1. Campos Escalares

1.1 Domínios e Regiões

1.1A Esboce a região $\mathcal{R}$ do plano $\mathbb{R}^2$ dada abaixo e determine sua fronteira. Classifique $\mathcal{R}$ em: aberto (A), fechado (F), limitado (L), compacto (K), ou conexo (C).

(a) $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y \geq 0\}$

(b) $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0 \text{ e } x^2 + y^2 < 1\}$

(c) $\mathcal{R} =]1,2[\times [0,+\infty[$

(d) $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 1 < x^2 + y^2 \leq 2\}$

(e) $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 4 < x^2 < 9\}$

(f) $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 < x \text{ e } 1 \leq y \leq 2\}$

(g) $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x < y\}$

(h) $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ |x| \leq 1,\ -1 \leq y < 2\}$

(i) $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 4x^2 + y^2 \geq 9\}$

(j) $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \operatorname{sen} x \leq y \leq \cos x,\ 0 \leq x \leq \pi/4\}$

(k) $\mathcal{R} = [0,1] \times [1,2]$

(l) $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ |x| + |y| \leq 1\}$

(m) $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 1 \leq x^2 - y^2\}$

(n) $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ (x^2 + y^2 - 1)\, y < 0\}$

(o) $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^3 < y\}$

(p) $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ |x| \leq 2 \text{ e } 1 < x^2 + y^2\}$

(q) $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 < y^2\}$

(r) $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ |x| + |y| \leq 2 \text{ e } 1 < x^2 + y^2\}$

1.2B Em cada caso determine e represente graficamente o *domínio* da função $z = f(x,y)$.

(a) $z = \sqrt{y - x^2} + \sqrt{2x - y}$

(b) $z = \sqrt{|x| - |y|}$

(c) $4x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \leq 0$

(d) $z = \ln\left(1 - 4x^2 - y^2/9\right)$

(e) $z = \sqrt{\ln(x^2 + y^2 - 3)}$

(f) $z = x \exp(y) - \ln x$

(g) $z = \arccos(y - x)$

(h) $z = \sqrt{(x-3)(y-2)}$

(i) $z = \arcsin[x/(x-y)]$

(j) $z = \dfrac{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$

(k) $z = \dfrac{x - y}{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y}$

(l) $z = \sqrt{\dfrac{x^2 - 1}{y^2 - 1}}$

1.1C Esboce a região $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ (x^2 + y^2 - 1)\left[(x-1)^2 + y^2 - 1\right] < 0\}$, verifique que ela é aberta e determine sua fronteira.

1.1D Em cada caso esboce algumas curvas de nível função $z = f(x,y)$, de modo a obter uma visualização do seu gráfico.

(a) $z = x^2 + y^2$ (b) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (c) $z = \left(x^2 + y^2\right)^{-1}$

(d) $z = \ln\left(1 + x^2 + y^2\right)$ (e) $z = x + y$ (f) $z = \operatorname{sen}(x - y)$

(g) $z = |x| - |y|$ (h) $z = 8 - x^2 - 2y$ (i) $z = 2x\left(x^2 + y^2\right)^{-1}$

(j) $z = xy$ (k) $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ (l) $z = \sqrt{1 - x^2/4 - y^2/9}$

(m) $z = |x - y|$ (n) $z = x + y^2$ (o) $z = x - y^2$

1.1E Identifique e esboce a curva de nível da função $z = 2y - 4x^3$ que passa no ponto $P\,(1, 2)$. Observe o comportamento da função ao longo da tangente que passa no ponto P.

1.1F Identifique as superfícies de nível da função $w = x^2 + y^2 + z^2$, nos níveis 0, 1 e 2.

1.1G Identifique a superfície de nível da função $w = x^2 + y^2 - z^2$ que passa no ponto $P\,(1, 1, 1)$.

1.1H Esboce o gráfico da função $z = f\,(x, y)$ dada por:

(a) $f\,(x, y) = 3$ (b) $f\,(x, y) = x$ (c) $f\,(x, y) = 1 - x - y$

(d) $f\,(x, y) = \operatorname{sen} y$ (e) $f\,(x, y) = \exp(\sqrt{x^2 + y^2})$ (f) $f\,(x, y) = 3 - x^2 - y^2$

(g) $f\,(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$ (h) $f\,(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - 16y^2}$ (i) $f\,(x, y) = \left(x^2 + y^2\right)^{-1/2}$

(j) $f\,(x, y) = 1 - x^2$ (k) $f\,(x, y) = \log(\sqrt{x^2 + y^2})$ (l) $f\,(x, y) = \operatorname{sen}(x^2 + y^2)$.

1.1I Descreva as superfícies de nível da função $w = f\,(x, y, z)$.

(a) $f\,(x, y, z) = x + 3y + 5z$ (b) $f\,(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 5z^2$

(c) $f\,(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2$ (d) $f\,(x, y, z) = x^2 - y^2$.

1.2 Limite e Continuidade

1.2A Considere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por: $f\,(x, y) = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$, se $(x, y) \neq (0, 0)$ e $f\,(0, 0) = 0$. Mostre que: $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\,(1 + \Delta x, 1) - f\,(1, 1)}{\Delta x} = 0$ e $\displaystyle\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f\,(0, \Delta y) - f\,(0, 0)}{\Delta y} = 0$.

1.2B Em cada caso, mostre que a função $z = f\,(x, y)$ não tem limite quando $(x, y) \to (0, 0)$:

(a) $z = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$ (b) $z = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ (c) $z = \dfrac{|x|}{x-y^3}$ (d) $z = \dfrac{xy}{2x^2+3y^2}$

(e) $z = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ (f) $z = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ (g) $z = \dfrac{x^6}{(x^3+y^2)^2}$ (h) $z = \dfrac{xy\,(x-y)}{x^4+y^4}$

(i) $z = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y}$ (j) $z = \dfrac{x^2y^2}{x^3+y^3}$ (k) $z = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ (l) $z = \dfrac{x^4+y^2+2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$.

1.2C Verifique que a função $f(x,y,z) = \dfrac{x^2+y^2-z^2}{x^2+y^2+z^2}$ não tem limite na origem.

