SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ conjunto dos números naturais

<u>Definição</u>: Uma sequência ou sucessão de n°s reais é uma função $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que a cada número natural se associa a um número real.

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \mapsto f(n) = a_n$$

O a_n é dito o n-ésimo termo da sequência.

Exemplo: (a) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, a_n = \frac{1}{n}$.

(b) $-1, 1, -1, 1, \dots, b_n = (-1)^n$

(c) $x_n = -\frac{n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, é o termo geral da sequência

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(n) = -\frac{n}{n+1}$.

(d) $f(n) = \begin{cases} 1/n, & n \text{ par} \\ -1/n^2, & n \text{ ímpar} \end{cases}$ $\quad -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{25}, \dots$

Se considerarmos $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \dots\} \subseteq \mathbb{N}$ a restrição de $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ a $f: \mathbb{N}' \to \mathbb{R}$ é chamada <u>subsequência</u> ou <u>subsucessão</u>.

Exemplo: a) A sequência $a_n = (-1)^n$ tem como subsequências $a_{2n} = 1$ e $a_{2n-1} = -1$.

b) A sequência $\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}$ é uma subsequência da sequência $a_n = \frac{1}{n}$. Observe que poderíamos denotá-la por $b_n = \frac{1}{n+4}$, $n \in \mathbb{N}$ ou $b_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}'$ onde $\mathbb{N}'' = \{5, 6, 7, 8, \dots\}$.

De forma genérica, fixado $p \in \mathbb{N}$, então a sequência com termo geral $b_n = a_{n+p}$ é uma subsequência de $\{a_n\}$, onde consideramos para domínio o subconjunto $\mathbb{N}' = \{1+p, 2+p, 3+p, \ldots\}$

<u>Definição</u>: Uma sequência $\{a_n\}$ é dita <u>limitada superiormente</u> quando existir um número real M, denominado cota superior da sequência que satisfaz

$$a_n \leq M, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

<u>Definição</u>: Uma sequência $\{a_n\}$ é dita <u>limitada inferiormente</u> qdo existir um número real m, denominado cota inferior que satisfaz

$$m \leq a_n, \ \forall n$$

<u>Definição</u>: Uma sequência $\{a_n\}$ é dita <u>limitada</u> quando o for superior e inferiormente, isto é, quando existir uma constante positiva C tal que

$$|a_n| \leq C, \ \forall n.$$

É claro que se M for uma cota superior de uma dada sequência $\{a_n\}$, então qualquer número real maior do que M também será cota superior da sequência $\{a_n\}$. A menor dessas cotas superiores será chamado de <u>supremo</u> da sequência $\{a_n\}$ e denotamos por $\sup\{a_n\}$. Analogamente definimos o <u>ínfimo</u> da sequência e denotamos por $\inf\{a_n\}$, a maior das cotas inferiores.

Note que para cada $\varepsilon > 0$ o número real $\alpha = \sup\{a_n\} - \varepsilon$ é menor que o supremo da sequência $\{a_n\}$ e, portanto, não pode ser cota superior, por esse motivo, deve existir um n_0 tal que $\alpha < a_{n_0}$.

Para o ínfimo ocorre um fato análogo, ou seja, sendo $\beta = \inf\{a_n\} + \varepsilon$ existe algum termo da sequência tal que $\beta \geq a_{n_0}$.

Exemplos: a) A sequência $\{a_n\} = \{n\}$ é limitada inferiormente, mas não superiormente. $\inf\{a_n\} = 1$.

b) A sequência $a_n = 1 - n^2$ é limitada superiormente, mas não inferiormente e $\sup\{a_n\} = 0$.

c) A sequência $a_n = (-1)^n$ é limitada, sendo $\sup\{a_n\} = 1$ e $\inf\{a_n\} = -1$.

d) A sequência $a_n = \frac{1}{n}$ é limitada, $\sup a_n = 1$ e $\inf\{a_n\} = 0$.

e) A sequência $a_n = (-1)^n n$ não é limitada superiormente, nem inferiormente.

Indução Matemática

Se a propriedade P1 ocorre e supomos $P(n)$ válida e provamos que $P(n+1)$ vale então essa propriedade vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 1: $n! = 1.2 \dots n$

$$(n+1)! = (n+1)\, n!, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Provemos que $n! \geq 2^{n-1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 2: Provemos que $A_n = 3(n^2 + n)$ é divisível por 6, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definição: Uma sequência $\{a_n\}$ é dita monótona crescente ou não decrescente quando $a_n \leq a_{n+1}$, $\forall n$.

Definição: Uma sequência $\{a_n\}$ é dita monótona decrescente ou monótona não crescente quando $a_n \geq a_{n+1}$, $\forall n$.

Exemplos:

a) As sequências $a_n = n$ e $b_n = \ln n$ são crescentes, enquanto que $c_n = -n^3$ e $d_n = 1/n$ são decrescentes.

b) A sequência $a_n = (-1)^n$ é não monótona, isto é, não é crescente nem decrescente. É uma sequência alternada.

(c) A sequência $a_n = \frac{n}{n+1}$ é crescente. De fato,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} \geq 1, \forall n$$

A <u>monotonicidade</u> de algumas sequências pode ser deduzida por investigação do sinal da derivada da função extensão. Isto é, $f(x)$ tal que $f(n) = a_n$. Por exemplo, para a sequência $f(n) = \frac{n}{n+1}$ pode ser analisada por $f(x) = \frac{x}{x+1}$ e $f'(x) = \frac{1}{x^2+1}$, positiva, logo f é crescente e daí $f(n) \leq f(n+1)$.

Exemplo: Para a sequência $a_n = \frac{n!}{1.3.5...(2n-1)}$ não é possível definir a função extensão. Note que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(1.3.5...(2n-1))(n+1)!}{1.3.5....(2n-1)(2n+1)\, n!} = \frac{n+1}{2n+1} < 1, \forall n$$

logo, $a_n > a_{n+1}, \forall n \Rightarrow a_n$ é decrescente.

SEQUÊNCIAS CONVERGENTES

Definição: Dizemos que $\{a_n\}$ converge para um número real l se dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - l| < \varepsilon$, $\forall\, n > n_0$.
Neste caso, denotamos $\lim_{n\to\infty} a_n = l$. E dizemos que (a_n) é <u>convergente</u>.

Note que: $|a_n - l| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < a_n - l < \varepsilon$ ou $l-\varepsilon < a_n < l+\varepsilon$ isto é, $a_n \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$.

Um nº finito de termos não altera a convergência nem a divergência de uma sequência.

Uma sequência convergente $\{a_n\}$ não pode ter dois limites.
De fato, se $l_1 = \lim a_n$ e $l_2 = \lim a_n$ então

$$\underbrace{|l_1 - l_2| = |l_1 - a_n + a_n - l_2| \leq |l_1 - a_n| + |a_n - l_2| < 2\varepsilon}_{\varepsilon = |l_1-l_2|/2 \text{ assim } |l_1-l_2| < |l_1-l_2| \text{ absurdo!}}$$

Se $l_1 \neq l_2$ então $|l_1 - l_2| \neq 0$ e Tomo

Exemplo: a) Vamos mostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Logo, se $n > n_0$ então
$\frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$, $\forall\, n > n_0$ e assim $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

b) Consideremos $a_n = \frac{n}{n+1}$. Neste caso, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

Dado $\varepsilon > 0$, note que

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

Escolhendo o primeiro n_0 tal que $n_0 > \frac{1}{\varepsilon} - 1$ então

para todo $n > n_0 \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$.

(c) A sequência $b_n = r^n$, onde $r \in \mathbb{R}$, fixo, tal que $-1 < r < 1$, converge para zero. Escolha $r \neq 0$, dado $\varepsilon > 0$, como $0 < |r| < 1$, temos que $\ln|r|$ está definido, é diferente de zero, e $\ln|r| < 0$.

$\ln \varepsilon < 0$
$0 < \varepsilon < 1$

Assim

$$|r^n - 0| = |r|^n < \varepsilon \Leftrightarrow n \ln|r| < \ln \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln|r|}$$

Escolha n_0 maior que $\frac{\ln \varepsilon}{\ln|r|}$ assim $|r^n - 0| < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$.

(d) Existem sequências (não limitadas) cujos termos crescem indefinidamente à medida que n aumenta, por exemplo, a sequência $a_n = n$. Nesse caso, dizemos que a sequência tem limite infinito e denotamos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

Isso significa que dado $K > 0$ qualquer, existe n_0 tal que
$a_n > K$, $\forall\, n > n_0$.

Para a sequência $b_n = -n$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$.

(e) Se $|r| > 1$ então $\lim\limits_{n\to\infty} |r|^n = +\infty$ e $\lim\limits_{n\to\infty} r^n$ não existe.

(f) $a_n = (-1)^n$ e $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = 1$ e $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n-1} = -1$ logo, o limite de a_n não existe.

<u>Teorema:</u> Toda sequência convergente é limitada.

Prova: Seja (a_n) uma sequência convergente com limite ℓ.
Isto é, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$ ou dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, n_0$: $|a_n - \ell| < \varepsilon$, $\forall\, n > n_0$

Ou seja,
$$-\varepsilon < a_n - \ell < \varepsilon \ , \ \forall n > n_0$$
ou
$$|a_n| < |\ell| + \varepsilon \ , \ \forall n > n_0$$
considere $M = \max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{n_0}|, |\ell| + \varepsilon\}$ então
$$|a_n| < M \ , \ \forall n \in \mathbb{N}$$
Segue que (a_n) é limitada. A recíproca não é verdadeira pois, por exemplo, a sequência $b_n = \operatorname{sen} n$ é limitada $|\operatorname{sen} n| \leq 1$ mas $\lim_{n\to\infty} \operatorname{sen} n$ não existe.

Teorema: sejam (a_n) uma sequência limitada e (b_n) uma sequência que converge a zero então $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

Prova: Como (a_n) é limitada então $\exists M > 0$ tal que $|a_n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, como $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ então dado $\varepsilon > 0$, $\exists n_0$ tal que $|b_n| < \frac{\varepsilon}{M}$, $\forall n > n_0$.

Desse modo
$$|a_n b_n| = |a_n||b_n| \leq M \frac{\varepsilon}{M} < \varepsilon \ , \ \forall n > n_0$$
Logo,
$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0.$$

Exemplo 1: A sequência $\frac{1}{n} \operatorname{sen} n$ converge a zero. Pois $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ e $|\operatorname{sen} n| \leq 1$. Logo, pelo teorema anterior $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen} n = 0$.

Teorema 2: Temos que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ se, e somente se, $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$.

Prova: $|a_n| < \varepsilon \iff ||a_n|| < \varepsilon$.

Teorema 3: Se $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \ell$ e (b_n) é tal que $a_n \leq b_n \leq c_n$ então $\lim_{n\to\infty} b_n = \ell$.

Prova: De fato, $|a_n - \ell| < \varepsilon$ e $|c_n - \ell| < \varepsilon$ então
$$\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon, \ \forall n_{01}, \quad \ell - \varepsilon < c_n < \ell + \varepsilon, \ \forall n > n_{02}$$
Tome $n_0 = \max\{n_{01}, n_{02}\}$ então
$$\ell - \varepsilon < a_n < b_n < c_n < \ell + \varepsilon \ , \ \forall n > n_0$$
Logo,
$$\ell - \varepsilon < b_n < \ell + \varepsilon \ , \ \forall n > n_0$$
ou
$$|b_n - \ell| < \varepsilon \ , \ \forall n > n_0.$$

Teorema: Se $f:[a,\infty) \to \mathbb{R}$ é uma função tal que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell$, então a sequência $a_n = f(n)$, $n > a$ é convergente e $\lim_{n\to\infty} f(n) = \ell$.

Se $\lim_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty$ então $\{a_n\}$ é divergente.

Exemplo: Para calcular $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n}$. Escolhemos $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

e
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

logo. $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$.

