

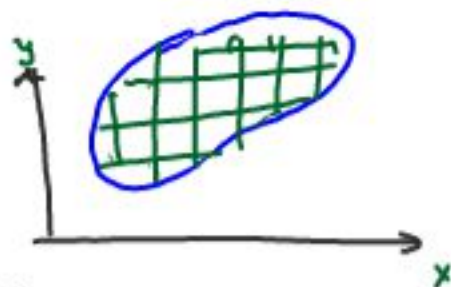
UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAIBA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CÁLCULO DIFERENCIAL
E INTEGRAL III

Prof. Milton

Integrais Duplas

Considere W um retângulo que contenha a região R . A totalidade das sub-regiões retangulares fechadas internamente contidas



em R constitui uma **partição de R** . Designando por $R_1, R_2, \dots, R_n$ essas sub-regiões retangulares, então a partição interna é $P = \{R_i, i=1, \dots, n\}$. O comprimento da maior diagonal das R_i será denotada por $\|P\|$ e chamada **norma** da partição P . A área R_i denotamos por ΔA_i .

Definição: Seja f uma função de duas variáveis definida numa região R e $P = \{R_i, i=1, \dots, n\}$ uma partição de R . Uma soma de Riemann de f para P é a soma

$$\sum_{i=1}^n f(u_i, v_i) \Delta A_i$$

onde (u_i, v_i) está em R_i .

Definição 2: Sejam f uma função de duas variáveis definida numa região R e L um número real. A afirmação

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(u_i, v_i) \Delta A_i = L$$

significa que, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $P = \{R_i\}$ é uma partição interior de R com $\|P\| \leq \delta$ então

$$\left| \sum_{i=1}^n f(u_i, v_i) \Delta A_i - L \right| < \epsilon$$

para qualquer escolha de (u_i, v_i) em R_i .

Definição 3: Seja f uma função de duas variáveis definida em R . A integral dupla de f sobre R é dada por

$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(u_i, v_i) \Delta A_i$$

se o limite existir.

Definição 4: Seja f contínua com $f(x, y) \geq 0$, $\forall (x, y) \in R$. O volume do sólido compreendido entre o gráfico de $z = f(x, y)$ e a caixa de R é

$$V = \iint_R f(x, y) dA.$$

Se $f(x,y) < 0$ em R , a integral dupla de f sobre R é o negativo do volume de sólido situado acima do gráfico de f e sob a região R .

Propriedades

Se f é integrável e c é uma constante qualquer, então

$$a) \iint_R c f(x,y) dA = c \iint_R f(x,y) dA$$

$$b) \iint_R (f(x,y) + g(x,y)) dA = \iint_R f(x,y) dA + \iint_R g(x,y) dA$$

c) Se R é a união de duas regiões não superpostas R_1 e R_2 então

$$\iint_R f(x,y) dA = \iint_{R_1} f(x,y) dA + \iint_{R_2} f(x,y) dA$$

d) Se $f(x,y) \geq 0$ em R então $\iint_R f(x,y) dA \geq 0$.

Integrais Iteradas

Se R é uma região do tipo

$$R = \{ (x,y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d \}$$

então a integral de uma função f definida em R é dada por

$$\iint_R f(x,y) dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y) dy dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y) dy \right] dx$$

ou

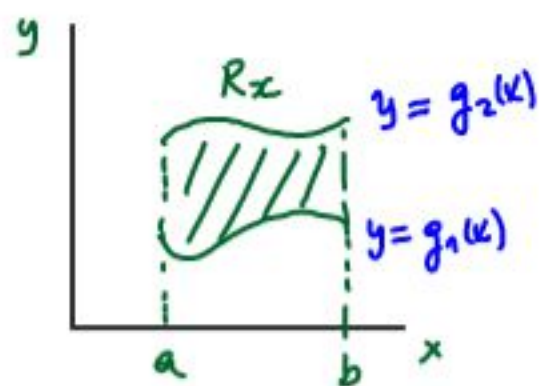
$$\iint_R f(x,y) dA = \int_c^d \int_a^b f(x,y) dx dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y) dx \right] dy,$$

Exemplo: Calcule $\int_1^4 \int_{-1}^2 (2x + 6x^2y) dy dx$.