1.2D Calcule os seguintes limites:

(a) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \ln(xy+1)$ (b) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{(y^2-1)\operatorname{sen} x}{x}$ (c) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\operatorname{sen}(xy)}{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}$

(d) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1-\cos\sqrt{xy}}{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}$ (e) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 2}} \operatorname{arctg}(y/x)$ (f) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\exp\operatorname{sen}(x^2y)+\cos y}{\cos(xy)}$

(g) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}} z\operatorname{sen}\left[(x^2y^2+z^2)^{-1/2}\right]$ (h) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to -2\\ y\to 4}} y\sqrt{x^3+2y}$ (i) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to \pi}} [x\cos(y/4)+1]^{2/3}$

1.2E Use a definição de limite e prove que:

(a) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 3}} (2x+3y) = 11$ (b) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} (3x^2+y) = 5$ (c) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} (x^2+y^2) = 2$

(d) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 1\\ z\to 1}} (2x+y+z) = 4$ (e) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 3}} (2x^2-y^2) = -1$ (f) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 3\\ y\to -1}} (x^2+y^2-4x+2y) = -4$

(g) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} (x^2-1) = 0$ (h) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}} \frac{y^3+xz^2}{x^2+y^2+z^2} = 0$ (i) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x+y)\operatorname{sen}(1/x) = 0$

(j) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = 0$ (k) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to -2}} (x^2-y^2) = -3$ (l) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} \frac{2(x-1)^2(y-2)}{3(x-1)^2+3(y-2)^2} = 0$

1.2F Mostre que:

(a) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1-\cos\sqrt{xy}}{x} = 0$ (b) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}} = 2$ (c) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{|x|+|y|}{x^2+y^2} = \infty.$

1.2G Mostre que as funções $f(x,y) = \dfrac{xy}{y-x^3}$ e $g(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2-y^2}$ não têm limite na origem.

1.2H Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \dfrac{3x^4y^4}{(x^4+y^2)^3}$. Calcule os limites de $f(x,y)$ quando $(x,y)\to(0,0)$, ao longo dos seguintes caminhos: (a) eixo x; (b) reta $y=x$; (c) curva $y=x^2$. A função f tem limite na origem? Por quê?

1.2I Verifique se a função $z = f(x,y)$ é contínua no ponto P_0 indicado.

(a) $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$, $P_0(-3,4)$ (b) $z = \exp(-xy)\ln\left(7 + x^2 - 2y\right)$, $P_0(0,0)$

(c) $z = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, $P_0(0,0)$ (d) $z = \dfrac{xy}{y-2x}$, se $y \neq 2x$ e $f(x,2x) = 1$, $P_0(1,2)$

1.2J Identifique a função $z = f(x,y)$ como combinação de funções elementares do cálculo e deduza que ela é contínua em seu domínio.

(a) $f(x,y) = \sqrt{xy}$ (b) $f(x,y) = \dfrac{4x^2 - y^2}{2x - y}$ (c) $f(x,y) = \dfrac{x}{y^2 - 1}$

(d) $f(x,y) = \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2}$ (e) $f(x,y) = \operatorname{arcsen}(y/x)$ (f) $f(x,y) = \ln(xy - 2)$

1.2K Discuta a continuidade das seguintes funções:

(a) $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x - y}$, se $x \neq y$ e $f(x,x) = 1$

(b) $f(x,y) = \exp\left[1/\left(x^2+y^2-1\right)\right]$, se $x^2+y^2 < 1$ e $f(x,y) = 0$, se $x^2+y^2 \geq 1$

(c) $f(x,y) = \dfrac{\exp\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}$, se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = 1$

(d) $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}(x+y)}{x+y}$, se $x + y \neq 0$ e $f(x,-x) = 1$

(e) $f(x,y,z) = \dfrac{xz - y^2}{x^2+y^2+z^2}$, se $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ e $f(0,0,0) = 0$

(f) $f(x,y) = 4x^2 + 9y^2$, se $4x^2 + 9y^2 \leq 1$ e $f(x,y) = 0$, se $4x^2 + 9y^2 > 1$

(g) $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$, se $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ e $f(x,y,z) = 0$, se $x^2+y^2+z^2 > 1$

1.2L Considere as funções g e h definidas em $\mathbb{R}^2$ por:

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad \text{e} \quad h(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Verifique que a origem é uma descontinuidade de $g(x,y)$ e de $h(x,y)$. Em que caso a descontinuidade pode ser removida? Recorde-se que *remover* uma descontinuidade significa redefinir a função de modo a torná-la contínua.

1.2M Verifique que a origem é uma descontinuidade da função:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}\left(x^2+y^2\right)}{1 - \cos\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Essa descontinuidade pode ser removida?

1.2N Sabendo que: $1 - \dfrac{x^2y^2}{3} \leq \dfrac{\operatorname{arctg}(xy)}{xy} < 1$ e $2|xy| - \dfrac{x^2y^2}{6} < 4 - 4\cos\sqrt{|xy|} < 2|xy|$, calcule os seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\operatorname{arctg}(xy)}{xy}$ (b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{4 - 4\cos\sqrt{|xy|}}{|xy|}$

1.2O Seja $f(x,y) = \exp\left[-1/\left(x^2+y^2\right)\right]$ se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = 0$. Verifique que f é contínua em todo ponto (x,y) do $\mathbb{R}^2$ e calcule os limites:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(\Delta x, 0)}{\Delta x} \qquad \text{e} \qquad \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(0,\Delta y)}{\Delta y}.$$

1.2P Considere a função $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^3}$, se $x^2+y^3 \neq 0$, e $f(0,0) = 0$, definida no domínio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^3 \neq 0\} \cup \{(0,0)\}$.

(a) Calcule o limite de f na origem, ao longo das retas $y = mx$.

(b) Calcule o limite de f na origem, ao longo do caminho $y = -x^{2/3}e^x$.

(c) Calcule o limite de f na origem, ao longo do caminho $r = \cos^2\theta$, $-\pi/2 \leq \theta \leq 0$.

(d) Investigue a continuidade de f.

1.2Q Mostre que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{|x|+|y|}{x^2+y^2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ (veja o Exercício 1.2F(c)).

1.2R Use coordenadas polares e mostre que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2+y^2\right)\log\sqrt{x^2+y^2} = 0$.

Alerta! A mudança para coordenadas polares pode nos levar a conclusões falsas. Por exemplo, em coordenadas polares a função $f(x,y) = \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}$ assume a forma:

$$f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) = \frac{2r\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta}{r^2\cos^4\theta + \operatorname{sen}^2\theta}, \text{ quando } r \neq 0$$

e daí segue que, ao deixar θ constante e fazer $r \to 0$, encontra-se $\lim\limits_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) = 0$. Esse cálculo induz a afirmação (falsa!) de que o limite da função na origem é igual a 0. Ao longo do caminho $y = x^2$, contudo, tem-se $r\operatorname{sen}\theta = r^2\cos^2\theta$ e, portanto:

