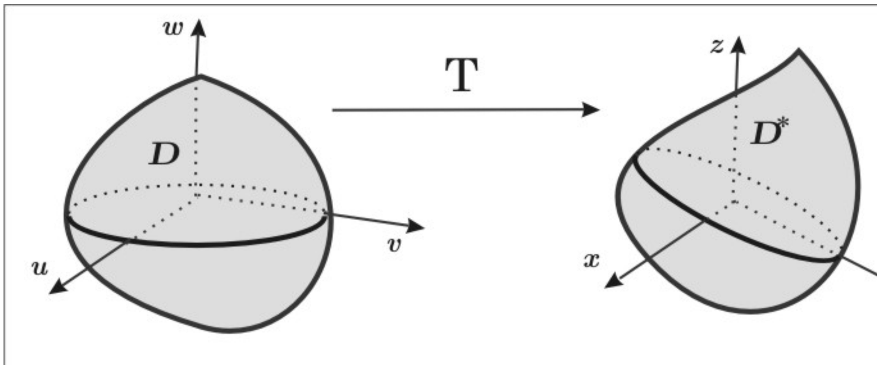

Fig. 3.5

Temos a seguinte fórmula de mudança de coordenadas em integral tripla:

$$\boxed{\iiint_{\Omega^*} f(x, y, z)\, dxdydz = \iiint_{\Omega} f[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)]\, |J(T)|\, dudvdw}$$

Consideremos dois casos especiais:

(a) Coordenadas Cilíndricas

Nesse caso a transformação T é definida por: $x = r\cos\theta,\ y = r \operatorname{sen}\theta$ e $z = z$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, com jacobiano $J = r$. Assim, a fórmula de mudança de coordenadas fica:

$$\boxed{\iiint_{T(\Omega)} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_{\Omega} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z)\,rdrd\theta dz}$$

(b) Coordenadas Esféricas

Nesse caso a transformação T é definida por: $x = \rho\operatorname{sen}\varphi\cos\theta,\ y = \rho\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta$ e $z = \rho\cos\varphi$, $0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq \varphi \leq \pi$, com jacobiano $|J| = \rho^2\operatorname{sen}\varphi$. Assim, a fórmula de mudança de coordenadas fica:

$$\boxed{\iiint_{T(\Omega)} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_{\Omega} f(\rho\operatorname{sen}\varphi\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta, \rho\cos\varphi)\,\rho^2\operatorname{sen}\varphi drd\theta dz}$$

3.6A Calcule o volume do sólido delimitado por uma esfera de raio R. Calclule a integral tripla de duas maneiras: primeiro use coordenadas cilíndricas e, depois, coordenadas esféricas.

3.6B Calcule o volume do elipsóide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \leq 1$. (veja o Exercício 7.17)

3.6C Use coordenadas cilíndricas e calcule as seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}}\int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} zdzdxdy$ (b) $\displaystyle\int_0^2\int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}}\int_0^{x^2+y^2}\left(x^2+y^2\right)dzdydx$

(c) $\displaystyle\iiint_{\Omega} xydV;\ \Omega : x^2+y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1$ (d) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2-x^2}}\int_0^1 xdzdydx$

3.6D Use coordenadas esféricas e calcule as seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\int_{-2}^2\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}}\left(x^2+y^2+z^2\right)dzdydx$

(b) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}}\int_y^{\sqrt{4-y^2}}\int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}}\sqrt{x^2+y^2+z^2}dzdxdy.$

3.6E Usando uma mudança de coordenadas adequada, calcule o volume do sólido Ω nos seguintes casos:

(a) Ω é delimitado pelo parabolóide $x^2 + y^2 = az$, pelo plano $z = 0$ e pelo cilindro $x^2 + y^2 = 2ax,\ a > 0$;

(b) Ω é delimitado pelos parabolóides $x^2 + y^2 = z$ e $x^2 + y^2 + 1 = 2z$;

(c) Ω é delimitado acima pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2$ e abaixo pelo parabolóide $x^2 + y^2 = az,\ a > 0$;

(d) Ω é a intersecção da bola $x^2 + y^2 + (z-1)^2 \le 1$ com o cone $x^2 + y^2 \le z^2,\ z \ge 0$;

(e) Ω é delimitado pelo parabolóide $-2\left(x^2 + y^2\right) = z$ e pelo plano $z = -4$;

(f) Ω é interior à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4y$, limitado superiormente pelo cone $x^2 + z^2 = y^2$;

(g) Ω é interior à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e exterior ao cone $x^2 + y^2 = z^2$;

(h) Ω é a calota intersecçaõ da bola $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$ com o semi-espaço $z \ge a,\ 0 < a < R$;

(i) Ω é a intersecção da bola $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$ com o cilindro $x^2 + y^2 \le a^2,\ 0 < a < R$.