$$\text{solução: } \int_1^4 \int_{-1}^2 (2x + 6x^2y) dy dx = 234$$

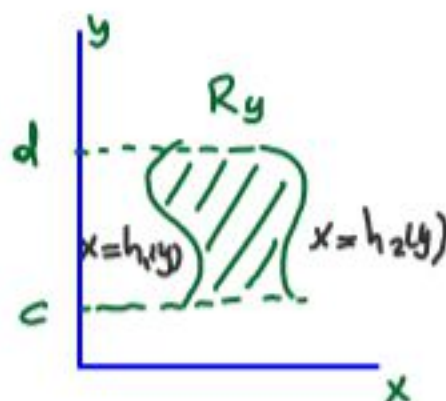
Seja R uma região do tipo R_x , ou R_y ,
uma região definida por

$$R_x = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : g_1(x) \leq y \leq g_2(x), a \leq x \leq b \}$$



ou do tipo R_y dada por

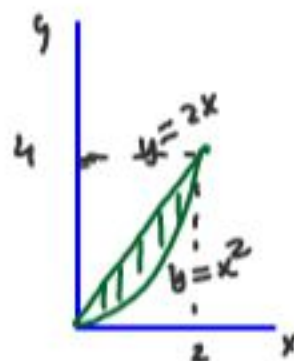
$$R_y = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : h_1(y) \leq x \leq h_2(y), c \leq y \leq d \}$$



então temos que

$$\iint_R f(x,y) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y) dy dx$$

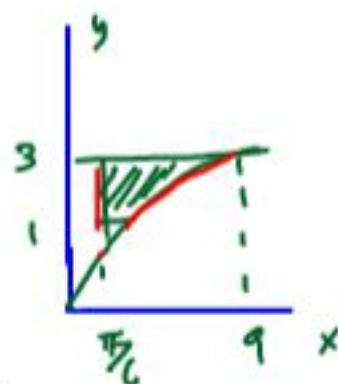
$$\text{ou} \quad \iint_R f(x,y) dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y) dx dy$$



Exemplo 1: Calcule $\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^3 + 4y) dy dx$.

$$\text{Sol.:} \quad \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^3 + 4y) dy dx = \int_0^2 \left[x^3 y + 4 \frac{y^2}{2} \right]_{x^2}^{2x} dx$$

$$= \int_0^2 (8x^2 - x^5) dx = \frac{32}{3}$$

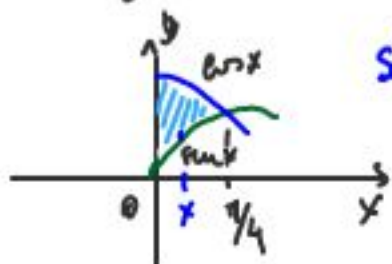


Exemplo 2: Calcule $\int_1^3 \int_{\pi/6}^{y^2} 2y \cos z dx dy$.

$$\text{solução:} \quad \int_1^3 \int_{\pi/6}^{y^2} 2y \cos z dx dy = \int_1^3 2y [\sin z]_{\pi/6}^{y^2} dy = \int_1^3 2y [\sin y^2 - \sin \frac{\pi}{6}] dy$$

$$= \int_1^3 (2y \sin y^2 - y) dy = \left[-\cos y^2 - \frac{y^2}{2} \right]_1^3 = -4 - \cos 9 + \cos 1$$

Exemplo 3: Seja R a região do plano-xy delimitada por $y = \sin x$ e $y = \cos x$ com x variando de 0 a $\pi/4$. Calcule $\iint_R (y+1) dA$.



$$\text{Sol.:} \quad \iint_R (y+1) dA = \int_0^{\pi/4} \int_{\sin x}^{\cos x} (y+1) dy dx$$

Volume e Área

A área de uma região R fechada e limitada é

$$A = \iint_R dA$$

O volume do sólido compreendido entre o gráfico de $z = f(x, y)$ e sobre uma região R do plano- xy é

$$V = \iint_R f(x, y) dA \quad (f(x, y) \geq 0)$$

Se $R = R_x = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x) \}$ então

$$V = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx$$

e a área da região R_x é

$$A = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy dx = \int_a^b (g_2(x) - g_1(x)) dx.$$

De forma análoga, isso vale para regiões do tipo R_y .