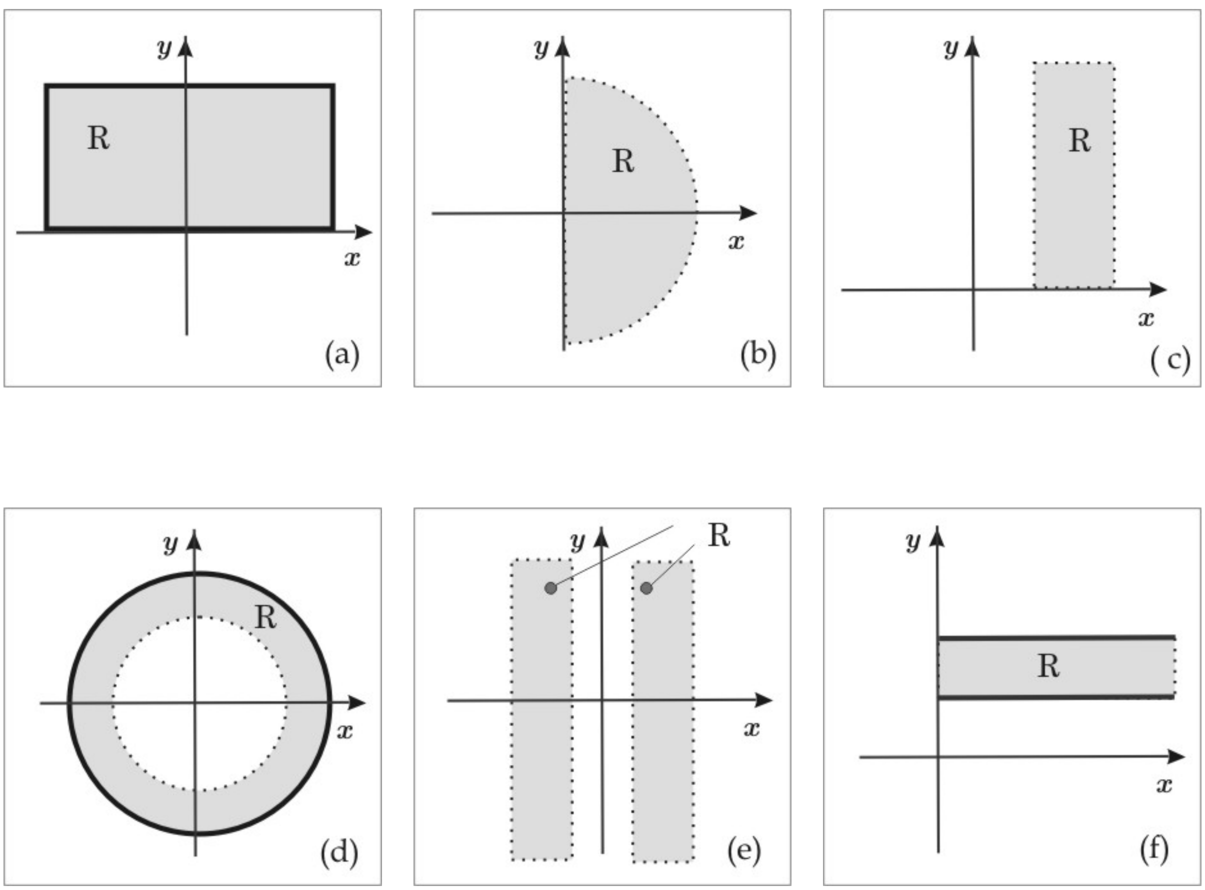
$$f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) = \frac{2r\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta}{r^2\cos^4\theta + \operatorname{sen}^2\theta} = 1, \ \forall r, \theta.$$

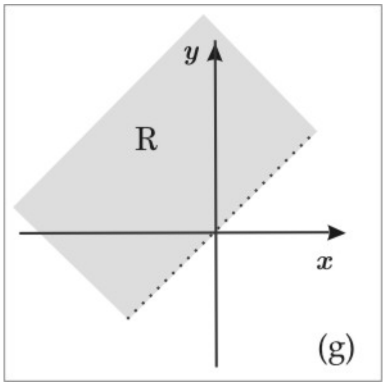
Assim, no caminho $y = x^2$ (ou $r\operatorname{sen}\theta = r^2\cos^2\theta$), tem-se $\lim\limits_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) = 1$ e, portanto, a função $f(x,y)$ não tem limite na origem.

Respostas & Sugestões

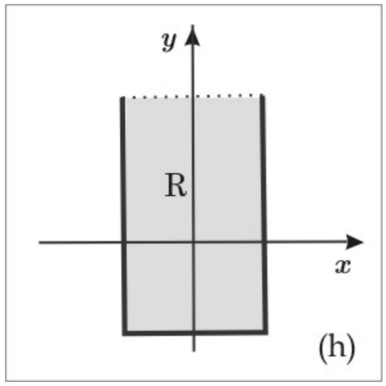
Exercícios 1.1

1.1A	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	(h)	(i)	(j)	(k)	(l)	(m)	(n)	(o)	(p)	(q)	(r)
A					x		x							x		x		
F	x								x	x	x	x	x					
L				x						x	x	x					x	x
C	x	x	x		x			x		x	x	x			x		x	x
K										x	x	x						

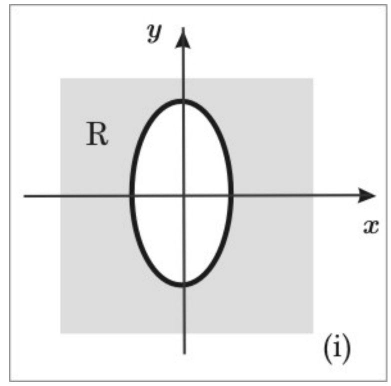




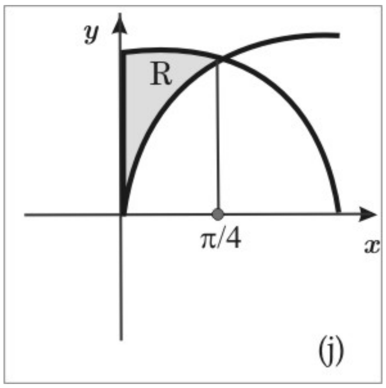
(g)



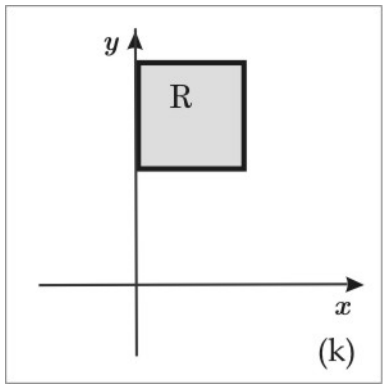
(h)



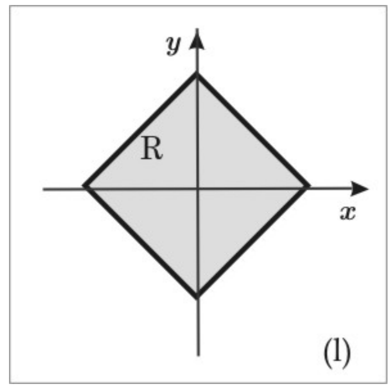
(i)



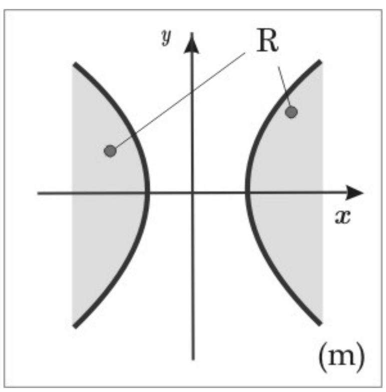
(j)