Propriedades do Limite

Sejam $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sequências convergentes com limites ℓ e r, resp. Então:

a) $\{a_n \pm b_n\}$ converge para $\ell \pm r$;

b) $\{c.a_n\}$ converge para $c\ell$;

c) $\{|a_n|\}$ converge para $|\ell|$;

d) $\{a_n.b_n\}$ converge para $\ell.r$;

e) se $r \neq 0$ então $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ converge para ℓ/r.

Prova: Vamos provar uma das propriedades, por exemplo, (d). Suponha que $a_n \to \ell$ e $b_n \to r$ então dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, n_{01}, n_{02}$ tal que $|a_n - \ell| < \varepsilon$ e $|b_n - r| < \varepsilon$, $\forall\, n > n_{01}$ e $\forall\, n > n_{02}$. Assim se $n_0 = \max\{n_{01}, n_{02}\}$ temos que para $n > n_0$

$$|a_n b_n - \ell.r| = |a_n b_n - a_n r + a_n r - \ell r| \leq |a_n||b_n - r| +$$
$$+ |r||a_n - \ell| < M\varepsilon + |r|\varepsilon = (M + |r|)\varepsilon.$$

Exemplo: Analise sobre a convergência das sequências a seguir

a) $a_n = \frac{3n+1}{5n} + \frac{(-1)^n}{n}$ b) $b_n = \cos\frac{1}{n}\cdot\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ c) $c_n = \frac{n^2+3}{4n^2-2n+1}$.

solução: (c)

$$\lim_{n\to+\infty} c_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+3}{4n^2-2n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2(1 + 3/n^2)}{n^2(4 - 2/n + 1/n^2)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1 + 3/n^2}{4 - 3/n + 1/n^2} = \frac{1}{4}$$

Teorema: Toda sequência monótona limitada é convergente.

Prova: Suponha (a_n) uma sequência crescente e limitada. Segue que existe $M \geq 0$ tal que

$$|a_n| \leq M, \forall n$$

Isto é, $a_n \leq M$. Logo, M é uma cota superior para (a_n), seja $l = \sup\{a_n\}$ então l é a menor das cotas superiores de (a_n), assim $l-\varepsilon$ não é cota superior então $\exists\, n_1$ tal que $l-\varepsilon < a_{n_1} \leq l$.

Como $\{a_n\}$ é crescente então $a_n > a_{n_1}$ $\forall n > n_1$, segue que,

$$l-\varepsilon < a_n \leq l < l+\varepsilon, \forall n > n_1$$

Isto é,
$$|a_n - l| < \varepsilon, \forall n > n_1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = l.$$

Exemplo: Vimos que a sequência cujo termo geral é $a_n = \dfrac{n!}{1\cdot 3 \cdots (2n-1)}$ é decrescente. Verifiquemos que ela é também limitada.

De fato,
$$0 < a_n = \frac{1}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdots\frac{n}{2n-1} \leq 1\cdot 1 \cdots 1 = 1, \forall n$$

Além disso, $\inf\{a_n\} = 0$. Logo, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{1\cdot 3 \cdots (2n-1)} = 0$.

Teorema: Se uma sequência $\{a_n\}$ converge para l então todas as suas subsequências convergem para l.

Prova: Se pelo menos uma das subsequências de $\{a_n\}$ digamos $\{a_{n_k}\}$ tivesse outro limite $r \neq l$ então $a_{n_k} \to r$ e $a_n \to l$ com $l \neq r$, mas isto contradiz o fato do limite ser único.

Exemplo: A sequência $(-1)^n$ possui subsequências tais que $(-1)^{2k} \to 1$ e $(-1)^{2k-1} \to -1$. Logo, $(-1)^n$ não converge. Por outro lado, a sequência $\frac{(-1)^n}{n}$ converge para zero, pois $|(-1)^n| \leq 1$ e $\frac{1}{n} \to 0$. Assim $\frac{(-1)^n}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Teorema: (Teste da Razão para sequências) Se uma sequência $\{a_n\}$ de termos positivos satisfaz à condição $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l < 1$, então ela converge para zero.

Prova: Seja $l < r < 1$ tal que $0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} < r$, $\forall n > n_0$. Como $r < 1$ então

$0 < a_{n+1} < a_n r < a_n \Rightarrow \{a_n\}$ é decrescente para $n \geq n_0$. Assim

$$0 < a_n \leq a_{n_0}, \forall n \geq n_0 \Rightarrow \{a_n\} \text{ limitada}$$

Logo, (a_n) é convergente. Suponha, por absurdo, que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = s \neq 0$ então

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\lim a_{n+1}}{\lim a_n} = \frac{s}{s} = 1. \text{ Mas, } l < 1. \blacksquare$$

Exemplo 1: As sequências $a_n = \frac{n!}{n^n}$, $b_n = \frac{r^n}{n!}$, $r>0$, $c_n = \frac{n!}{1.3.\cdots.(2n-1)}$, $d_n = \frac{n^p}{2^n}$ convergem todas para zero.

De feito, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e} < 1.$

Usou-se $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{r^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{r^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{r}{n+1} = 0.$$

e, finalmente,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d_{n+1}}{d_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^p}{2^{n+1}} \frac{2^n}{n^p} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^p = \frac{1}{2} < 1.$$

Usou-se aqui $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^p = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}\right)^p = 1^p = 1$.

Se f é uma funcão contínua num intervalo que contém os termos da sequência $\{a_n\}$ $(a_n \to \ell)$ então $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim_{n\to\infty} a_n) = f(\ell)$.

Exemplo: Considere a sequência $a_n = n^{1/n}$ e calcule $\lim_{n\to\infty} n^{1/n}$.

Temos que $n^{1/n} = \exp\left(\frac{1}{n}\ln n\right)$ daí

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \exp\left(\frac{1}{n}\ln n\right) = \exp\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ln n\right) = \exp 0 = 1$$

SÉRIES NUMÉRICAS

Dada uma sequência $\{a_n\}$ de números reais, a soma infinita $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \ldots$ será representada por $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Tais somas infinitas são chamadas de <u>séries infinitas</u> ou simplesmente <u>séries</u>.

Exemplos: 1) A soma $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$ que é representada por $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ é uma série.

2) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$ representamos por $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é a <u>série harmônica</u>.

Dada uma série infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, as somas parciais dessa série são:

$S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$, $S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$, $\ldots$, $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

Formamos então uma sequência de somas parciais $\{S_n\}$.

Se $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, $S \in \mathbb{R}$ então dizemos que a série $\sum a_n$ converge e sua <u>soma</u> é S, isto é, $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Se $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ não existe então dizemos que a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge. $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n\right)$

Exemplo: Seja $r \in \mathbb{R}$ e considere a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r^n$. Vamos analisar sobre a convergência ou divergência dessa série.

Sol.: Seja $\{S_n\}$ a sequência de soma parcial de ordem n da série $\sum r^n$, isto é,

$$S_n = 1 + r^2 + r^3 + \ldots + r^n$$

Temos que

$$r S_n = r^2 + r^3 + \ldots + r^n + r^{n+1}$$

daí

$$(1-r) S_n = 1 - r^{n+1}$$

ou

$$S_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1-r}$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$ se $|r| < 1$ e $\lim\limits_{n\to\infty} r^n \nexists$ se $|r| > 1$. Então concluímos que a série $\sum r^n$ converge e sua soma é $S = \frac{1}{1-r}$ se $|r|<1$ e diverge se $|r|>1$. No caso em que $|r| = 1$ a série também diverge, pois, $\sum 1^n = 1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots = +\infty$ e $\sum (-1)^n \nexists$.

Conclusão $\sum r^n$ converge se $|r| < 1$ e diverge se $|r| \geq 1$.

De forma análoga a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a r^{n-1}$ converge para $\frac{a}{1-r}$ se $|r|<1$ e diverge se $|r| \geq 1$. Tal série é chamada de <u>série geométrica</u>.

Exemplo: A série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ é uma série geométrica com $a=1$ e $r = \frac{1}{2} < 1$. Portanto converge e sua soma é $\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$.

<u>Teste do n-ésimo termo</u>: Se uma série $\sum a_n$ converge então $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Prova: Temos que

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

Como $\sum a_n$ converge então $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ e $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S$ daí

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

Exemplo: 1) A série $\sum (-1)^n$ diverge pois $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \nexists$ logo pelo Teste do n-ésimo termo a série $\sum (-1)^n$ não pode convergir.

2) A série $\sum \frac{n}{n+1}$ diverge, pois $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$.

Série Harmônica

A série harmonica é a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Temos que

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$S_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}$$

Logo,

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \quad (*)$$

Se a série $\sum \frac{1}{n}$ fosse convergente então as sequências de somas parciais $\{S_n\}$ e $\{S_{2n}\}$ convergiriam e teriam o mesmo limite, e dessa forma, $\lim_{n\to\infty} S_{2n} - S_n = 0$. Mas isto não é possível, pois a desigualdade $(*)$ implica em $\lim_{n\to\infty} \{S_{2n} - S_n\} \geq 1/2$ se o limite existisse. Logo, $\sum \frac{1}{n}$ diverge e

$$\sum \frac{1}{n} = +\infty.$$

Consideremos a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$. Note que $\frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ e

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Logo:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 1$$

Portanto $\sum \frac{1}{n^2+n}$ converge para 1. (série de encaixe).

De um modo geral a série de encaixe pode ser dada por $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - b_{n+1})$. Se b_n convergir então $\sum(b_n - b_{n+1}) = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_{n+1}$.

Note que se uma série $\sum a_n$ converge então necessariamente $\lim a_n = 0$. Mas se $\lim a_n = 0$ não implica que $\sum a_n$ convirja.

O acréscimo ou omissão de um nº finito de termos não altera ou a convergência ou divergência de uma série. Podemos daí deduzir que uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se, e somente se, $\lim_{p\to\infty} \sum_{n=p}^{\infty} a_n = 0$.

<u>Critério de Cauchy</u>: Uma série $\sum a_n$ converge se, somente se, dado $\varepsilon > 0$ existe n_0:

$$|S_n - S_m| < \varepsilon, \quad \forall\, n > m \geq n_0.$$

<u>Teorema</u>: Se as séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diferem apenas em uma quantidade finita de termos, então ou ambas convergem ou ambas divergem.

Prova: Por hipótese, existe um índice n_0 tal que $a_n = b_n$, $\forall n \geq n_0$

Logo:

$$S_n = a_1 + \ldots + a_{n_0} + b_{n_0+1} + \ldots + b_n$$

$$T_n = b_1 + \ldots + b_{n_0} + b_{n_0+1} + \ldots + b_n$$

daí:

$$S_n = S_{n_0} - T_{n_0} + T_n \text{ e } \lim S_n = S \text{ então } \lim_{n\to\infty} T_n = S + T_{n_0} - S_{n_0}.$$

e se $\lim S_n \nexists$ então $\lim T_n \nexists$.

Exemplo: As séries $\sum \frac{1}{n}$ e $\sum \frac{1}{n-5}$ são divergentes e as séries $\sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$ e $\sum_{n=13}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ são convergentes.

Como consequência do Teorema das séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ são ambas convergentes ou ambas divergentes.

<u>Teorema:</u> Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ séries numéricas e seja $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ convergem então $\sum (a_n + b_n)$ convergem e $\sum c a_n$ converge.

(b) Se $\sum a_n$ converge e $\sum b_n$ diverge então $\sum (a_n + b_n)$ diverge.

(c) Se $\sum a_n$ diverge e $\alpha \neq 0$ então $\sum \alpha a_n$ diverge.

Prova: (a) Sejam S_n a soma parcial de ordem n de $\sum a_n$ e T_n a de $\sum b_n$ então

$\lim_{n\to\infty} S_n + T_n = S + T$. Logo, $\sum a_n + b_n$ converge. De modo análogo,

$\sum c a_n$ converge.