Exemplo 1: Ache a área A da região do plano- xy delimitada pelos gráficos de $2y = 16 - x^2$ e $x + 2y = 4$.

Solução: Temos que

$$y = 8 - \frac{x^2}{2} \text{ e } y = 4 - \frac{x}{2}$$

Interceptando as duas equações acima obtemos

$$2 - \frac{x}{2} = 8 - \frac{x^2}{2} \text{ ou } 2 - \frac{x}{2} = 2(4 - \frac{x^2}{4})$$

ou ainda

$$2 - \frac{x}{2} = 2(2 - \frac{x}{2})(2 + \frac{x}{2})$$

$$\text{ou } (2 - \frac{x}{2}) \left[1 - 2(2 + \frac{x}{2}) \right] \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 4 \end{cases} \text{ ou}$$

$$\text{Logo: } A = \int_{-3}^4 \int_{2 - \frac{x}{2}}^{8 - \frac{x^2}{2}} dy dx = \int_{-3}^4 \left(6 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} \right) dx = \frac{343}{12}.$$

Exemplo 2: Ache a área A da região do plano xy delimitada pelos gráficos de $x=y^3$, $x+y=2$ e $y=0$.

Sol.: Interceptando $x=y^3$ com $x+y=2$, temos

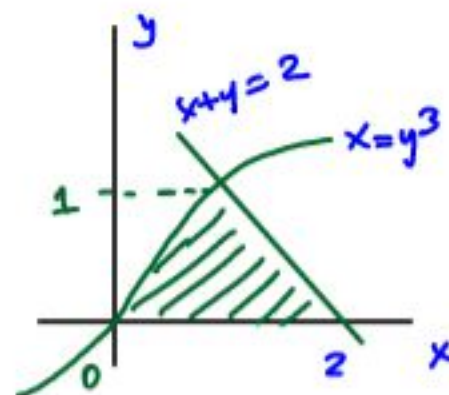
$$y^3 + y - 2 = 0$$

cuya raiz é $y=1$. Logo, temos

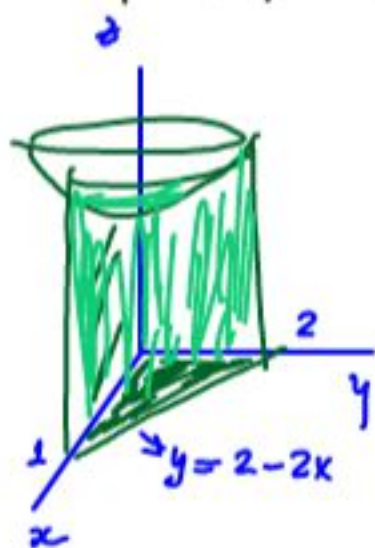
$$A = \int_0^1 \int_{y^3}^{2-y} dx dy = \int_0^1 [x]_{y^3}^{2-y} dy = \int_0^1 (2-y-y^3) dy = \left(2y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4} \right)_0^1$$

$$= 5/4$$

$$A = \int_0^1 \int_0^{\sqrt[3]{x}} dy dx + \int_1^2 \int_0^{2-x} dy dx.$$



Exemplo 3: Ache o volume do sólido do primeiro octante delimitada pelos planos coordenados, pelo parabolóide $z=x^2+y^2+1$ e pelo plano $2x+y=2$.



Sol.: Temos que

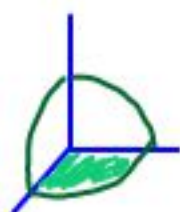
$$V = \int_0^1 \int_0^{2-2x} (x^2+y^2+1) dy dx = \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} + y \right]_0^{2-2x} dx$$

$$= \int_0^1 \left[x^2(2-2x) + \frac{(2-2x)^3}{3} + (2-2x) \right] dx$$

$$= \int_0^1 \left[-\frac{14}{3} x^3 + 10x^2 - 10x + \frac{14}{3} \right] dx$$

$$= \left[-\frac{7}{6} x^4 + \frac{10}{3} x^3 - 5x^2 + \frac{14}{3} x \right]_0^1 = \frac{11}{6}.$$

Exemplo 4: Ache o volume V do sólido que está no primeiro octante e é delimitada pelos três planos coordenados e pelos cilindros $x^2+y^2=9$ e $y^2+z^2=9$.