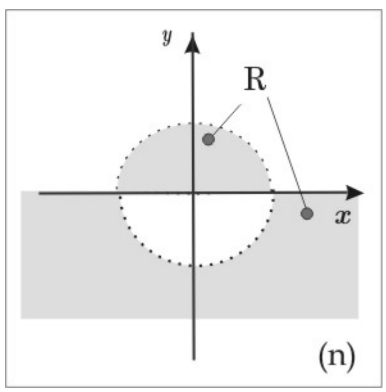
(k)



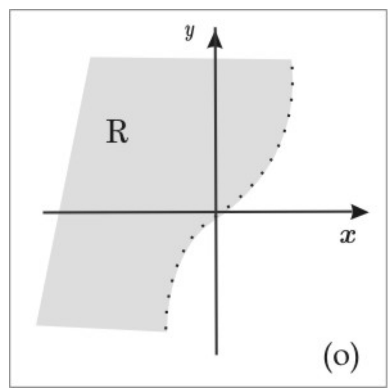
(l)



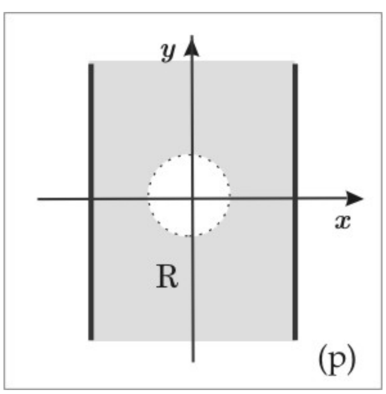
(m)



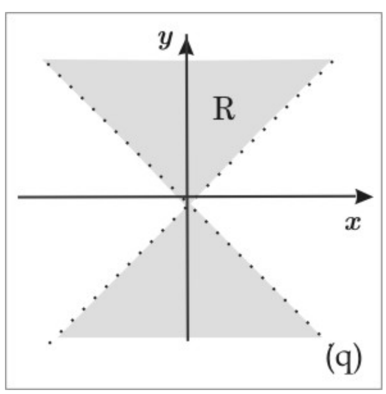
(n)



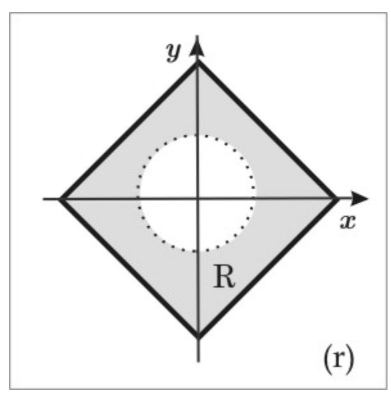
(o)



(p)



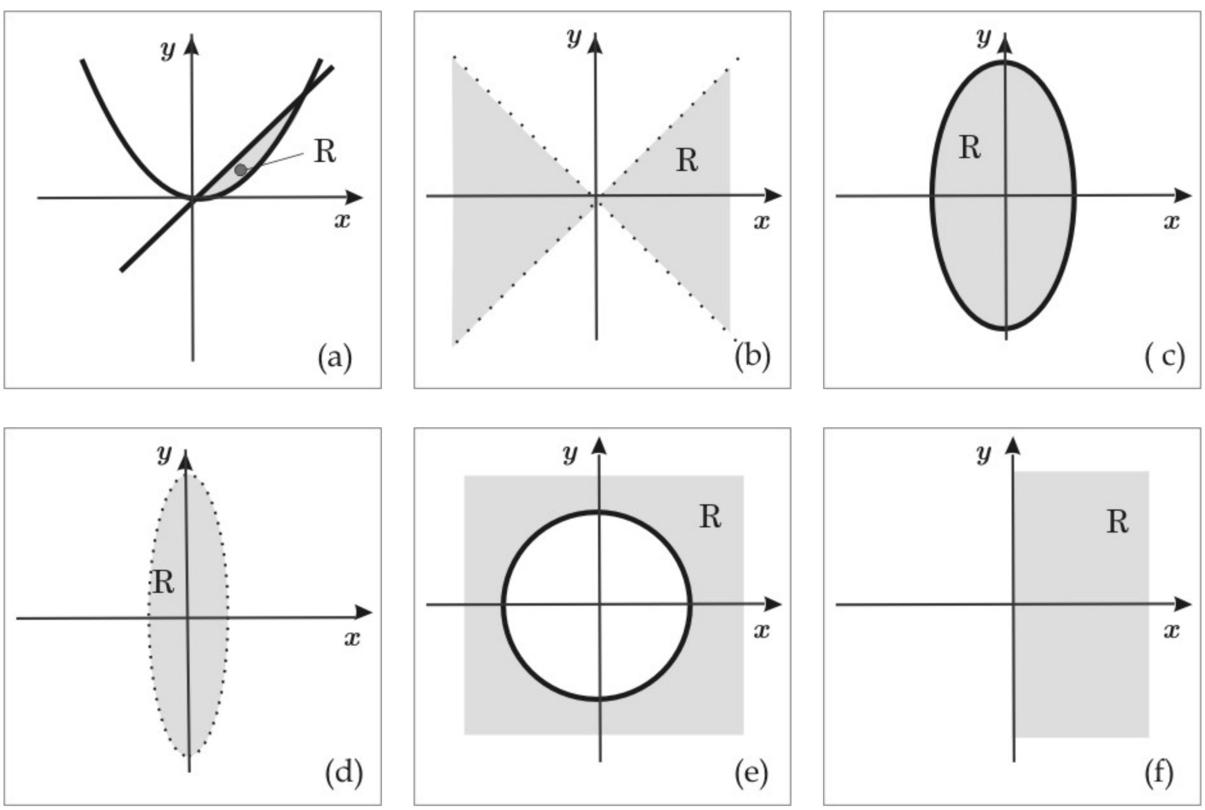
(q)

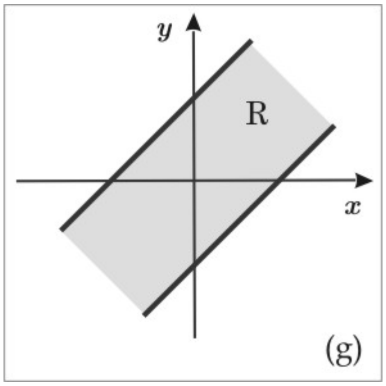


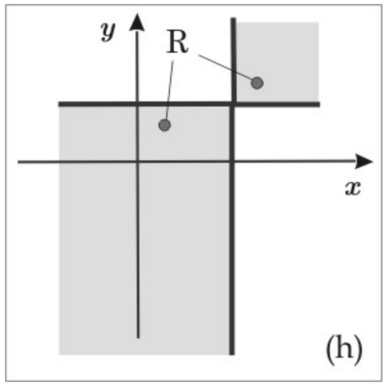
(r)