(b) Se $\lim S_n = S$ e $\lim T_n$ não existe. Vamos supor que $\sum (a_n + b_n)$ converge. Mas $\sum b_n$ diverge e, $\sum b_n = \sum (a_n + b_n - a_n)$ converge. Absurdo!

(c) Se $V_n = \alpha S_n$ e se V_n convergisse então $S_n = \frac{1}{\alpha} V_n$ convergiria o que é absurdo.

Obs.: Se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ divergem nada podemos afirmar sobre $\sum (a_n + b_n)$ que pode convergir ou não. Exemplo $\sum \frac{1}{n} + \frac{(-1)}{n} = 0$ converge, mas $\sum \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \sum \frac{2}{n}$ diverge.

SÉRIES DE TERMOS POSITIVOS

Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é uma série de termos positivos se $a_n \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Note que quando $\sum a_n$ é uma série de termos positivos então a sequência de somas parciais (S_n) dessa série é não-decrescente, isto é,

$$S_1 \leq S_2 \leq \ldots \leq S_n \leq \ldots$$

Logo, para que a série $\sum a_n$ convirja basta mostrar que (S_n) é limitada.

Teste de Comparação: Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ séries de termos positivos.

Temos que:

(1) Se $a_n \leq b_n$, para todo n e se $\sum b_n$ converge então $\sum a_n$ converge.

(2) Se $a_n \geq b_n$, para todo n e se $\sum b_n$ diverge então $\sum a_n$ diverge.

Prova: (1) Suponha que $\sum a_n$ e $\sum b_n$ sejam séries de termos positivos com $\sum b_n$ convergente e suponha que

$$a_n \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Seja $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ e $T_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ então

$$S_n \leq T_n$$

Como $\sum b_n$ converge então $\lim_{n\to+\infty} T_n$ existe. Logo, (T_n) é limitada, desse modo, $\exists\, M > 0$ tq $T_n \leq M$. Assim

$$S_n \leq M, \forall n$$

Segue que, (S_n) é convergente o que implica $\sum a_n$ convergente.

(2) Se $\sum b_n$ diverge e $a_n \geq b_n$, $\forall n$. Logo,

$$S_n \geq T_n, \forall n$$

Como $\sum b_n$ diverge então $\lim_{n\to+\infty} T_n = +\infty$. Assim

$$\lim_{n\to+\infty} S_n \geq \lim_{n\to+\infty} T_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = +\infty \Rightarrow \sum a_n \text{ diverge.}$$

Exemplo: Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+n}$ diverge.

De fato, $n+\sqrt{n} \leq 2n \Rightarrow \frac{1}{2n} < \frac{1}{n+\sqrt{n}}$. Como $\sum \frac{1}{2n}$ diverge então pelo Teste de Comparação $\sum \frac{1}{n+\sqrt{n}}$ diverge.

Exemplo 2: Analise sobre a convergência ou divergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+n^2}.$$

Solução: Note que $n^3+n^2 > n^2+n$ o que implica

$$\frac{1}{n^3+n^2} < \frac{1}{n^2+n}, \forall n$$

Como $\sum \frac{1}{n^2+n}$ converge então, pelo Teste de Comparação, a série

$\sum \frac{1}{n^3+n^2}$ converge.

Teste da Integral

Teorema: (Teste da Integral) Seja $f: [1,\infty) \to \mathbb{R}$ contínua e suponhamos que f é positiva e monótona decrescente, isto é,

a) $f(x) \geq 0$, $\forall x \geq 1$

b) $f(x) \leq f(y)$, $\forall x \leq y$.

Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ é convergente se $\int_1^{\infty} f(x)dx$ for convergente.

E $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ é divergente se $\int_1^{\infty} f(x)dx$ for divergente.

Prova: Seja $f(x)$ função monótona decrescente e positiva. Temos que

$$f(2)+\dots+f(n) \leq \int_1^n f(x)dx \leq f(1)+\dots+f(n-1)$$

ou

$$S_n - f(1) \leq \int_1^n f(x)dx$$

ou ainda

$$S_n \leq f(1) + \int_1^n f(x)dx \leq \int_1^{\infty} f(x)dx + f(1)$$

no limite

S_n é limitada então $\sum f(n)$ é convergente.

De modo análogo, como

$$\int_1^n f(x)dx \leq S_{n-1} \text{ se } \int_1^{\infty} f(x)dx = +\infty \text{ então}$$

$\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = +\infty$. Logo, $\sum f(n)$ diverge.

Exemplo: (a) Seja $f(x) = \frac{1}{x^2}$, temos que $f(x)$ é positiva e decrescente já que $f'(x) = -\frac{2}{x^3} \leq 0$. A integral $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}dx$ converge e, portanto, $\sum \frac{1}{n^2}$ converge

(b) $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$ atende às condições exigidas nos

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x\ln x}dx = \lim_{B\to\infty} \left[\ln(\ln x)\right]_2^B = +\infty$$

Logo $\sum \frac{1}{n\ln n}$ diverge. $(n \geq 2)$

(c) $f(x) = x e^{-x^2}$, $\int_1^{\infty} x e^{-x^2}dx = \frac{1}{2e} \Rightarrow \sum n e^{-n^2}$ converge.

A série da forma $\sum \frac{1}{n^p}$ é uma p-série. Analisemos sobre a convergência ou divergência da mesma.

Teorema: A p-série $\sum \frac{1}{n^p}$ converge se $p > 1$ e diverge se $p \leq 1$.

Prova:
$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p} = \lim_{B\to\infty} \int_1^B \frac{1}{x^p}dx = \lim_{B\to\infty}\left[B^{1-p}-1\right] \quad , p\neq 1$$

Se $p<1$, $\lim_{B\to\infty} B^{1-p} = +\infty$. Se $p>1$ $\lim_{B\to\infty} B^{1-p} = 0$.

Teste (Forma limite do Teste de Comparação): Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ duas séries de termos positivos e seja $l = \lim a_n/b_n$.

a) Se $l>0$ então as séries $\sum a_n$ e $\sum b_n$ são ambas convergentes ou ambas divergentes.

b) Se $l=0$ e $\sum b_n$ converge então $\sum a_n$ converge.

c) Se $l=+\infty$ e $\sum b_n$ diverge então $\sum a_n$ diverge.

Demonstração: Fixado $\varepsilon = 1/2$ podemos encontrar n_0 tal que
$$\frac{l}{2} b_n \leq a_n \leq \frac{3}{2} l b_n \quad , \forall\, n \geq n_0$$
Assim, usando o Teste de comparação provamos (a). ∎

Exemplo: Para comparar séries do tipo $\sum \frac{6\sqrt{n}}{5n+4}$ olhamos os termos dominantes no denominador e numerador, neste caso, escolhemos $\sum \frac{\sqrt{n}}{n} = \sum \frac{1}{\sqrt{n}}$. Temos que $\lim_{n\to\infty} \frac{6\sqrt{n}}{5n+4}\sqrt{n} = \frac{6}{5} > 0$. Como $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge então $\sum \frac{6\sqrt{n}}{5n+4}$ diverge.

Exemplo 2: As séries $\sum e^{-n^2}$ e $\sum \sin^4\left(\frac{1}{n}\right)$. Temos que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{-n^2}}{1/n^2} = 0 \quad e \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sin^4(1/n)}{1/n^4} = 1.$$
Logo, ambas convergem, pela forma limite do Teste de Comparação.

Teorema: (Reaguapamento) O reagrupamento de séries de termos positivos convergentes não altera a convergência da série.

Prova: Seja $S_n = a_1 + \dots + a_n$, $T_n = b_1 + \dots + b_n$ onde $b_1 = a_2$, $b_2 = a_5, \dots$

Existe n_0: $S_n \leq T_m$ e como $\lim T_m = T \Rightarrow S_n$ é convergente. Também existe n_0, $S_n \geq T_m$ e como $\lim S_n = S \Rightarrow T_m$ é convergente.

Observação: Dadas duas séries $\sum a_n$ e $\sum b_n$ convergentes então $\sum a_n b_n$ não é necessariamente convergente. Além disso,

$$\sum a_n b_n \neq \sum a_n \sum b_n = \sum c_n$$

$\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge mas

$\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \sum \frac{1}{n}$ diverge

Temos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}$$

SÉRIES ALTERNADAS

Séries do tipo $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ é uma série alternada.

Ou seja,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \dots + (-1)^n a_n + \dots$$

Teorema (Critério de Leibniz) Seja $\{a_n\}$ uma sequência de termos positivos com as propriedades:

a) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

b) $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq \dots$, i.e., $\{a_n\}$ é monótona decrescente.

Então a série alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge.

Prova: Temos que para a série $\sum (-1)^{n-1} a_n$

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + (a_5 - a_6) + \dots + (a_{2n-1} - a_{2n})$$

ou seja, $\{S_{2n}\}$ é monótona crescente, e reagrupando seus termos, temos

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \dots - (a_{2n-1} - a_{2n}) \leq a_1$$

logo, $\{S_{2n}\}$ é limitada. Segue que existe $S = \lim_{n\to\infty} S_{2n}$.

Agora como

$$S_{2n+1} = a_1 - a_2 + \dots + a_{2n-1} - a_{2n} + a_{2n+1}$$

$$= S_{2n} + a_{2n+1}$$

Passando o limite, $\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = S + 0$.

Segue que, $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, o que implica em $\sum (-1)^{n-1} a_n$ convergir.

Exemplo 1: A série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ converge, pois $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ e $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$, $\forall n$.

Exemplo 2: A série $\sum \frac{(-1)^n}{n 5^n}$ também converge pelo Teste de Leibniz.

Exemplo 3: A série $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2 - 5}$ também converge por esse Teste.

Teorema: O erro que se comete ao aproximar a soma da série $\sum (-1)^n a_n$ por S_n é de a_{n+1}.

Prova: De fato,

$$|S_n - S| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k (-1)^k\right| = |(-1)^{k+1} a_{k+1} + (-1)^{k+2} a_{k+2} + \dots|$$

$$= |(-1)^{k+1}[a_{k+1} - a_{k+2} + a_{k+3} - \dots]| \qquad (k=n)$$

$$= a_{k+1} - a_{k+2} + a_{k+3} - a_{k+4} + \dots \leq a_{k+1}.$$

Exemplo 1: Para a série do exemplo 2 tem que

$$S_4 = -\frac{1}{5} + \frac{1}{50} - \frac{1}{375} + \frac{1}{2500} \cong -0{,}18$$

o erro cometido é de $a_5 = \frac{1}{15625} \cong 6{,}4 \times 10^{-3}$.

CONVERGÊNCIA ABSOLUTA

Uma série $\sum a_n$ converge absolutamente se $\sum |a_n|$ converge. Por exemplo, a série $\sum \frac{(-1)^n}{2^n}$ converge absolutamente pois $\sum \frac{1}{2^n}$ é uma série geométrica convergente.

Teorema: Se uma série $\sum a_n$ é absolutamente convergente então ela é convergente.

Prova: Suponha que $\sum a_n$ converge absolutamente então $\sum |a_n|$ converge. Suponha que $\sum a_n$ não convirja. Podemos considerar $b_n = a_n + |a_n|$. Como $-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$. Então

$$0 \leq b_n \leq 2|a_n|.$$ Logo, $\sum b_n$ converge. Se $\sum a_n$ não convergisse então

$$\text{diverge} \quad \sum a_n = \sum (a_n + |a_n|) - |a_n| \quad \text{converge (absurdo!)}$$

Uma série $\sum a_n$ tal que $\sum |a_n|$ não converge é dita condicionalmente convergente. Exemplo, $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge mas $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Logo, $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ é condicionalmente convergente.

Exemplo 2: A série $\sum \frac{\operatorname{sen} n}{n^2}$ converge ou diverge.