3.6F Faz-se um orifício circular em uma esfera, o eixo do orifício coincidindo com o eixo da esfera. O volume do sólido resultante vem dado por:

$$\boxed{V = 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}\int_1^{\sqrt{4-z^2}} r\,dr\,dz\,d\theta}$$

Por observação da integral determine o raio do orifício e o raio da esfera. Calcule o valor de V.

3.7 Massa, Centro de Massa e Momento de Inércia

Consideremos um sólido Ω cuja *densidade volumétrica* é representada pela função $\sigma(x, y, z)$. Quando a densidade for a mesma em cada ponto do sólido, este será denominado *sólido homogêneo*. Por definição, a densidade é igual a massa por unidade de volume e, denotando a massa e o volume de Ω, respectivamente por m e V, temos a seguinte fórmula: $\sigma = \dfrac{m}{V}$. Como ocorreu com a integral dupla, se a funçaõ $f(x, y, z)$ for identificada com a densidade do sólido Ω, então a integral tripla $\iiint_\Omega f(x, y, z)\, dV$ será interpretada como a massa de Ω. De fato essa interpretação segue integrando sobre Ω a relação $dm = \sigma dV$.

Procedendo como no caso bidimensional, em que o objeto foi interpretado como uma lâmina plana, para um sólido Ω as coordenadas do *centro de massa* são calculadas pelas fórmulas:

$$\overline{x} = \frac{1}{m}\iiint_\Omega x\sigma dV, \quad \overline{y} = \frac{1}{m}\iiint_\Omega y\sigma dV \quad \text{e} \quad \overline{z} = \frac{1}{m}\iiint_\Omega z\sigma dV$$

e o *momento de inércia* em relação a um eixo L é calculado por:

$$I_L = \iiint_\Omega \sigma(x,y,z)\,\delta^2 dV,$$

sendo $\delta = \delta(x,y,z)$ a distância do ponto $P(x,y,z)$ do sólido Ω ao eixo L. No caso em que o eixo L é o eixo coordenado x, y ou z, deduz-se facilmente as seguintes fórmulas para os momentos de inércia I_x, I_y e I_z :

$$I_x = \iiint_\Omega \left(y^2+z^2\right)\sigma dV, \quad I_y = \iiint_\Omega \left(x^2+z^2\right)\sigma dV \quad \text{e} \quad I_z = \iiint_\Omega \left(x^2+y^2\right)\sigma dV.$$

3.7A Calcule a massa de uma bola de raio R, se densidade de massa é diretamente proporcional à distância r ao centro da esfera. Qual seria a massa da bola, se a densidade fosse inversamente proporcional à r?

3.7B Determine a massa do sólido delimitado pelo cone $z^2 = x^2+y^2,\ 0 \le z \le 4$, se a densidade em um ponto P do cone é proporcional à distância do ponto P ao eixo z.

3.7C Calcule a massa do sólido cortado da bola $x^2+y^2+z^2 \le 4$ pelo cilindro $x^2+y^2 = 2y$, se a densidade no ponto P é proporcional à distácia de P ao plano xy.

3.7D Para uma altitude z de dez mil metros, a desnsidade σ (em kg/m^3) da atmosfera terrestre é aproximada por $\sigma = 1.2 - \left(1.05\times10^{-4}\right)z + \left(2.6\times10^{-9}\right)z^2$. Estime a massa de uma coluna de ar de 10 quilômetros de altura com base circular de 3 metros de raio.

3.7E Determine o centro de massa do hemisfério $x^2+y^2+z^2 \le R^2,\ z \ge 0$, se a densidade volumétrica é $\sigma = kz$.

3.7F Calcule o momento de inércia em relação ao seu eixo de um cilindro circular reto de altura H e raio R, se a densidade σ no ponto (x,y,z) é $\sigma(x,y,z) = k\sqrt{x^2+y^2}$.

3.7G Mostre que o *centróide*[1] do hemisfério $0 \le z \le \sqrt{R^2-x^2-y^2}$ é o ponto $C(0,0,3R/8)$.