Sol.: O sólido está situado abaixo do gráfico de $z=\sqrt{9-y^2}$ e acima da região R (que equivale a um quarto do círculo $x^2+y^2=9$, junto com os pontos interiores ao círculo). Assim

$$V = \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} \sqrt{9-y^2} \, dx \, dy = \int_0^3 \sqrt{9-y^2} [x]_0^{\sqrt{9-y^2}} \, dy$$

$$= \int_0^3 (9-y^2) \, dy = \left(9y - \frac{y^3}{3} \right)_0^3 = 18.$$

Integrais duplas em coordenadas polares

Considere a região R como na figura 1, delimitada por arcos de círculos de raios r_1 e r_2 e por dois raios que saem da origem. Se $\Delta\theta$ é a medida em radianos do ângulo entre os raios e se $\Delta r = r_2 - r_1$ então a área ΔA de R é

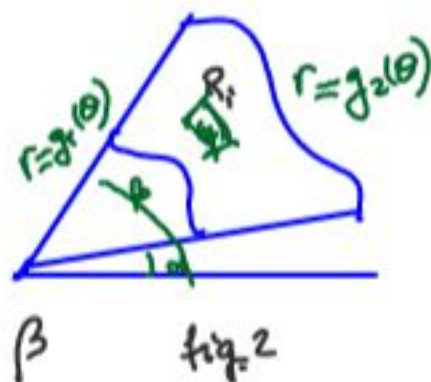
$$\Delta A = \frac{1}{2} r_2^2 \Delta\theta - \frac{1}{2} r_1^2 \Delta\theta$$

ou

$$\Delta A = \frac{1}{2} (r_2^2 - r_1^2) \Delta\theta = \frac{1}{2} (r_1 + r_2)(r_2 - r_1) \Delta\theta$$

chamando $\bar{r} = \frac{r_1 + r_2}{2}$ então

$$\Delta A = \bar{r} \Delta r \Delta\theta$$



Agora consideremos a região R como na figura 2 delimitada por dois raios que fazem ângulos α e β com o eixo polar, e pelos gráficos de suas equações polares $r = g_1(\theta)$ e $r = g_2(\theta)$, em que g_1 e g_2 são funções contínuas e $g_1(\theta) \leq g_2(\theta)$ para $\alpha \leq \theta \leq \beta$.

Subdividimos R por arcos circulares e raios conforme a figura 2. Então a coleção de regiões polares elementares $R_1, \dots, R_n$ que estão completamente dentro de R é chamada de partição polar interna

P de R . A $\|P\|$ é o comprimento da maior diagonal das R_k . Escolhido um ponto (r_k, θ_k) em R_k tal que r_k seja o raio médio, então

$$\Delta A_k = r_k \Delta r_k \Delta\theta_k$$

Se f é uma função contínua de variáveis polares r e θ então temos o resultado.

Theorema 1:
$$\iint_R f(r, \theta) dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r, \theta) r dr d\theta = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_k f(r_k, \theta_k) r_k \Delta r_k \Delta \theta_k$$

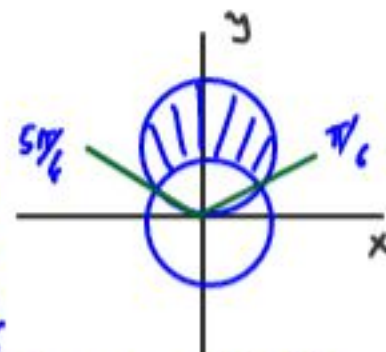
Se $f(r, \theta) = 1$ então obtém-se a área de R

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} r dr d\theta.$$

Exemplo 1: Ache a área da região R exterior ao círculo $r = a$ e interior ao círculo $r = 2a \sin \theta$.