Note que $|\operatorname{sen} n| \leq 1$ daí $\frac{|\operatorname{sen} n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$. Portanto, $\sum \frac{|\operatorname{sen} n|}{n^2}$ converge daí $\sum \frac{\operatorname{sen} n}{n^2}$ converge absolutamente.

Teste da Razão e da Raiz

Teorema (Teste da Razão): Consideremos uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ com $a_n \neq 0$. Seja

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$. (i) Se $l<1$ então $\sum a_n$ converge absolutamente

(ii) Se $l>1$ ou $l=+\infty$ então $\sum a_n$ diverge.

(iii) Se $l=1$ nada se conclui.

Prova: Se $\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l < 1$ então $\exists\ 0<r<1$ tal que

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < r \ , \ \forall\, n > n_0$$

assim $|a_{n_0+k}| \leq r^k |a_{n_0}|$

Como $\sum_{k=1}^{\infty} r^k$ converge então $\sum |a_{n_0}| r^k$ converge e portanto $\sum_{n=n_0+k}^{\infty} a_n$ converge absolutamente o que implica em $\sum a_n$ convergir absolutamente.

Se $l>1$ então $|a_n| \geq |a_{n_0}| \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, já que $|a_{n_0}|>0$.

Logo, $\sum a_n$ diverge.

Exemplo: Considere as séries $\sum \frac{3^n}{n!}$ e $\sum \frac{3^n}{n^2}$ analise sobre a convergência ou divergência das mesmas.

sol.: 1) $\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{3^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n+1} = 0 < 1$ $\left(\sum \frac{3^n}{n!}\text{ converge}\right)$

2) $\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1)^2}\cdot\frac{n^2}{3^n} = 3 > 1$. $\left(\sum \frac{3^n}{n^2}\text{ diverge}\right)$

Exemplo 2: Considere a série $\sum (-1)^n \frac{n^2+4}{2^n}$. Converge ou diverge?

Teste da Razão

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n\left((n+1)^2+4\right)}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{(-1)^n\left(n^2+4\right)}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{n^2+2n+5}{n^2+4}\right) = \frac{1}{2} < 1.$$

A série converge.

Teorema (Teste da Raiz): Seja $\sum a_n$ uma série numérica.

Seja $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = l$. Temos que

(i) Se $l<1$ então $\sum a_n$ converge absolutamente.

(ii) Se $\ell > 1$ então $\sum a_n$ diverge.
(iii) Se $\ell = 1$ nada se conclui.

Prova: (i) Suponha $\ell < 1$ então existe $0 < r < 1$ tal que

$$\sqrt[n]{|a_n|} < r, \ \forall n > n_0$$

ou

$$|a_n| < r^n, \ \forall n > n_0$$

Como $\sum r^n$ converge segue que $\sum |a_n|$ converge.

(ii) Se $\ell > 1$ então $\exists\, 0 < r$

$$\sqrt[n]{|a_n|} > r \Rightarrow |a_n| > r^n \quad \text{com } \lim_{n\to\infty} r^n = +\infty$$

então $\lim |a_n| = +\infty$ o que implica em $\sum |a_n|$ diverge.
Logo, $\sum a_n$ diverge, pois se convergisse $\lim a_n = 0$ o que implicaria em $\lim |a_n| = 0$ o que é absurdo.

Exemplo: Considere a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$. Pelo Teste da Raiz
$\lim \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \frac{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}}{2} = \frac{1}{2} < 1$. Logo $\sum \frac{n}{2^n}$ converge.

Exemplo 2: A série $\sum \frac{n^n}{2^n}$ diverge pois $\lim \sqrt[n]{\frac{n^n}{2^n}} = \lim \frac{n}{2} = +\infty$.

Exemplo 3: A série $\sum \frac{1}{n}$ é tal que $\lim \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$. A série $\sum \frac{1}{n^2}$ também satisfaz $\lim \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = \lim \frac{1}{n^{2/n}} = 1$.
A série $\sum \frac{1}{n}$ diverge e $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

$$\lim (n^{1/n})^2 = (\lim n^{1/n})^2 = 1^2 = 1.$$

Séries	Teste	Condições	Conclusão
$\sum a_n$	n-ésimo termo	$\lim a_n \neq 0$	diverge
$\sum a_n, \sum b_n$	Comparação	$a_n < b_n, \forall n$ $\sum b_n$ conv. $a_n > b_n, \forall n$ $\sum b_n$ div.	$\sum a_n$ converge $\sum a_n$ diverge
$\sum f(n)$	Integral	f positiva, contínua e decrescente $\int_1^{\infty} f(x)$ conv $\int_1^{\infty} f(x)dx$ diverge	converge diverge.
$\sum (-1)^n a_n$	Leibniz	$\lim a_n = 0$ e $a_n \geq a_{n+1}, \forall n$	converge.

$\sum a_n$	Teste da Razão $\lim \left\|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\| = \ell$	$\ell < 1$ $\ell > 1$	converge absol. diverge
$\sum a_n$	Teste da Raiz $\lim \sqrt[n]{\|a_n\|} = \ell$	$\ell < 1$ $\ell > 1$	converge absol. diverge.

SÉRIES DE POTÊNCIAS

Uma série de potências de x é uma série do tipo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

Exemplo: A série

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

é uma série de potências. Observe que ela é uma série geométrica de razão $r = x$. Como a série geométrica só converge se $|r| < 1$ então a série $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ só converge se $|x| < 1$. Neste caso, sua soma é $S = \frac{1}{1-x}$. Podemos então, afirmar que:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots \quad , \quad |x| < 1.$$

Dada uma série de potências de x, $\sum a_n x^n$, usando o teste da razão temos que

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = |x| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |x| . \ell < 1$$

logo, $|x| < \frac{1}{\ell} = R$. R é o raio de convergência da série $\sum a_n x^n$.

Teorema: Seja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ uma série de potências de x.

Se $\sum a_n x^n$ converge para um certo $c \neq 0$ e diverge para um certo $d \neq 0$ com $|c| < |d|$. Então $\sum a_n x^n$ converge para todo x tal que $|x| < |c|$ e diverge para todo x tal que $|x| > |d|$.

Teorema 2: Seja $\sum a_n x^n$ uma série de potências de x. Então somente uma das seguintes situações ocorre

1) A série converge somente para $x = 0$. $(R = 0)$.
2) A série converge para todo x real. $(R = +\infty)$
3) Existe $R > 0$ tal que $\sum a_n x^n$ converge para todo x tal que $|x| < R$ e diverge para todo x tal que $|x| > R$.

Prova do Teorema

Teorema 3: Seja $\sum a_n x^n$ uma série de potencias de x. Se essa série tem raio de convergência R. Então ela pode ser derivada termo a termo ou integrada termo, isto é,

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \frac{d}{dx}\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots\right)$$

$$= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + n a_n x^{n-1} + \dots$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

e
$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x t^n \, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$$

As novas séries obtidas acima, por derivação ou integração termo a termo, têm o mesmo raio de convergência R.

Exemplo: Obtenha uma série que represente a função $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$.

Solução: Observe que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+x}\right) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

Como
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + \dots$$

usando o teorema 3 obtemos

$$\frac{-1}{(1+x)^2} = \frac{d}{dx}\left(1/_{1+x}\right) = -1 + 2x - 3x^2 + \dots + n(-1)^n x^{n-1} + \dots$$

daí
$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 + \dots + n(-1)^{n+1} x^{n-1} + \dots \quad , \ |x| < 1$$

$(-1,1)$ int. conv.

Exemplo 2: Obtenha uma série de potências de x que represente a função $\ln(1+x)$.

Solução:
$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \int_0^x \left[1 - t + t^2 - t^3 + \dots + (-1)^n t^n + \dots\right] dt$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + \dots \quad , \ |x| < 1$$

$(-1,1]$ int. conv.

Exemplo 3: Considere a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Veremos que esta série é absolutamente convergente para todo $x \in \mathbb{R}$. De fato,

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1$$

Pelo Teste da Razão a série $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge absolutamente para todo x real. Que função essa série representa?

Seja $f(x) = \sum \frac{x^n}{n!}$ então

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = f(x)$$

Logo,

$$f'(x) = f(x) \quad \text{ou} \quad \frac{f'(x)}{f(x)} = 1$$

integrando de 0 a x, temos:

$$\int_0^x \frac{f'(t)}{f(t)}\, dt = \int_0^x 1\, dt$$

ou

$$\Big[\ln f(t)\Big]_0^x = x$$

daí

$$\ln f(x) - \ln f(0) = x$$

ou ainda

$$\ln \frac{f(x)}{f(0)} = x \quad \text{daí} \quad \frac{f(x)}{f(0)} = e^x \Rightarrow f(x) = f(0)e^x$$

Como $f(0) = 1$, então $f(x) = e^x$. Portanto,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Exemplo 4: Se na série de e^x, fizermos $x = t^2$, obtemos

$$e^{t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{n!}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Integrando e^{t^2} de 0 a 1, obtemos:

$$\int_0^1 e^{t^2}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\, n!}.$$

Uma aproximação numérica para $\int_0^1 e^{t^2} dt$ é

$$\int_0^1 e^{t^2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{42} \approx 1{,}4571.$$

Da série

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \quad, |x|<1$$

obtemos

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}, \quad |x|<1$$

Integrando, termo a termo, de 0 a x, para $-1<x<1$, temos

$$\operatorname{arctg} x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \quad , \quad -1\leq x\leq 1.$$

Note que

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{1+(x-1)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n \quad , \quad |x-1|<1$$

Assim, integrando de 1 a x, obtemos:

$$\ln x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n (x-1)^{n+1}}{n+1} \quad , \quad 0<x<2.$$

Exemplo 5: Considere a série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^{n+1}}{n}$ analisemos sobre o intervalo de convergência da série.

Usando o Teste da Razão

$$\lim\left|\frac{(x-3)^{n+2}}{n+1}\cdot\frac{n}{(x-3)^{n+1}}\right|=\lim|x-3|\frac{n}{n+1}=|x-3|$$

essa série converge absolutamente se $|x-3|<1$, que equivale a $2<x<4$ e diverge se $|x-3|>1$. No caso em que $|x-3|=1$ o que resulta em $x=4$ e $x=2$. Substituindo $x=4$, obtemos $\sum\frac{1}{n}$ diverge se $x=2$ obtemos $\sum\frac{(-1)^n}{n}$ converge. Logo, o intervalo de convergência é $2\leq x<4$.

Polinômios de Taylor

Quando uma função é representada por uma série então temos que

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n+\dots$$

Levantamos então as seguintes questões. Que relação há entre $f(x)$ e os a_n? Em que situação a série representa função?

Vamos dar uma resposta a 1ª questão.

Seja $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, temos que se $f \in C^{\infty}$ então

$$f(0) = a_0$$

e

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{o que implica } f'(0) = a_1$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \quad \text{o que implica } f''(0) = 2!\,a_2$$

$$\vdots$$

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) a_n x^{n-k} \quad \text{o que implica } f^{(k)}(0) = k!\,a_k$$

$$\vdots$$

daí, concluímos que $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$. Logo,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

Essa série é conhecida como <u>série de Maclaurin</u> de f.

A <u>série de Taylor</u> de f em torno de um ponto x_0 é

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots$$

Considere a função $f(x) = \operatorname{sen} x$ vamos calcular a série de Maclaurin de f. Temos que

$$f(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow f(0) = \operatorname{sen} 0 = 0$$
$$f'(x) = \cos x \Rightarrow f'(0) = \cos 0 = 1$$
$$f''(x) = -\operatorname{sen} x \Rightarrow f''(0) = -\operatorname{sen} 0 = 0$$
$$f'''(x) = -\cos x \Rightarrow f'''(0) = -\cos 0 = -1$$
$$f^{(IV)}(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow f^{(IV)}(0) = \operatorname{sen} 0 = 0$$

só os termos ímpares são diferentes de zero. Analisemos esses termos:

$\vdots$ repetição

$$f^{(1)}(0) = f^{(2\cdot 0+1)}(0) = (-1)^0 = 1$$
$$f^{(3)}(0) = f^{(2\cdot 1+1)}(0) = (-1)^1 = -1$$
$$f^{(5)}(0) = f^{(2\cdot 2+1)}(0) = (-1)^2 = 1$$

Logo:

$$f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$$

Assim

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

Essa é a série de Maclaurin de sen x.