3.7H Um sólido tem a forma da região interna ao cilindro $r = a$, interior à esfera $r^2+z^2 = 4a^2$ e acima do plano xy. A densidade em um ponto P do sólido é proporcional à sua distância ao plano xy. Calcule a massa e o momento de inércia I_z do sólido.

[1] centróide é a denominação dada ao centro de massa de um sólido homogêneo com densidade $\sigma = 1$.

3.7I Um sólido esférico de raio a tem densidade em cada ponto proporcional à distância do ponto a uma reta fixa L que passa pelo seu centro. Calcule a massa do sólido.

3.7J Calcule o volume e o centróide do sólido delimitado acima pela esfera $\rho = a$ e abaixo pelo cone $\varphi = \beta,\ 0 < \beta < \pi/2$.

Respostas & Sugestões

Exercícios 3.1

3.1A Recorde-se que a ordem de integração $dydx$ é adequada à regiões do tipo $D : a \leq x \leq b;\ \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)$ **3.1B** (a) $1/2$ (b) $\frac{1}{2}\operatorname{sen}\pi^2$ (c) -36 (d) 1 (e) 0 (f) $\frac{5}{2} - 6\sqrt{2}$ (g) $\frac{e}{2} - 1$ (h) $\frac{e-1}{2}$ (i) $1 - \cos 2$ (j) $-\frac{2}{3}$ (k) $\frac{1}{3}$ (l) 0 (m) xx (n) $\frac{3}{2} - \operatorname{sen} 1 - \cos 1$ (o) $-\frac{3}{2}$ (p) $\frac{8}{3}$ (q) $e^2 - 1$ (r) $\frac{1}{16}$ (s) $\frac{9}{2}$ (t) $-\frac{8}{3}$ (u) $\frac{1}{3}(1 - \cos 1)$ **3.1C** (a) $\frac{1}{4}\left(e^4 - 1\right)$ (b) 16 (c) $\frac{3\pi}{8}$ (d) $9 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{4\pi}{3}$ **3.1D** (a) $\frac{1504}{5}$ (b) $\frac{75}{2}$ (c) $\frac{209}{30}$ (d) $\frac{\pi}{6}$ (e) -3 (f) $\frac{1}{2}$ (g) $\ln 2$ (h) $8 + 16\ln\frac{5}{4}$ (i) $\frac{1}{2}e^2 + e - 3$ (j) $\frac{7}{24}$ **3.1E** (a) 0 (b) $\frac{\pi}{4}\ln 2$ (c) $\frac{\pi}{2}[1 - \exp\left(-a^2\right)]$ (d) $\frac{9}{2}(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}))$ (e) $\frac{\pi}{4}$ (f) $\frac{3\pi}{8}$ **3.1F** $\pi^4/3$ **3.1G** $\frac{1}{3} + \frac{\operatorname{sen} 6 - \operatorname{sen} 2}{12}$ **3.1H** $3 - 3\cos 1$ 5.9 $\frac{15}{8}$ **3.1J** 7 **3.1K** $74/15$ **3.1L** $49\pi/32$ **3.1M.** $\frac{1}{9}(16 - 10\sqrt{2})$.

Exercícios 3.2

3.2A πR^2 e πab **3.2B** (a) $\frac{17}{6}$ (b) $\frac{73}{6}$ (c) $\pi - \frac{2}{3}$ (d) $\frac{33}{2}$ (e) $\frac{10a^2}{3}$ (f) $e^{\pi} - e^{-\pi}$ **3.2C** $2a^2 + \frac{\pi a^2}{4}$ **3.2D** $\frac{1}{3}$ **3.2E** $\frac{3\pi}{4} + \frac{3}{2}$ **3.2F** $2 + \pi/4$ **3.2G** $\frac{16\sqrt{15}}{3}$ **3.2H** (a) $\frac{\pi}{4} + \frac{15}{2} + \operatorname{arctg} 2$ (b) $\frac{9\pi}{2} + 27$ (c) $\frac{125}{6}$ (d) $\frac{56}{3}$ **3.2I** $8 + 16\ln 2$ **3.2J** $9/2$ **3.2K** (a) $\int_0^{2\pi}\int_0^{1+2\cos\theta} r dr d\theta$ (b) $\int_0^{2\pi}\int_0^{3-\operatorname{sen}\theta} r dr d\theta$ (c) $2\int_{\operatorname{arctg} 4/3}^{\pi/2}\int_{4\operatorname{cosec}\theta}^{5} r dr d\theta$ **3.2L** $\frac{1}{6}$ **3.2M** $\frac{\pi a^3}{2}$ **3.2N** $\frac{625}{12}$ **3.2O** $\frac{5}{6}$ **3.2P** $16a^3/3$ **3.2Q** $\frac{1}{6}$ e $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}$ **3.2R** $\frac{1}{3}$ **3.2S** $\frac{64}{9}$ **3.2T** $\frac{256\pi}{3}$ **3.2U** $\frac{2}{3}$ **3.2V** $\frac{88}{105}$ **3.2W** $\frac{\pi}{3}(64 - 24\sqrt{3})$ **3.2X** $\frac{128}{9}(3\pi - 4)$ **3.2Z** $480\sqrt{15}$.