Sol.: Os pontos de interseção destes círculos são:

$$a = 2a \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_1 = \pi/6, \theta_2 = 5\pi/6$$



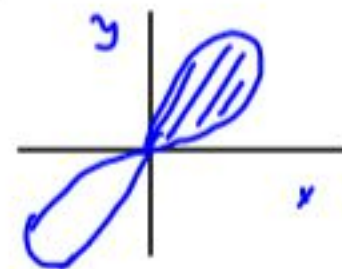
Logo:
$$A = \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \int_a^{2a \sin \theta} r dr d\theta = \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \left[\frac{r^2}{2} \right]_a^{2a \sin \theta} d\theta = \int_{\pi/6}^{5\pi/6} (2a^2 \sin^2 \theta - \frac{a^2}{2}) d\theta$$

$$= a^2 \int_{\pi/6}^{5\pi/6} (2 \sin^2 \theta - \frac{1}{2}) d\theta = a^2 \int_{\pi/6}^{5\pi/6} (1 - \cos 2\theta - \frac{1}{2}) d\theta = a^2 \left[\frac{1}{2} \theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_{\pi/6}^{5\pi/6}$$

$$= a^2 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

Exemplo 2: Ache a área da região R delimitada pelo primeiro ramo da lemniscata $r^2 = a^2 \sin 2\theta$, $a > 0$.

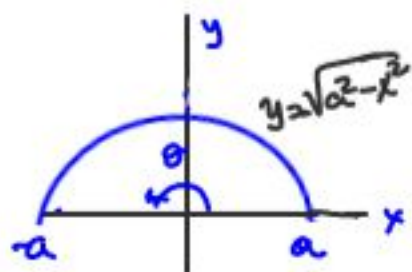
Sol.:
$$A = \iint_R dA = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{a \sin 2\theta}} r dr d\theta = \frac{1}{2} a^2.$$



Fórmula de Mudança de Variáveis

$$\iint_R f(x, y) dy dx = \iint_{R^*} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$

Ex.: Use coordenadas polares para calcular $\int_{-a}^a \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} (x^2 + y^2)^{3/2} dy dx$.



Sol.: $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$

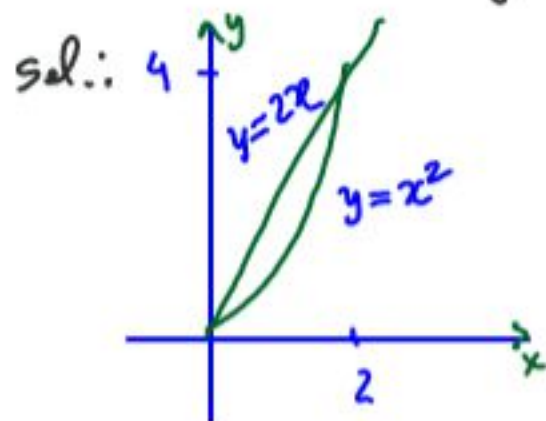
$$\int_{-a}^a \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} (x^2 + y^2)^{3/2} dy dx = \int_0^{\pi} \int_0^a r^3 r dr d\theta = \frac{1}{8} \pi a^5.$$

Invertendo a ordem de integração

Exemplo: Esboce a região de integração para a integral

$$\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (4x+2) dy dx.$$

Escreva uma integral equivalente com a ordem de integração invertida.

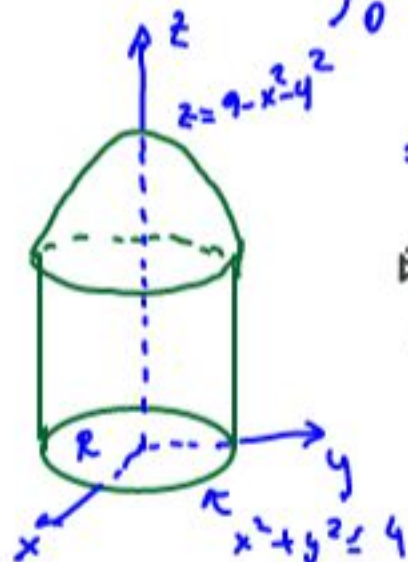


Def: $x = \sqrt{y}$ e $x = y/2$ Assim

$$\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (4x+2) dy dx = \int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} (4x+2) dx dy$$

Exemplo 1: Calcule $\int_0^1 \int_y^1 \frac{\sin x}{x} dx dy$.

Sol.: $\int_0^1 \int_y^1 \frac{\sin x}{x} dx dy = \int_0^1 \int_0^x \frac{\sin x}{x} dy dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} [y]_0^x dx = \int_0^1 \sin x dx$
 $= [-\cos x]_0^1 = -\cos 1 + 1 \approx 0,46$.



Exemplo: Considere o sólido Q que está abaixo do gráfico de $z = 9 - x^2 - y^2$ e acima da região determinada pelo círculo $x^2 + y^2 = 4$. Encontre o volume desse sólido.