Conhecendo a série de Maclaurin de $\operatorname{sen} x$ podemos determinar a série de Maclaurin de $\cos x$, por derivação termo a termo,

$$\cos x = \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

EX.1: Encontre a série de Taylor de $\ln x$ em torno de $x=1$.

Solução: Tome

$$f(x) = \ln x \Rightarrow f(1) = \ln 1 = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(1) = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow f''(1) = -1$$

$$f'''(x) = \frac{2}{x^3} \Rightarrow f'''(1) = 2$$

$$f^{(iv)}(x) = \frac{-3!}{x^4} \Rightarrow f^{(iv)}(1) = -3!$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} \Rightarrow f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

Logo,

$$f(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n} + \dots$$

com $|x-1| < 1$.

POLINÔMIO DE TAYLOR

O polinômio de Taylor de uma função $f(x)$ em torno de $x=0$ é

$$p_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

Ele também é conhecido como polinômio de Maclaurin de f.

Por exemplo, o polinômio de Taylor de $f(x) = \exp(x)$ é

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}.$$

Teorema (Fórmula de Taylor com Resto) Seja $f(x)$ uma função de classe C^∞ num intervalo que contém a. Dado qualquer x nesse intervalo existe um ξ entre a e x tal que

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \quad \text{onde} \quad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

e onde

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Além disso, a sequência $P_n(x)$ converge para $f(x)$ se, e somente se

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0. \qquad \left(\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(x). \right)$$

Prova: Considere a função $G:[a,x] \to \mathbb{R}$ dada por

$$G(t) = f(x) - \left[f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n \right] - R_n(x)\frac{(x-t)^{n+1}}{(x-a)^{n+1}}$$

onde $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$. Observe que G tem as seguintes propriedades

a) $G(a) = f(x) - P_n(x) - R_n(x) = 0$

b) $G(x) = 0$

c) G é contínua no intervalo fechado $[a,x]$ e derivável no intervalo aberto (a,x). Logo, pelo Teorema de Rolle existe um ξ tal que $a<\xi<x$ e $G'(\xi)=0$. Mas

$$G'(t) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n - (n+1)R_n(x)\frac{(x-t)^n}{(x-a)^{n+1}}$$

e portanto, $G'(\xi)=0$ implica em $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$. ■

Note que a soma parcial de ordem n da série $\sum_{n=0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ é $S_n = P_n(x)$. Logo,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} P_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left[f(x) - R_n(x)\right] = f(x) - \lim_{n\to\infty} R_n(x) = f(x).$$

Logo,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Exemplo 1: Mostre que a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, realmente, representa a função $f(x) = e^x$ para todo x real.

Solução: Já vimos que $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Falta mostrar que esta série representa e^x. Pelo Teorema anterior (Fórmula do Resto).

$$e^x = P_n(x) + R_n(x)$$

onde

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

e

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{e^{\xi}\, x^{n+1}}{(n+1)!}, \quad 0<\xi<x \text{ ou } x<\xi<0.$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ então

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{e^{\xi}\, x^{n+1}}{(n+1)!}\right| = 0$$

Logo, a série representa $f(x) = e^x$.

Exemplo 2: O mesmo vale para a função $f(x) = \operatorname{sen} x$, Temos que $f(0)=0$, $f'(0)=1$, $f''(0)=0$, $f'''(0)=-1, \dots$ Além disso

$$f^{(n+1)}(\xi) = \begin{cases} \pm \operatorname{sen}\xi, & n \text{ par} \\ \pm \cos\xi, & n \text{ ímpar} \end{cases}$$

Logo, o resto $|R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)\, x^{n+1}}{(n+1)!}\right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$

e $\lim\limits_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0$. Logo, $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ e $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}(-1)^n$ representa a função $\operatorname{sen} x$.

Observação: Uma função $f(x)$ é analítica em $x=a$ quando ela puder ser representada por sua série de Taylor em algum intervalo aberto em torno de a.

Um outro resultado que podemos deduzir da fórmula

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

é que se aproximarmos o valor de $f(x)$ por $P_n(x)$ o erro que cometemos é da ordem de $|R_n(x)|$.

Exemplo 3: Encontre o valor aproximado de $e^{-0.04}$, com erro menor do que 5×10^{-4}.

Solução: Temos que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$$

Se aproximarmos

$$e^{-0.04} \approx 1 + 0{,}04 + \frac{(0{,}04)^2}{2!}$$

então o erro que cometemos será de

$$|R_n(-0{,}04)| \leq \frac{|(-0{,}04)|^3}{3!} \approx \frac{0{,}000064}{3!}$$

SÉRIE BINOMIAL

Binômio de Newton

$$(x+y)^k = x^k + kx^{k-1}y + \frac{k(k-1)}{2!}x^{k-2}y^2 + \dots + y^k$$

ou simbolicamente

$$(x+y)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x^j y^{k-j} \quad ; \quad \binom{k}{j} = \frac{k!}{j!\,(k-j)!} = \frac{k(k-1)\dots(k-j+1)}{j!}$$

Fazendo nesta relação $y=1$, obtemos

$$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{k(k-1)\dots(k-j+1)}{j!}x^j + \dots + x^k$$

Motivados por essa fórmula, procuramos um desenvolvimento em série de potências para a função $f(x) = (1+x)^\alpha$, onde α é um número real qualquer. A <u>série binomial</u>

$$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \dots$$

onde o n-ésimo é

$$a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

logo,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}|x|\left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right| = |x|$$

portanto, a série binomial converge absolutamente quando $|x|<1$ e diverge se $|x|>1$. Se tal série converge para uma função g então

$$g(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

e por derivação termo a termo

$$g'(x) = \alpha + \alpha(\alpha-1)x + \dots + \frac{\alpha n(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^{n-1} + \dots$$

Assim $g'(x) + xg'(x) = \alpha g(x)$ ou

$$(1+x)g'(x) - \alpha g(x) = 0$$

$$g'(x) = \frac{\alpha}{1+x}g(x)$$

Daí

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{g(x)}{(1+x)^\alpha}\right] = \frac{(1+x)g'(x) - \alpha g(x)}{(1+x)^\alpha}$$

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} = \int \frac{\alpha}{1+x}$$

ou

$$\frac{g(x)}{(1+x)^\alpha} = C$$

$$\ln\frac{g(x)}{g(0)} = \alpha\ln(1+x) = \ln(1+x)^\alpha$$

Como $g(0)=1$, então $g(x) = (1+x)^\alpha$.

$$g(x) = g(0)\,(1+x)^\alpha$$
$$g(x) = (1+x)^\alpha$$

Exemplo 1: Ache a série binomial $(1+x)^{1/2}$.

Temos que $(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\dots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}x^n + \dots$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots + (-1)^n \frac{1.3\dots(2n-3)}{2^n\, n!}x^n + \dots$$

SÉRIE DE FOURIER

Uma série de Fourier é uma série do tipo

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

Dada uma função $f: [-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$, extendida periodicamente com período 2π a toda reta $\mathbb{R}$, qual a sua série de Fourier? Ou seja,

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx$$

Que relação há entre $f(x)$ e sua série de Fourier?

Primeiro analisemos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = \begin{cases} \pi, & \text{se } n = m \\ 0, & \text{se } n \neq m \end{cases}$$

analogamente

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} mx \, dx = \begin{cases} \pi, & \text{se } n = m \\ 0, & \text{se } n \neq m \end{cases}$$

e

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \operatorname{sen} mx \, dx = 0, \quad \forall\, n, m$$

Assim, se tivermos a igualdade

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

e multiplicarmos $f(x)$ por $\cos nx$ obtemos

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = a_0$$

multiplicando f(x) por $\cos mx$ e integrando temos

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx = a_0\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\,dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen} nx\cos mx\,dx$$

daí

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx = a_m\pi$$

logo,

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx, \quad \forall\, m \geq 0 \qquad (1)$$

de forma análoga

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nx\,dx, \quad \forall\, n \geq 1 \qquad (2)$$

<u>Exemplo</u>: Considere $f(x) = x$ para $-\pi < x < \pi$, f periódica de período 2π. Calcule sua série de Fourier.

Solução: Note que $f(x) = x$, $-\pi < x < \pi$, $f(x+2\pi) = f(x)$ é estendida periodicamente de forma ímpar. Basta calcular os b_n, já que os a_n são nulos. Desse modo,

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\operatorname{sen} nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\operatorname{sen} nx\,dx$$

integrando por partes, temos $u = x$, $du = dx$, $dv = \operatorname{sen} nx\,dx$, $v = -\frac{\cos nx}{n}$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\operatorname{sen} nx\,dx = -\frac{2}{\pi}\left[\frac{x\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}\,dx$$

$$= -2\,\frac{\cos n\pi}{n} = 2\,\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Logo,

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{n}\operatorname{sen} nx \quad \text{(Série de Fourier de } f(x))$$

Definição: Uma função f é dita <u>seccionalmente contínua</u> se ela possui um nº finito de descontinuidade de 1ª espécie. Em cada intervalo

limitado. Dado $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ f é seccionalmente contínua se dado $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$

$\exists\ a_i, b_i$, $i = 1,\ldots,n$ tais que $f(a_i^+), f(a_i^-)$ $f(b_i^+), f(b_i^-)$ existem.

Definição: Uma função é seccionalmente diferenciável se ela e sua derivada for seccionalmente contínua.

Teorema de Fourier: Uma função $f: [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ extendida periodicamente com período 2π que seja seccionalmente diferenciável nesse intervalo, então sua série de Fourier converge para

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}.$$

Observação: Nos pontos do intervalo $[-\pi, \pi]$ onde f é contínua então

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx).$$

Dada uma função $f: [0, \pi] \to \mathbb{R}$ podemos extender essa função de maneira par ou ímpar conforme precisemos de sua série de Fourier.

Extensão par

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq \pi \\ f(-x), & -\pi \leq x \leq 0 \end{cases}, \quad \hat{f}(x + 2\pi) = \hat{f}(x)$$

Extensão ímpar

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq \pi \\ -f(-x), & -\pi \leq x \leq 0 \end{cases}, \quad \tilde{f}(x + 2\pi) = \tilde{f}(x)$$

Se uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é par sua série de Fourier é uma série de cossenos, isto é,

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é ímpar sua série de Fourier é ímpar, ou seja,

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nx$$

É bom lembrar que as duas funções f acima são extendidas periodicamente de período 2π.

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função periódica de período 2π, integrável e absolutamente integrável em cada intervalo limitado, isto é, $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx < \infty$. Os números a_n e b_n dados por (1) e (2) são definidos como os coeficientes de Fourier da função f.

FORMA GERAL

Dada $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periódica de período $2L$, integrável e absolutamente integrável, podemos calcular seus coeficientes de Fourier por (1)' e (2)' e assim podemos escrever

$$(3) \qquad f(x) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right)$$

A série do lado direito é a <u>série de Fourier</u> de f. Para esse caso,

$$(1)' \qquad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx \,, \quad n \geq 0$$

$$(2)' \qquad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\, dx, \quad n \geq 1$$

<u>Teorema Fourier</u>: Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função seccionalmente diferenciável e de período $2L$. Então a série de Fourier da função f, converge em cada ponto x, para $\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$, isto é,

$$(4) \qquad \frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)] = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right)$$

Lembrando que: $f(x^-) = \lim_{y \to x^-} f(y)$, $f(x^+) = \lim_{y \to x^+} f(y)$.