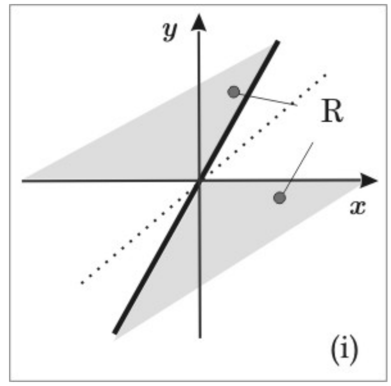
(a) $\partial\mathcal{R} = \{(x, y)\,;\ y = 0\}$ (b) $\partial\mathcal{R} = \{(x, y)\,;\ x^2 + y^2 = 1,\ x \geq 0\} \cup \{(0, y)\,;\ -1 \leq y \leq 1\}$ (c) $\partial\mathcal{R} = \{(1, y)\,;\ y \geq 0\} \cup \{(2, y)\,;\ y \geq 0\} \cup \{(x, 0)\,;\ 1 \leq x \leq 2\}$ (d) $\partial\mathcal{R} = \{(x, y)\,;\ x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y)\,;\ x^2 + y^2 = 2\}$ (e) $\partial\mathcal{R}$ é constituída das retas $x = -3,\ x = -2,\ x = 2$ e $x = 3$ (f) $\partial\mathcal{R} = \{(0, y)\,;\ 1 \leq y \leq 2\} \cup \{(x, 1)\,;\ x \geq 0\} \cup \{(x, 2)\,;\ x \geq 0\}$ (g) $\partial\mathcal{R} = \{(x, y)\,;\ x = y\}$ (h) $\partial\mathcal{R} = \{(\pm 1, y)\,;\ y \geq -1\} \cup \{(x, -1)\,;\ -1 \leq x \leq 1\}$ (i) $\partial\mathcal{R} = \{(x, y)\,;\ 4x^2 + y^2 = 9\}$ (j) $\partial\mathcal{R} = \{(0, y)\,;\ 0 \leq y \leq 1\} \cup \{(x, \sin x)\,;\ 0 \leq x \leq \pi/2\} \cup \{(x, \cos x)\,;\ 0 \leq x \leq \pi/2\}$ (k) $\partial\mathcal{R}$ é o quadrado de vértices $(0, 1)\,,\ (0, 2)\,,\ (1, 2)$ e $(1, 1)$ (l) $\partial\mathcal{R}$é o quadrado de vértices $(0, \pm 1)$ e $(\pm 1, 0)$ (c) $\partial\mathcal{R} = \{(1, y)\,;\ y \geq 0\} \cup \{(2, y)\,;\ y \geq 0\} \cup \{(x, 0)\,;\ 1 \leq x \leq 2\}$ (m) $\partial\mathcal{R} = \{(x, y)\,;\ x^2 - y^2 = 1\}$ (n) $\partial\mathcal{R} = \{(x, y)\,;\ x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, 0)\,,\ -\infty < x < \infty\}$ (o) $\partial\mathcal{R} = \{(x, y)\,;\ y = x^3\}$ (p) $\partial\mathcal{R} = \{(x, y)\,;\ |x| = |y|\}$.

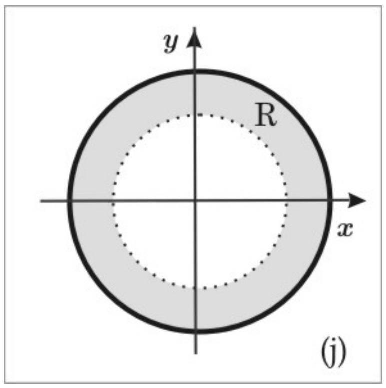
1.1B (a) $y \geq x^2$ e $2x \geq y$ (b) $-|x| < y < |x|$ (c) $4x^2 + y^2 \leq 1$ (d) $4x^2 + y^2/9 < 1$ (e) $x^2 + y^2 \geq 4$ (f) $x > 0$ (g) $x - 1 \leq y \leq x + 1$ (h) $[x \leq 3,\ y \leq 2]$ ou $[x \geq 3$ e $y \geq 2]$ (i) $-1 \leq \dfrac{x}{x - y} \leq 1$ (j) $1 < x^2 + y^2 < 4$ (k) $y \neq (-1)^n x + n\pi$ (l) $\left(x^2 - 1\right)\left(y^2 - 1\right)^{-1} \geq 0$. Eis os gráficos:

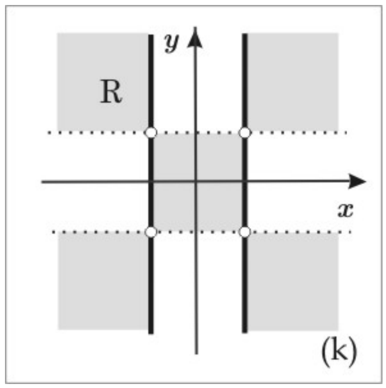


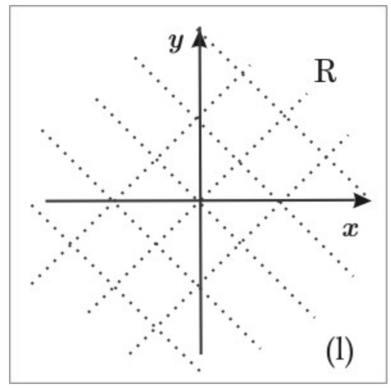












1.1C

Observe que a desigualdade $(x^2+y^2-1)[(x-1)^2+y^2-1]<0$ é equivalente ao sistema:

$$\left| \begin{array}{lll} x^2+y^2<1 & \text{e} & (x-1)^2+y^2>1 \quad \text{ou} \\ x^2+y^2>1 & \text{e} & (x-1)^2+y^2<1 \end{array} \right.$$

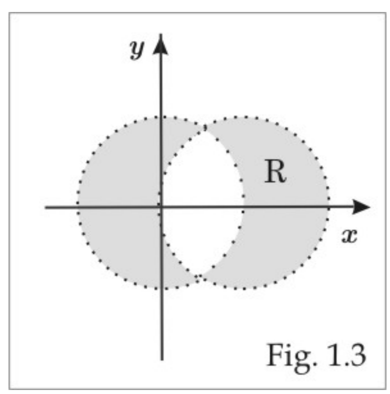
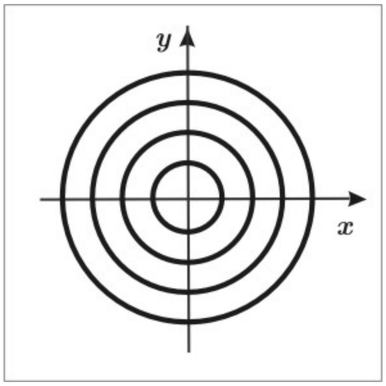


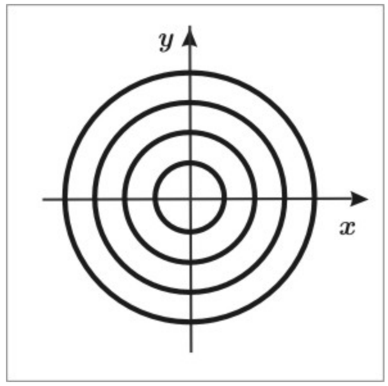
Fig. 1.3

1.1D Em cada caso fazemos $z=\lambda$, λ constante, e obtemos as curvas de nível.