Exercícios 3.3

3.3A $3k\pi a^4/2$ **3.3B** $C_M(\frac{2a}{5}, \frac{2a}{5})$ **3.3C** (a) $M = \frac{2349}{20}$; $C_M(6.35, 0.41)$; $I_x = 269,04$; $I_y = 5194,13$ (b) $M = \frac{32}{3}$; $C_M(8/3, 12/7)$; $I_x = 32$ $I_y = \frac{1024}{9}$ (c) $M = \frac{128k}{5}$; $C_M(0, 5/7)$; $I_x = 512k/7$; $I_y = 512k/21$ (d) $M = \frac{4}{3}$; $C_M(0,0)$; $I_x = \frac{4}{15}$; $I_y = 2/3$ **3.3D** $C_M(\frac{20}{7}, 0)$ **3.3E** $I_L = \sigma a^4/3$; $I_D = \sigma a^5/6$ e $I_{\mathcal{O}} = 2\sigma a^4/3$.

Exercícios 3.4

3.4A (a) 2π (b) 2π (c) $-\pi$ (d) 4 (e) $\frac{\pi}{8}$ (f) ∞ (g) π (h) $8/3$ (i) $1/2$.

Exercícios 3.5

3.5A (a) $\frac{7}{8}$ (b) 0 (c) $\frac{671}{4320}$ (d) $\frac{1022}{27}$ **3.5D** (a) $\frac{256}{15}$ (b) $\frac{4}{15}$ (c) $\frac{304}{15}$ (d) π (e) $\frac{32}{3}$ (f) $2\pi(2\sqrt{6} - \frac{11}{3})$ (g) $\frac{32}{9}$ **3.5E** (a) $\frac{8}{15}$ (b) $\frac{64}{9} - \frac{3\pi}{2}$ (c) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ (d) 2π.

Exercícios 3.6

3.6A $\frac{4}{3}\pi R^3$ **3.6B** $\frac{4}{3}\pi abc$ **3.6C** (a) $\frac{7\pi}{16}$ (b) $\frac{10\pi}{3}$ (c) 0 (d) $\frac{1}{3}$ **3.6D** (a) $\frac{256\pi}{5}(\sqrt{2}-\frac{1}{2})$ (b) $\frac{\pi R^4}{16}$ **3.6E** (a) $\frac{3\pi a^3}{2}$ (b) $\frac{\pi}{4}$ (c) $\frac{4\pi a^3}{3}(\sqrt{2}-\frac{7}{8})$ (d) π (e) 4π (f) $\frac{8\pi}{3}$ (g) $\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$ (h) $\frac{\pi}{3}(2R^3+a^3)-\pi R^2 a$ (i) $\frac{4\pi}{3}[R^3-(R^2-a^2)^{3/2}]$ **3.6F** $r=1;\ R=2$ e $V=4\pi\sqrt{3}$.

Exercícios 3.7

3.7A $k\pi R^4$ e $2k\pi R^2$ **3.7B** $\frac{128k\pi}{3}$ **3.7C** $\frac{29k\pi}{32}$ **3.7D** $M \simeq 108\times 10^{-6}$ **3.7E** $C_M(0,0,\frac{8R}{15})$ **3.7F** $\frac{2k\pi}{5}HR^5$ **3.7G** $C_M(0,0,\frac{3R}{8})$ **3.7H** $\frac{5k\pi}{6}a^6$ **3.7I** Considerando uma mudança de base, se necessário, não há perda de generalidade em admitir que tal reta L é o eixo z. Nesse caso, $\sigma = k\sqrt{x^2+y^2}$ e, portanto:

$$Massa = k\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a}\rho^3(\operatorname{sen}\varphi)^2 d\rho d\varphi d\theta = \frac{k\pi^2 a^4}{4}.$$

3.7J $vol\,(\Omega) = \frac{2\pi a^3}{3}\,(1-\cos\beta)\,.$