<u>Exercício 1</u>: Calcular a série de Fourier da função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < \pi \\ 0, & -\pi \leq x < 0 \\ f(x+2\pi) = f(x) \end{cases} .$$

<u>Solução</u>: (i) Cálculo dos coeficientes

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} dx = 1$$

e para $n \neq 0$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \cos nx\, dx = \frac{1}{\pi} \frac{\operatorname{sen} nx}{n} \Big|_0^{\pi} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \operatorname{sen} nx\, dx = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{n\pi}(1 - \cos n\pi)$$

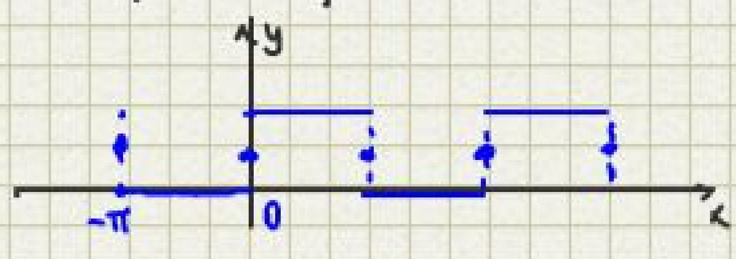
ou

$$b_{2k} = 0 \quad e \quad b_{2k-1} = \frac{2}{(2k-1)\pi}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

A série de Fourier será

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)\pi} \operatorname{sen}(2k-1)x.$$

Gráfico de f



Exercício 2: Use os resultados do exercício 1 para obter uma expressão em série para π.

Solução: No ponto $x=\pi/2$, a série de Fourier é igual a 1, em virtude do teorema de Fourier. Logo,

$$1 = \frac{1}{2} + \sum_{K=1}^{\infty} \frac{2}{(2K-1)\pi} \operatorname{sen}\left[(2K-1)\frac{\pi}{2}\right]$$

ou seja,

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{2K-1} \operatorname{sen}(2K-1)\frac{\pi}{2}$$

ou,

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots = \sum_{K=1}^{\infty} \frac{(-1)^{K-1}}{2K-1} \quad \text{(Série de Leibniz)}.$$

SÉRIES DE FUNÇÕES PARES E ÍMPARES

Se a função f é par, periódica de período $2L$, integrável e absolutamente integrável então

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx, \quad b_n = 0$$

Logo, a série de $f(x)$ é uma série de cossenos.

Se a função é ímpar, periódica de período $2L$, integrável e absolutamente integrável, então

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\, dx$$

Logo, a série de uma função ímpar é uma série de senos.

Exemplos: 1) Seja $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periódica de período $2L$ e definida por $f_1(x) = x$, para $-L \leq x \leq L$. Como f_1 é ímpar, teremos uma série de senos cujos coeficientes são

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L x \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\, dx$$

Fazendo a mudança de variável $y = \frac{n\pi x}{L}$, obtemos

$$b_n = \frac{2L}{n^2\pi^2} \int_0^{n\pi} y \operatorname{sen} y \, dy$$

Integrando por partes

$$\int_0^{n\pi} y \operatorname{sen} y \, dy = -y\cos y \Big|_0^{n\pi} + \int_0^{n\pi} \cos y \, dy = -n\pi \cos n\pi$$

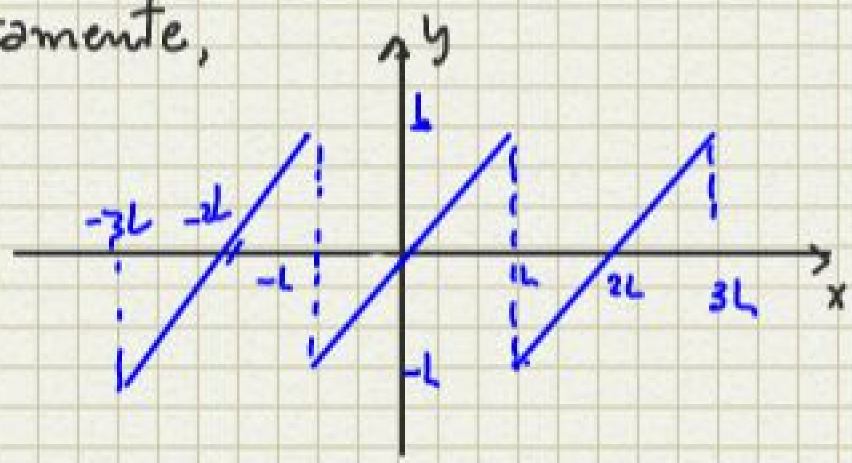
Logo,

$$b_n = \frac{2L}{n\pi} (-1)^{n+1}$$

Portanto, a série de Fourier da função f_1 é

$$f_1(x) \sim \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

Graficamente,



2) Seja $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periódica de período $2L$ e definida por

$$f_2(x) = \begin{cases} L - x, & 0 \leq x \leq L \\ L + x, & -L \leq x \leq 0 \end{cases}$$

Como f_2 é uma função par, temos uma série de cossenos, cujos coeficientes são

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L (L - x) \, dx = \frac{2}{L} \frac{L^2}{2} = L$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L (L - x) \cos \frac{n\pi x}{L} \, dx = \frac{2L}{n^2\pi^2} \left[1 - (-1)^n\right]$$

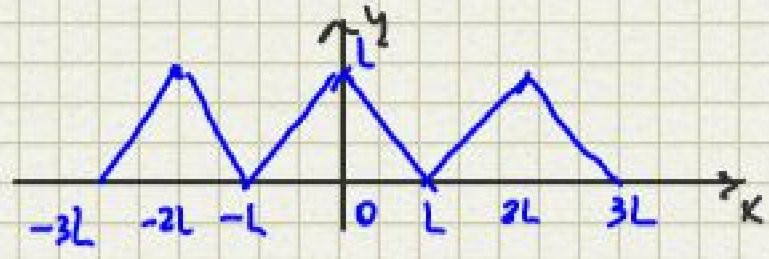
ou seja

$$a_{2k} = 0, \quad a_{2k-1} = \frac{4L}{(2k-1)^2 \pi^2}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Portanto, a série de Fourier de $f_2(x)$ é

$$f_2(x) \sim \frac{L}{2} + \frac{4L}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{L}.$$

Gráfico de $f_2(x)$



Observe que em virtude do Teorema de Fourier, o símbolo ~ pode ser substituído por =. Usando o Teorema de Fourier para $x=0$, temos

$$L = \frac{L}{2} + \frac{4L}{\pi^2}\sum_{K=1}^{\infty}\frac{1}{(2K-1)^2}$$

ou seja,

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{K=1}^{\infty}\frac{1}{(2K-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$$

EXTENSÃO DE FUNÇÕES À TODA A RETA

Dada uma função f definida num intervalo $[0,L]$ e nada dissermos sobre o período, teremos a liberdade de escolher um período qualquer T, $T>L$, e de definirmos a função do jeito que nos convier no intervalo (L,T).

Exemplo 1: Dada $f(x)=x$, $0\leq x\leq\pi$, escreva f como uma série de senos.

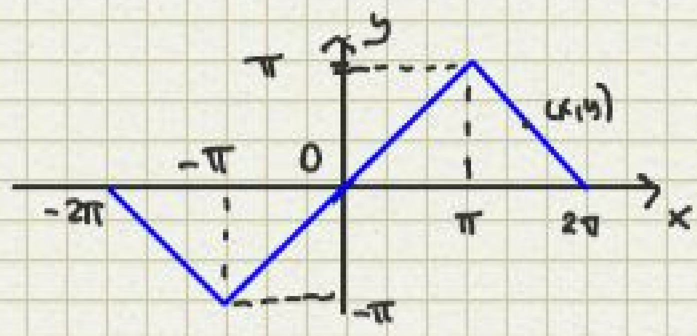
Solução: Para obter uma série de senos, devemos definir f para outros valores de x, de modo que ela seja uma função ímpar. Portanto, tomemos $f(x)=x$, para $-\pi<x\leq\pi$, e periódica de período 2π. A série de Fourier de f já calculada antes é

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\operatorname{sen} nx$$

Consequentemente, pelo Teorema de Fourier, temos

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\operatorname{sen} nx, \quad \text{para } 0\leq x<\pi.$$

Exemplo 2: Observe que no exemplo anterior, poderíamos ter escolhido um período maior que 2π. Por exemplo, 4π. E aí, teríamos de definir também f em $(\pi, 2\pi]$, além disso, ela deveria ser ímpar. Considere a função definida no intervalo $-2\pi\leq x\leq 2\pi$, dado pelo gráfico abaixo.



$$\frac{y-0}{x-2\pi} = \frac{\pi - 0}{2\pi - \pi}$$

$$y = 2\pi - x$$

Calculemos os coeficientes b_n, lembrando que $L = 2\pi$

$$b_n = \frac{2}{2\pi}\left[\int_0^{\pi} x \operatorname{sen} \frac{nx}{2}\, dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-x + 2\pi) \operatorname{sen} \frac{nx}{2}\, dx\right]$$

ou

$$b_n = \frac{8}{n^2\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}$$

Logo, a série de Fourier é

$$\frac{\pi}{8} \sum \frac{1}{n^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2}$$

Pelo Teorema de Fourier,

$$x = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2}, \quad 0 \le x \le \pi$$

ou

$$x = \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^2} \operatorname{sen} \frac{(2k-1)\pi x}{2}, \quad 0 \le x \le \pi .$$

Exemplo 3: Dado $f(x) = x$, para $0 \le x \le \pi$, escreva f como uma série de cossenos.

Solução: Para obter uma série de cossenos, devemos definir f para outros valores de f de modo a obter uma função par. Tomemos $f(x) = |x|$ para $-\pi \le x \le \pi$ e periódica de período 2π. Portanto, $b_n = 0$ e

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx\, dx$$

calculado dá

$$a_n = \frac{2\left[(-1)^n - 1\right]}{n^2\pi}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

e

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x\, dx = \frac{2}{\pi} \frac{1}{2} \pi^2 = \pi.$$

Portanto, a série de Fourier da função é

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos (2k-1) x$$

e, daí,

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos (2k-1) x, \quad 0 \le x \le \pi.$$

Exemplo 4: Dada a função $f(x)=x$, para $0\le x\le \pi$, escreva f como uma função senos e cossenos.

Solução: Podemos definir f, de modo que $f(x)=x$, $0\le x\le\pi$, $f(x)=0$ para $-\pi\le x\le 0$ e periódica de período 2π. Assim

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{1}{2}\pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx = \frac{(-1)^n-1}{n^2\pi}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,\operatorname{sen} nx\,dx = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Logo, a série de Fourier desta f é

$$\frac{1}{4}\pi - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2\pi}\cos(2k-1)x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\operatorname{sen} nx,$$

daí

$$x = \frac{1}{4}\pi - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2\pi}\cos(2k-1)x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\operatorname{sen} nx.$$

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Equações diferenciais de 1ª ordem

Uma equação diferencial de 1ª ordem é uma equação do tipo

$$(1)\qquad y' = f(x,y), \quad a\le x\le b$$

onde $y' = \frac{dy}{dx}$, x é a variável independente e $y=y(x)$ é a variável dependente. O nosso interesse é encontrar uma função $y=\phi(x)$ que satisfaça a edo (1). A priori, f pode ser qualquer função de duas variáveis. Mas para se garantir existência de solução de (1) f tem de no mínimo ser contínua. Há dois teoremas importantes sobre existência de soluções, que enunciamos a seguir.