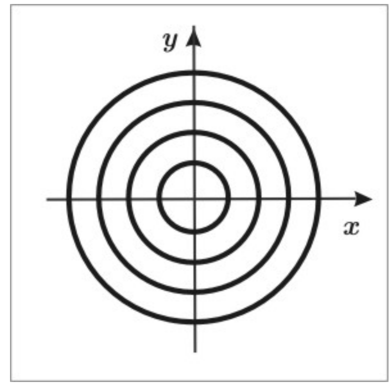
(a) $x^2 + y^2 = \lambda,\ \lambda \geq 0$



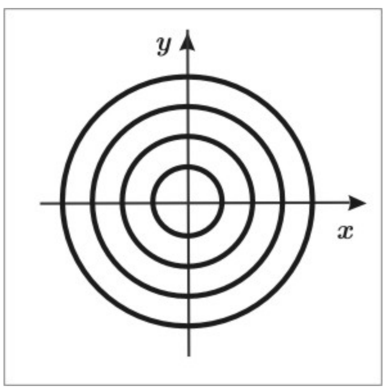
(b) $x^2 + y^2 = \sqrt{\lambda},\ \lambda > 0$



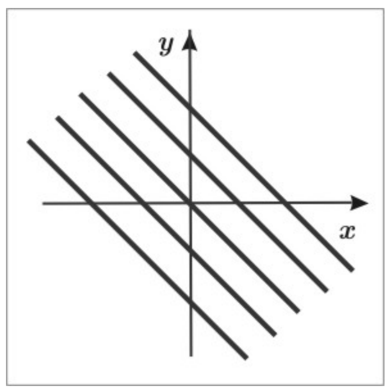
(c) $x^2 + y^2 = 1/\lambda,\ \lambda > 0$



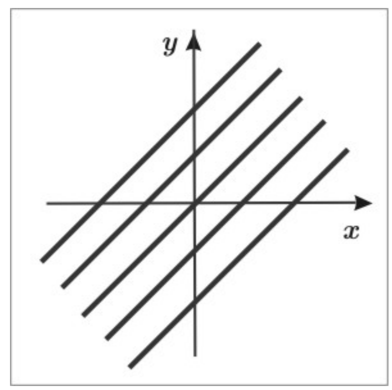
(d) $x^2 + y^2 = e^{\lambda} - 1,\ \lambda \geq 0$



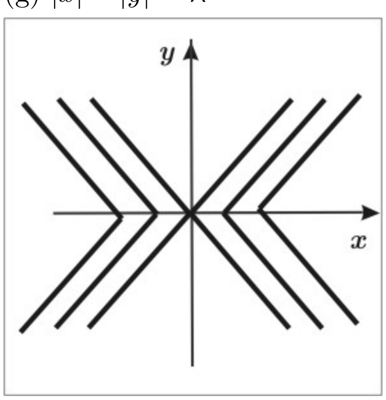
(e) $x + y = \lambda$



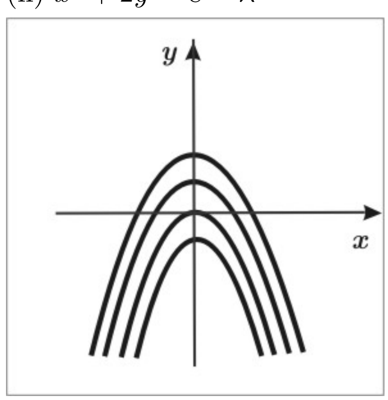
(f) $x - y = \operatorname{arcsen} \lambda$



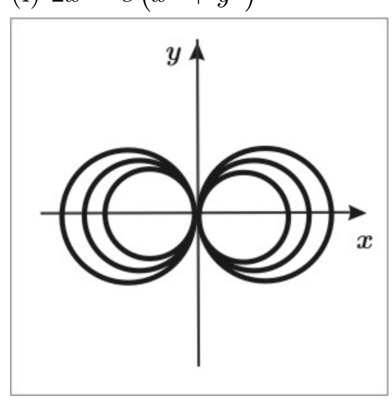
(g) $|x| - |y| = \lambda$



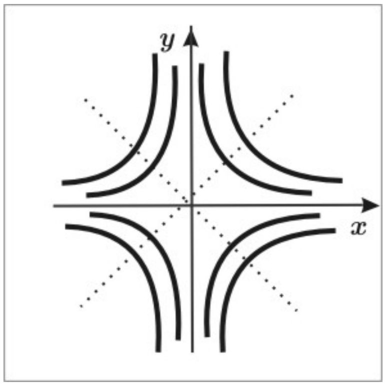
(h) $x^2 + 2y = 8 - \lambda$



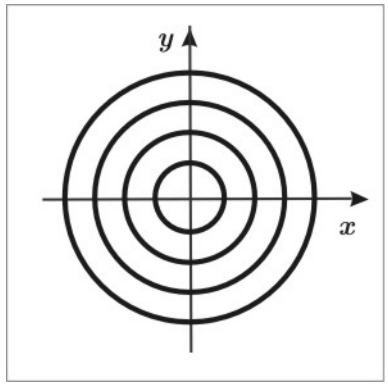
(i) $2x = c\left(x^2 + y^2\right)$



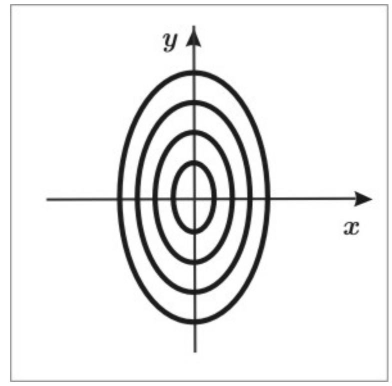
(j) $xy = \lambda$



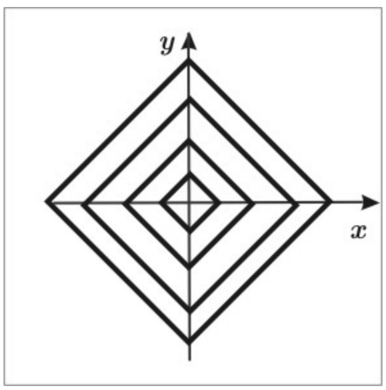
(k) $x^2 + y^2 = 9 - \lambda^2,\ |\lambda| < 3$