<u>Teorema (Picard)</u>: Se f e $\frac{\partial f}{\partial y}$ forem contínuas num domínio retangular $R: |x|\le a, |y|\le b$, então há um intervalo $|x|\le h\le a$ no qual existe uma única solução $y=\phi(x)$ do problema

$$(2)\qquad y' = f(x,y) \text{ e } y(0)=0.$$

<u>Teorema (Peano)</u>: Se f é contínua num domínio retangular $R: |x|\le a$, $|y|\le b$ então existe um intervalo $|x|\le h\le a$ tal que existe pelo menos uma solução $y=\phi(x)$ de (2). (Não se garante unicidade)

Dada uma edo

(3) $y' = f(x,y)$, $a \leq x \leq b$

qualquer função $y = \phi(x)$ que satisfaça essa edo é dita solução dessa equação. Isto é,

(4) $$\frac{d\phi}{dx} = f(x, \phi(x)) \ , \ a \leq x \leq b.$$

Por exemplo, dada a equação

(N) $$y' = x y^{1/2} \ , \ y(0)=0$$

então $y = \frac{1}{16}x^4$ é solução dessa equação, pois, $\frac{dy}{dx} = \frac{x^3}{4}$ e

$x \cdot y^{1/2} = x\left(\frac{x^4}{16}\right)^{1/2} = \frac{x \cdot x^2}{4} = \frac{x^3}{4}$. (Note que $y=0$, também é solução de (N))

Exemplo1: A relação $x^2+y^2=25$ é uma solução implícita da equação diferencial

(5) $$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

no intervalo $-5 < x < 5$.

De fato, por diferenciação implícita, obtemos

$$\frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}y^2 = \frac{d}{dx}(25) \text{ ou } 2x + 2y\,y' = 0 \Rightarrow y' = \frac{-x}{y}.$$

Além disso, resolvendo $x^2+y^2=25$ para y em termos de x, obtemos $y = \pm\sqrt{25-x^2}$. As duas funções $y = \phi_1(x) = \sqrt{25-x^2}$ e $y = \phi_2(x) = -\sqrt{25-x^2}$ são soluções explícitas da edo (5) no intervalo $-5<x<5$.

Quando a função $f(x,y)$ for linear em y, isto é, $f(x,y) = a(x)+b(x)y$ então dizemos que a equação diferencial é uma edo de 1ª ordem linear e obtemos:

(L) $$y' = a(x) + b(x)y$$

Vejamos alguns modelos matemáticos de alguns sistemas, que podem ser físicos, sociológicos, biológicos, etc.

CRESCIMENTO POPULACIONAL

Modelo Verhulst: $\frac{dP}{dt} = (r - aP)P$

Modelo de Malthus: Se P é a população no instante t então

(P) $$\frac{dP}{dt} = KP$$ (K constante de proporcionalidade) $(K>0)$

Decaimento Radioativo: A taxa $\frac{dA}{dt}$ a qual o núcleo de uma substância decai é proporcional à quantidade $A(t)$ de substância remanescente no instante t

(R) $$\frac{dA}{dt} = KA \quad (K<0).$$

Observação:
Uma única equação diferencial pode servir como modelo matemático para vários fenômenos diferentes.

Modelos matemáticos são frequentemente acompanhados por determinadas condições laterais. Por exemplo, em (P) esperaríamos conhecer, a população inicial P_0 e em (R) a quantidade inicial de substância radioativa.

Lei de Resfriamento de Newton: De acordo com a lei empírica de Newton do resfriamento, a taxa segundo a qual a temperatura de um corpo varia é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a temperatura do meio que o rodeia, denominada de temperatura ambiente. Nesse caso, se T é a temperatura do corpo e T_m é a temperatura do meio ambiente então

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m) \quad (k<0).$$

DISSEMINAÇÃO DE UMA DOENÇA: Uma doença contagiosa, espalha-se numa comunidade através do contato entre as pessoas. Seja $x(t)$ o número de pessoas que contraíram a doença e $y(t)$ o número de pessoas que ainda não foram expostas. É razoável supor que a taxa $\frac{dx}{dt}$ segundo a qual a doença se espalha seja proporcional ao número de encontros ou interações entre esse dois grupos de pessoas. Se supomos que o nº de interações é proporcional ao produto xy então

$$\frac{dx}{dt} = kxy \quad (k \text{ constante de proporcionalidade})$$

Se uma comunidade tem uma população fixa n de pessoas. O nº y de pessoas sãs é: $y = n - x$. Assim

$$\frac{dx}{dt} = kx(n-x).$$

Se no instante inicial haviam x_0 pessoas doentes então $x(0) = x_0$.

MISTURAS: No instante $t=0$, um tanque contém Q_0 kg de sal dissolvido em V_0 litros de água. Uma solução de sal em água, com Q_1 kg de sal por litro entra no tanque a uma razão de v litros por minuto e a solução do tanque, bem misturada, sai a mesma razão. Seja $Q(t)$ a quantidade de sal no tanque no instante. A taxa de variação da quantidade de sal no tanque, no instante t, $\frac{dQ}{dt}$, é igual à taxa na qual o sal entra no tanque, menos a taxa na qual o sal sai do tanque. Logo,

$$\frac{dQ}{dt} = vQ_1 - \frac{v}{V_0} Q(t).$$

<u>MECÂNICA:</u> Lei do Movimento de Newton

(1) $F = ma$ F força externa, m massa, a aceleração

Para um corpo caindo livremente num vácuo, e bastante próximo da terra, temos que

(2) $w = mg$ w peso do corpo, m massa, g aceleração da gravidade

Mesmo que a massa do corpo permaneça constante, o seu peso, e a aceleração da gravidade, alteram-se com a distância ao centro do campo gravitacional da Terra.

Para um corpo muito distante da Terra

$$w = \frac{K}{(R+x)^2} \qquad K \text{ constante}$$

Em $x=0$, $w = mg$ então $K = mgR^2$ e, portanto,

(3) $$w = \frac{mgR^2}{(R+x)^2}$$

<u>Exemplo:</u> Um corpo de massa m cai, a partir do repouso, num meio que oferece uma resistência proporcional a $|v|$, módulo da velocidade instantânea do corpo. Admitindo que a força gravitacional seja constante, determinar a posição e a velocidade do corpo em qualquer instante t.

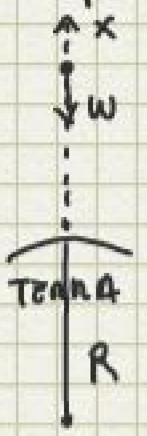
direção positiva mg

resistência $K|v|$. K constante positiva. A resistência atua para impedir o movimento. Quando $v \geq 0$, a resistência atua para cima (direção negativa) e é dada por $-Kv$. Quando $v < 0$, a resistência atua para baixo e continua a ser dada por $-Kv$. Logo,

$$m\frac{dv}{dt} = mg - Kv.$$

<u>Exemplo 2:</u> Um corpo de massa constante m é projetado para cima, na superfície da Terra, com uma velocidade inicial v_0. Admitindo que não haja resistência do ar, mas levando em conta a variação do campo gravitacional da terra com a altura, achar uma expressão para a velocidade do movimento.

Com o eixo de x positivo para cima, e com a origem na Terra, o peso do corpo age para baixo e é dado por



$$w = -\frac{mgR^2}{(R+x)^2}$$

Logo,

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{mgR^2}{(R+x)^2}$$

$$v(0) = v_0$$

Uma vez que

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$$

assim obtemos

$$v\frac{dv}{dx} = -\frac{gR^2}{(R+x)^2}$$

<u>Equações</u> <u>diferenciais</u> <u>ordinárias</u> <u>lineares</u> <u>de</u> <u>1ª ordem</u>

Consideremos a eq. dif. ord. linear de 1ª ordem

$$\text{(L1)} \qquad y' + p(x)y = g(x)$$

Queremos resolver esse tipo de equação. Para isso, vamos multiplicá-la por uma função $\mu(x)$ que chamaremos de "<u>fator</u> <u>integrante</u>". Temos

$$\mu y' + \mu p(x) y = \mu g$$

reescrevendo essa equação como

$$[\mu' y + \mu y'] - [\mu' - p(x)\mu]y = \mu g$$

supondo que $\mu' - p(x)\mu = 0$ obtemos

$$[\mu y]' = \mu g$$

daí

$$\mu y = \int \mu(x) g(x)\,dx + C$$

logo,

$$\text{(L2)} \qquad y = \frac{\int \mu(x) g(x)\,dx + C}{\mu(x)}$$

e como

$$\mu' - p(x)\mu = 0 \quad \text{ou} \quad \mu'/\mu = p(x)$$

segue que $\mu = \exp\int p(x)\,dx$.

Exemplo: Achar a solução do problema de valor inicial

$$y' + 2y = e^{-x}$$
$$y(0) = 0{,}75$$

solução: O fator integrante é

$$\mu = e^{\int 2dx} = e^{2x}$$

assim,
$$e^{2x}y' + 2e^{2x}y = e^{x}$$

ou
$$(ye^{2x})' = e^{x}$$

daí
$$ye^{2x} = \int e^{x}dx + C$$

ou
$$ye^{2x} = e^{x} + C$$

segue que
$$y = e^{-x} + Ce^{-2x}$$

Como
$$y(0) = 0{,}75 \Rightarrow 1 + C = 0{,}75 \Rightarrow C = -0{,}25$$

Portanto,
$$y = e^{-x} - 0{,}25e^{-2x}$$

Exemplo 2: Achar a solução do p.v.i.

$$y' - 2xy = x, \quad y(0) = 0.$$

solução: Fator integrante

$$\mu = e^{-\int 2xdx} = e^{-x^2}$$

daí
$$(ye^{-x^2})' = xe^{-x^2}$$

segue que
$$ye^{-x^2} = \int xe^{-x^2}dx + C = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$$

obtemos
$$y = -\frac{1}{2} + Ce^{x^2}$$

Como
$y(0) = 0$ então
$$y = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{x^2} \text{ é a solução do p.v.i.}$$

Exemplo 3: Resolver o p.v.i.

$$xy' + 2y = 4x^2$$
$$y(1) = 2$$

Equação de Bernoulli

Uma equação do tipo

$$y' + p(t)y = q(t)y^n$$

é conhecida como equação de Bernoulli. Para resolvê-la fazemos a substituição $v = y^{1-n}$. Temos que

$$v' = (1-n)\, y^{-n} y'$$

assim temos

$$y' + p(t)y = g(t)\, y^n$$

pode ficar como

$$y^{-n} y' + p(t)\, y^{1-n} = g(t)$$

ou

$$\frac{1}{1-n} v' + p(t) v = g(t) \quad \text{(linear)}$$

Encontre v e depois y.

Exemplo 1: Resolva a equação

$$t^2 y' + 2ty - y^3 = 0, \quad t > 0$$

Solução: Tome $v = y^{-2}$ assim

$$v' = -2\, y^{-3} y'$$

obtemos:

$$-\frac{t^2}{2} v' + 2t\, v = 1$$

ou (*) $v' - \frac{1}{t} v = -\frac{2}{t^2}$

Fator integrante $\mu = e^{-\int \frac{1}{t} dt} = e^{-\ln t} = \frac{1}{t}$. Daí multiplicando (*) por $\frac{1}{t}$, temos

$$\frac{1}{t} v' - \frac{1}{t^2} v = -\frac{2}{t^3}$$

ou

$$\left(\frac{1}{t} v\right)' = -\frac{2}{t^3} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{t} v = \int -\frac{2}{t^3} dt + C \qquad \frac{t^{-3+1}}{-3+1} = \frac{t^{-2}}{-2}$$

daí

$$\frac{1}{t} v = \frac{1}{t^2} + C \Rightarrow v = \frac{1}{t} + ct$$

segue que

$$y^{-2} = \frac{1}{t} + ct = \frac{1+ct^2}{t} \Rightarrow y^2 = \frac{t}{1+ct^2} \text{ ou } y = \sqrt{\frac{t}{1+ct^2}}. \quad \begin{pmatrix} 1+ct^2 = 0 \\ ct^2 = -1 \\ t^2 = -1/c \end{pmatrix}$$

EQUAÇÕES SEPARÁVEIS

A equação

$$(1) \quad y' = f(x,y)$$

pode ser escrita como

$$(2) \quad M(x,y) + N(x,y) \frac{dy}{dx} = 0$$

basta tomar $f(x,y) = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$. Quando $M = M(x)$ e $N = N(y)$ a equação é dita separável, isto é,

$$M(x) + N(y) \frac{dy}{dx} = 0$$

Ou ainda

$$M(x)dx + N(y)dy = 0$$

Exemplo 1: Mostre que a equação

$$(\star) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1-y^2}$$

é separável e resolva. Escrevendo na forma

$$-x^2 + (1-y^2)\frac{dy}{dx} = 0$$

ou ainda

$$-x^2 dx + (1-y^2)dy = 0$$

integrando a equação acima temos

$$-\frac{x^3}{3} + \left(y - \frac{y^3}{3}\right) = c_0$$

ou

$$-x^3 + 3y - y^3 = c$$ solução implícita de $(\star)$.

Exemplo 2: Resolva o p.v.i.

$$(\star\star) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2+4x+2}{2(y-1)}, \quad y(0) = -1$$

A equação diferencial pode ser escrita como

$$2(y-1)dy = (3x^2+4x+2)dx$$

Integrando

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + c$$ (c constante arbitrária)

Como $y(0) = -1$, temos $(x=0,\ y=-1)$

$$1 - 2(-1) = 0^3 + 2\cdot 0^2 + 2\cdot 0 + c \Rightarrow c = 3$$

Logo,

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + 3$$ é a única solução de $(\star\star)$.

EQUAÇÕES EXATAS

Exemplo 1: Resolva a equação diferencial

$$(\text{Ex}) \qquad 2x + y^2 + 2xy\,y' = 0$$

A equação acima não é separável, nem linear. Notemos que existe uma função $\psi(x,y) = x^2 + xy^2$ tal que

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 2x + y^2, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 2xy$$

Assim podemos escrever (Ex) como

$$(\text{Ex1}) \qquad \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

Pela regra da cadeia podemos escrever (Ex.1) como

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2 + xy^2) = 0$$

Logo

$$\psi(x,y) = x^2 + xy^2 = C$$ é a solução de (Ex.)

Teorema: Suponha que as funções M, N, M_y, N_x são contínuas na região retangular $R: a<x<b, c<y<d$. Então a eq.

$$(\text{Exa1}) \qquad M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$$

é uma eq. dif. exata em R se, e só se,

$$(\text{Exa}) \qquad M_y = N_x \quad \text{em } R.$$

Ou seja, existe ψ tal que $\frac{\partial\psi}{\partial x} = M$, $\frac{\partial\psi}{\partial y} = N$, se e só se, M e N satisfazem (Exa). Vimos como a solução de (Exa1) será dada por $\psi(x,y) = C$.

Exemplo 1: Resolver a equação diferencial

$$(*) \qquad (y\cos x + 2xe^y) + (\operatorname{sen} x + x^2e^y - 1)y' = 0$$

Sol.: Tomando $M(x,y) = y\cos x + 2xe^y$, $N(x,y) = \operatorname{sen} x + x^2e^y - 1$ é fácil ver que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \cos x + 2xe^y = \frac{\partial N}{\partial x}$$

logo, a equação é exata. Portanto, há uma função $\psi(x,y)$ tal que

$$\psi_x = y\cos x + 2xe^y$$
$$\psi_y = \operatorname{sen} x + x^2e^y - 1$$

Integrando a 1ª equação obtemos

$$\psi(x,y) = y\operatorname{sen} x + x^2e^y + h(y)$$

Fazendo $\psi_y = N$ temos

$$\operatorname{sen} x + x^2e^y + h'(y) = \operatorname{sen} x + x^2e^y - 1$$

Assim $h'(y) = -1$, $h(y) = -y$. Desse modo,

$$\psi(x,y) = y\operatorname{sen} x + x^2e^y - y.$$

Portanto, a solução geral de $(*)$ é

$$y\operatorname{sen} x + x^2e^y - y = C.$$

Exemplo 2: Resolver a equação diferencial

$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0$$

Nesse caso,

$$M_y = 3x + 2y, \quad N_x = 2x + y$$

Como $M_y \neq N_x$ a equação não é exata.

FATORES INTEGRANTES

Em algumas situações é possível transformar equações não exatas em exatas, multiplicando-as por fatores convenientes.

Exemplo 1: Resolva a equação diferencial

(E1) $(y\cos x + 2xe^y) + (\sin x + x^2 e^y - 1)\, y' = 0$

É fácil ver que

$$M_y(x,y) = \cos x + 2xe^y = N_x \quad (\text{exata})$$

Sol.: Existe $\psi(x,y)$ tal que

$$\psi_x = y\cos x + 2xe^y$$

$$\psi_y = \sin x + x^2 e^y - 1$$

Integrando a primeira dessas equações, obtemos

$$\psi(x,y) = y\sin x + x^2 e^y + g(y)$$

Fazendo

$$\psi_y = N, \text{ temos}$$

$$\psi_y = \sin x + x^2 e^y + g'(y) = \sin x + x^2 e^y - 1$$

Logo,

$$g'(y) = -1 \quad \text{ou} \quad g(y) = -y$$

Portanto,

$$\psi(x,y) = y\sin x + x^2 e^y - y$$

A solução é

$$y\sin x + x^2 e^y - y = C.$$

Ex. 2: Resolva a eq. diferencial

(NEx) $(3xy + y^2)\,dx + (x^2 + xy)\,dy = 0$

Solução: Aqui

$$M_y = 3x + 2y \ , \quad N_x = 2x + y$$

Como $M_y \neq N_x$ a eq. diferencial não é exata.

Fatores Integrantes

Suponha uma equação diferencial

(F1) $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ (não exata)

Procuramos um fator integrante, seja μ tal fator multiplique F1 por μ.

(F2) $\mu M\,dx + \mu N\,dy = 0$

A eq. é exata se e só se

$$(\mu M)_y = (\mu N)_x$$

daí

(F3) $M\mu_y - N\mu_x + (M_y - N_x)\mu = 0$

Se existir μ satisfazendo (F3) a eq. se torna exata.

Supondo μ função só de x, temos

$$(\mu M)_y = \mu M_y \ , \quad (\mu N)_x = \mu N_x + N\frac{d\mu}{dx}$$

Segue que
$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{M_y - N_x}{N}\mu$$
Se $\frac{M_y - N_x}{N}$ depende apenas de x, então existe um fator integrante μ que depende só de x.

Exemplo 3: Encontre um fator integrante para a equação
$$(NE) \quad (3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0$$
Calculando
$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{3x + 2y - (2x+y)}{x^2 + xy} = \frac{1}{x}$$
Logo, existe μ tal que
$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{\mu}{x}$$
Logo,
$$\mu = x$$
multiplicando a equação (NE) por x, obtemos:
$$(NE2) \quad (3x^2y + xy^2) + (x^3 + x^2y)y' = 0$$
e essa equação é exata, assim temos:
$$(NE3) \quad x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 = C$$
é a solução de (NE1).

Obs: Se $\frac{N_x - M_y}{M} = Q$ é função só de y então a eq.
$$M\,dx + N\,dy$$
tem um fator integrante $\mu = \exp\int Q(y)\,dy$.

EQUAÇÕES HOMOGÊNEAS

Uma equação
$$(1) \quad y' = f(x,y)$$
é <u>homogênea</u> sempre que pudermos escrever $f(x,y) = F(y/x)$ ou $f(x,y) = F(\frac{x}{y})$.

Como exemplos temos:

(a) $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 2xy}{x^2} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{y}{x}\right)$

(b) $\frac{dy}{dx} = \ln x - \ln y + \frac{x+y}{x-y} = \ln\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{\frac{x}{y}+1}{\frac{x}{y}-1}$

Note que a equação
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^3 + 2xy}{x^2} = y\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{y}{x}\right)$$
não é homogênea.

A forma de uma equação homogênea, nos dá uma forma de mudar a variável para representar a nossa equação, nesse caso, tomamos

(2) $$y = xv$$

e a equação fica

$$\frac{dy}{dx} = F(v)$$

Agora como

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v$$

A equação se torna

(3) $$x\frac{dv}{dx} + v = F(v)$$

A equação se torna separável, assim, obtemos

(4) $$\frac{dx}{x} = \frac{dv}{F(v) - v}$$

Resolvendo (4) e depois substituindo v por y/x chegamos à solução da equação original.

Ex.1: Resolver a edo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 2xy}{x^2}.$$

Sol.: Escrevendo

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{y}{x}\right)$$

a equação é homogênea. Tomando $y = xv$ obtemos

$$x\frac{dv}{dx} + v = v^2 + 2v$$

ou

$$x\frac{dv}{dx} = v^2 + v$$

ou ainda

$$\frac{dx}{x} = \frac{dv}{v^2 + v}$$

daí

$$\frac{dx}{x} = \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v+1}\right)dv$$

Integrando

$$\ln|x| + \ln|c| = \ln|v| - \ln|v+1|$$

Assim

$$cx = \frac{v}{v+1}$$

finalmente

$$cx = \frac{y/x}{\frac{y}{x} + 1} = \frac{y}{y+x}$$

daí

$$y = \frac{cx^2}{1 - cx}.$$

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE 2ª ORDEM

Uma eq. dif. de 2ª ordem tem a seguinte forma

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$$

onde f é uma função conhecida. A eq. (1) é <u>linear</u> se a função f puder ser escrita como

$$(2) \qquad f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = g(x) - p(x)\frac{dy}{dx} - q(x)y,$$

onde g, p e q são funções da variável independente x. Nesse caso (1) fica como

$$(3) \qquad y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x).$$

onde $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$. Podemos também escrever (3) como

$$(4) \qquad P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = G(x).$$

Ao discutir a eq. (3), e ao tentar resolvê-la, vamos nos limitar a intervalo onde p, q e g são funções contínuas.

Se a equação não tiver a forma (3) ou (4) então ela é dita <u>não linear</u>.

Um problema de valor inicial é constituído por uma equação diferencial como a eq. (1), ou (3) ou (4), e um par de condições iniciais da forma

$$(5) \qquad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1,$$

onde y_0 e y_1 são dados.

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE 2ª ORDEM

Caso 3: Raízes Complexas

Eq. dif
$$ay'' + by' + cy = 0$$
onde a, b e c são nºs reais dados. Eq. característica associada
$$ar^2 + br + c = 0$$
sejam
$$r_1 = \lambda + i\mu \quad e \quad r_2 = \lambda - i\mu$$
onde λ, μ reais. As expressões de y são
$$y = e^{(\lambda+i\mu)x}, \quad y = e^{(\lambda-i\mu)x}$$

Fórmula de Euler

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$$
logo,
$$e^{i\mu x} = \cos\mu x + i \operatorname{sen}\mu x$$
portanto
$$e^{(\lambda+i\mu)x} = e^{\lambda x}(\cos x + i \operatorname{sen}\mu x)$$
soluções reais
$$y_1 = e^{\lambda x}\cos\mu x, \quad y_2 = e^{\lambda x}\operatorname{sen}\mu x$$
calculando o wronskiano
$$W(y_1, y_2)(x) = \mu e^{2\lambda x} \neq 0$$
já que $\mu \neq 0$. Segue que a solução geral é
$$y = c_1 e^{\lambda x}\cos\mu x + c_2 e^{\lambda x}\operatorname{sen}\mu x$$

Exemplo 1: Calcular
$$y'' + y' + y = 0$$
A eq. característica é
$$r^2 + r + 1 = 0$$
e suas raízes são
$$r = \frac{-1 \pm (1-4)^{1/2}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
Assim $\lambda = -1/2$ e $\mu = \sqrt{3}/2$
$$y = c_1 e^{-x/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 e^{-x/2}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

Exemplo 2: Resolver
$$y'' + 9y = 0$$
solução
$$y = c_1\cos 3x + c_2\operatorname{sen} 3x.$$