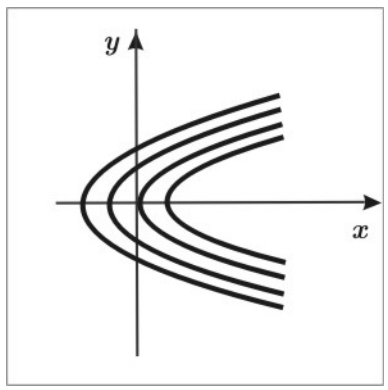
(l) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1 - \lambda^2,\ |\lambda| < 1$



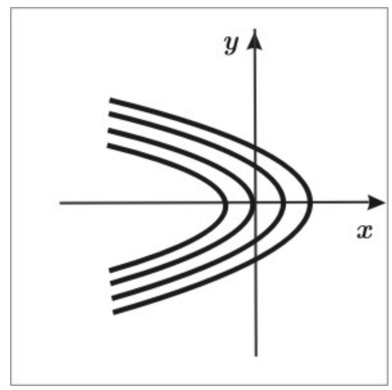
(m) $|x - y| = \lambda$



(n) $x + y^2 = \lambda$



(o) $x - y^2 = \lambda$



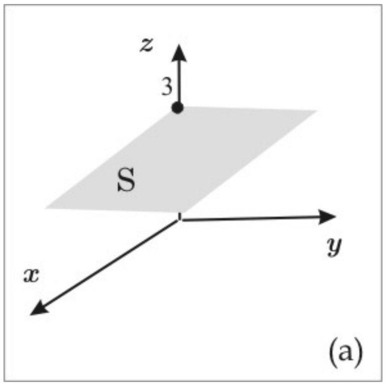
1.1E No ponto $P_0\,(1,2)$ tem-se $z = 0$ e acurva de nível por P_0 é $y = 2x^3$. A reta tangente tem equação $y = 6x - 4$ e sobre essa reta $f = -4x^3 + 12x - 8$. Assim, quando $x \to \pm\infty$, a função f tende para $\mp\infty$.

1.1F A origem, a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, respectivamente.

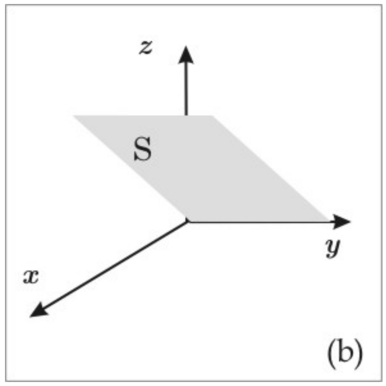
1.1G O hiperbolóide de uma folha $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

1.1H

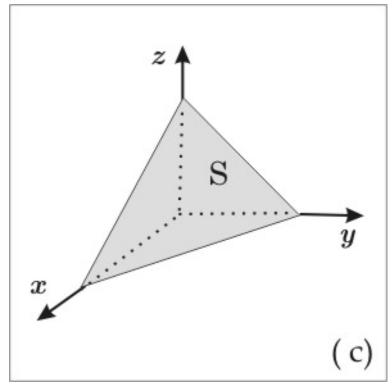
(d) $z = 3$



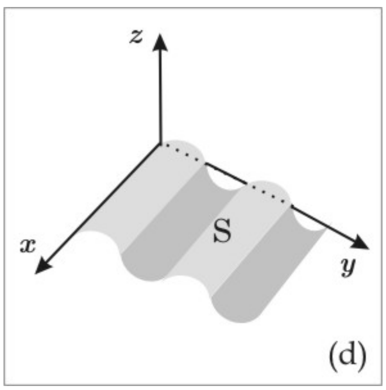
(e) $z = x$



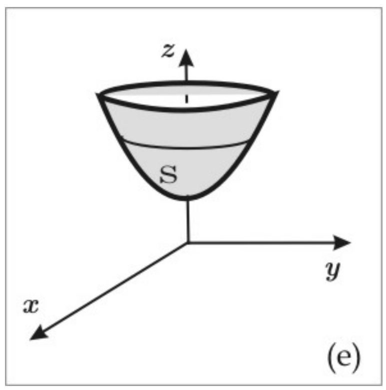
(f) $x + y + z = 1$



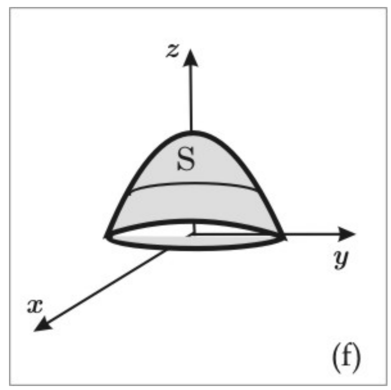
(d) $z = \operatorname{sen} y$



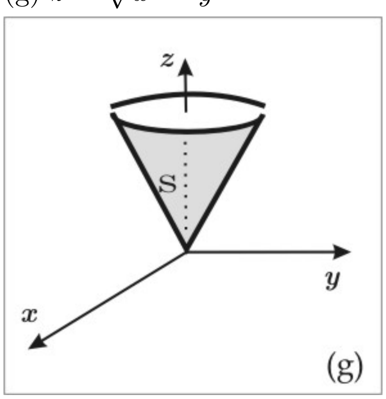
$z = \exp \sqrt{x^2 + y^2}$



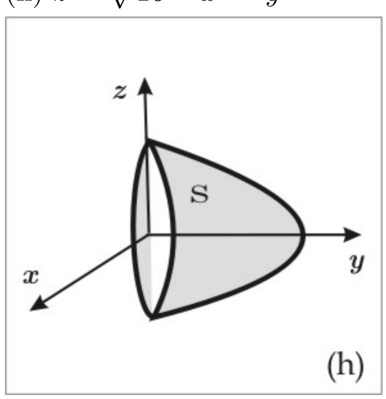
(f) $z = 3 - x^2 - y^2$



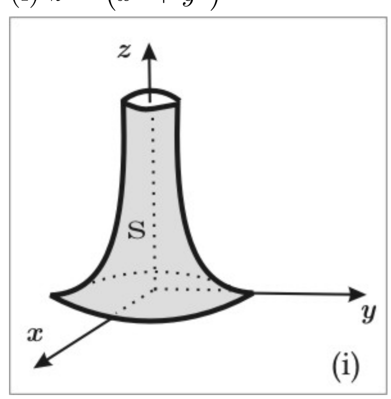
(g) $z = \sqrt{x^2 - y^2}$



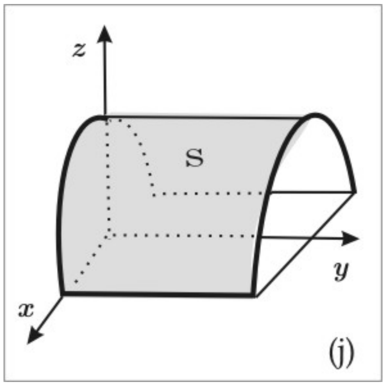
(h) $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$



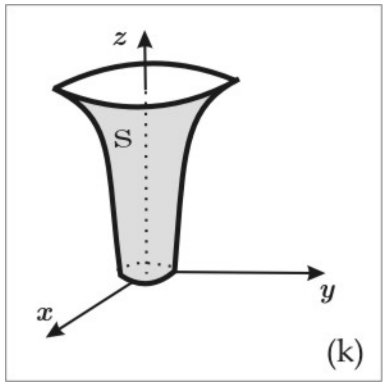
(i) $z = \left(x^2 + y^2\right)^{-1/2}$



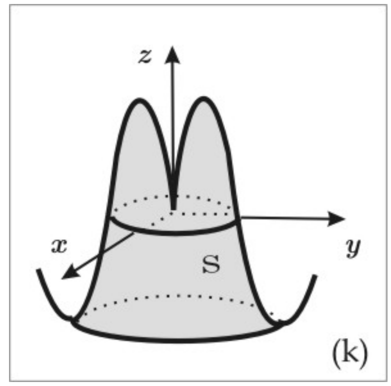
(j) $z = 1 - x^2$



(k) $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$



(l) $z = \text{sen}\left(x^2 + y^2\right)$



1.1I (a) planos (b) elipsóides (c) hiperbolóides (d) cilindros.

1.2B Além dos caminhos canônicos como as retas, considere: $y = \sqrt{x}$ em (e), $y = -x^2 e^x$ em (i), $y^2 = x^3$ em (g) $y = x^2$ em (h) e $y = -xe^x$ em (j).

Exercícios 1.2

1.2D (a) 0 (b) -1 (c) 1 (d) $1/2$ (e) $\pi/4$ (f) 2 (g) 0 (h) 0 (i) $\left(1 + 2\sqrt{2}\right)^{2/3}$.

1.2E Como ilustração, faremos o ítem (b). De fato:

$$\left|3x^2 + y - 5\right| = \left|3\left(x^2 - 1\right) + (y - 2)\right| \leq 3\left|x - 1\right|\left|x + 1\right| + \left|y - 2\right|.$$

Se $\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} < \delta$, então $|x - 1| < \delta$ e $|y - 2| < \delta$ e teremos $\left|3x^2 + y - 5\right| < 3\delta\,|x + 1| + \delta$. Para evitar uma equação do 2^o grau em δ, admitamos que o δ procurado seja menor do que 1. Assim: $|x + 1| = |x - 1 + 2| \leq |x - 1| + 2 < \delta + 2 < 3$ e, portanto, $\left|3x^2 + y - 5\right| < 10\delta$. Para concluir, imaginemos $\varepsilon > 0$ dado e escolhamos $\delta = \varepsilon/10$. Dessa forma teremos:

$$0 < \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} < \delta \Longrightarrow \left|3x^2 + y - 5\right| < \varepsilon.$$

1.2G (a) Considere os caminhos $y = 0$ e $y = x^k e^x$, escolhendo k adequado (b) Idem.

1.2H (a) 0 (b) 0 (c) $3/8$. A função não tem limite em $(0, 0)$.

1.2I (a) sim (b) sim (c) não (d) não.

1.2J A função $f(x,y)$ é combinação de funções elementares sendo, portanto, contínua em seu domínio.

(a) $D(f) = \{(x,y)\,;\ x \geq 0 \text{ e } y \geq 0 \text{ ou } x \leq 0 \text{ e } y \leq 0\}$ (b) $D(f) = \{(x,y)\,;\ y \neq 2x\}$

(c) $D(f) = \{(x,y)\,;\ y \neq \pm 1\}$ (d) $D(f) = \{(x,y)\,;\ (x,y) \neq (0,0)\}$

1.2K Note que a função está definida em todo plano $\mathbb{R}^2$.

(a) f é descontínua nos pontos da reta $y = x$, exceto no ponto $(1/2, 1/2)$;

(b) f é contínua em todos os pontos do $\mathbb{R}^2$;

(c) f é descontínua na origem;

(d) f não tem ponto de descontinuidade, isto é, ela é contínua em todo $\mathbb{R}^2$;

(e) f é descontínua na origem;

(f) f é descontínua nos pontos da elipse $4x^2 + 9y^2 = 1$;

(g) f é descontínua nos pontos da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

1.2L A função g é descontínua em $(0,0)$ porque o limite de $g(x,y)$ na origem é 0 e $g(0,0) = 1$. Para remover essa descontinuidade basta redefinir g na origem pondo $g(0,0) = 0$. A função $h(x,y)$ é descontínua em $(0,0)$ porque não tem limite nesse ponto. Esse é o caso de uma dsecontinuidade que não pode ser removida.

1.2M Usando coordenadas polares, obtém-se:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} \frac{\operatorname{sen} r^2}{1 - \cos r} = 2.$$

Note que, sendo $f(0,0) = 0$, a função f é descontínua na origem. Essa descontinuidade pode ser removida redefinindo f na origem por $f(0,0) = 2$.

1.2N Em cada caso aplique-se o Teorema do confronto.

$$\text{(a) } 1 - \frac{x^2y^2}{3} \leq \frac{\arctan(xy)}{xy} \leq 1 \Longrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\arctan(xy)}{xy} = 1$$

$$\text{(b) } 2 - \frac{|xy|}{6} \leq \frac{4 - 4\cos\sqrt{|xy|}}{|xy|} \leq 2 \Longrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4 - 4\cos\sqrt{|xy|}}{|xy|} = 2.$$

1.2O Vejamos a continuidade de $f(x,y)$. Fora da origem a função f é uma combinação de funções elementares sendo, portanto, contínua. Na origem, temos:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{\exp(1/r^2)} = 0 = f(0,0).$$

Logo, f é contínua em todo plano $\mathbb{R}^2$. Verifique que $\lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(\Delta x, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \to 0} \dfrac{f(0, \Delta y)}{\Delta y} = 0$.

1.2P

(a) Ao longo da reta $y = kx$, temos $\lim_{x \to 0} f(x, kx) = \lim_{x \to 0} \dfrac{kx^3}{x^2 + k^3 x^3} = 0$;

(b) Ao longo da curva $y = -x^{2/3} e^x$, aplique a regra de l'Hôpital e mostre que o limite não é 0.

1.2Q Segue diretamente do Exercício 1.2F(c).

1.2R Usando coordenadas polares e a Regra de L'Hôpital, obtemos:

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \left(x^2 + y^2\right) \log \sqrt{x^2 + y^2} = \lim_{r \to 0} \left(r^2 \log r\right) = \lim_{r \to 0} \frac{\log r}{1/r^2} = 0.$$

Em que momento no cálculo do limite acima foi utilizada a Regra de L'Hôpital?