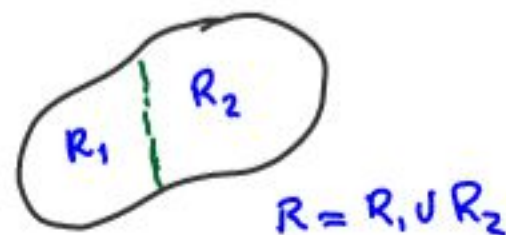
Sol.: $V = \iint_R (9 - x^2 - y^2) dA = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (9 - r^2) r dr d\theta$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (9r - r^3) dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{9r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^2 d\theta$$

$$= (18 - 4) 2\pi = 28\pi \text{ unid. de volume}$$

Propriedade

$$\iint_R f(x,y) dA = \iint_{R_1} f(x,y) dA + \iint_{R_2} f(x,y) dA$$

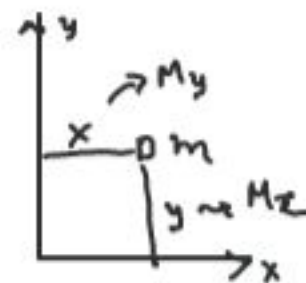


Momentos e centro de massa

Uma placa fina com densidade variável $\delta(x,y)$ tem
m massa $M = \iint_R \delta(x,y) dA$ (R é a região que representa a placa)

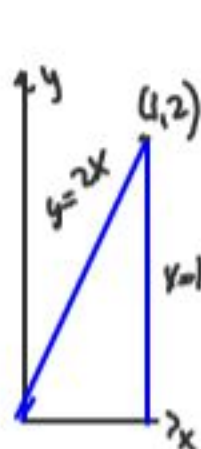
Os momentos dessas placas são

$$M_x = \iint_R y \delta(x,y) dA, \quad M_y = \iint_R x \delta(x,y) dA$$



Centro de massa:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M}$$



Exemplo 1: Uma placa fina cobre uma região triangular limitada pelo eixo-x e pelas retas $x=1$ e $y=2x$ no primeiro quadrante. A densidade da placa é $\delta(x,y) = 6x + 6y + 6$. Encontre a massa da placa, os momentos e o centro de massa em relação aos eixos coordenados.

Solucão:

$$M = \int_0^1 \int_0^{2x} \delta(x,y) dy dx = \int_0^1 \int_0^{2x} (6x + 6y + 6) dy dx = \int_0^1 [6xy + 3y^2 + 6y]_0^{2x} dx$$
$$= \int_0^1 (24x^2 + 12x) dx = [8x^3 + 6x^2]_0^1 = 14$$

Os momentos são:

$$M_x = \int_0^1 \int_0^{2x} y \delta(x,y) dy dx = \int_0^1 \int_0^{2x} (6xy + 6y^2 + 6y) dy dx$$
$$= [7x^4 + 4x^3]_0^1 = 11$$

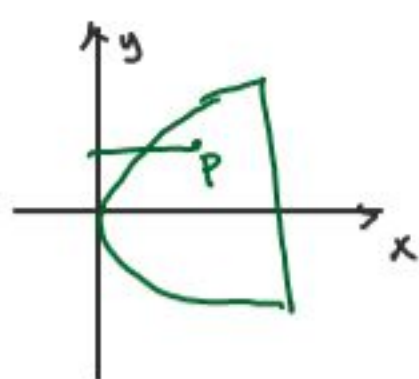
$$M_y = \int_0^1 \int_0^{2x} x \delta(x,y) dy dx = 10$$

Logo:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{11}{14}$$

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{5}{7}, \frac{11}{14} \right)$$

Exemplo 2: Uma lâmina tem a forma da região R do plano- xy delimitada pela parábola $x=y^2$ e a reta $x=4$. A densidade de massa por área no ponto $P(x,y)$ é diretamente proporcional à distância do eixo- y a P . Ache o centro de massa.



Sol.: $\delta(x,y) = kx$, k constante. O centro de massa está sobre o eixo x pela simetria da região e pela forma de δ . Isto é, $\bar{y} = 0$.

$$m = \iint_R \delta(x,y) dA = k \int_{-2}^2 \int_{y^2}^4 x dx dy = \frac{128}{5} k$$

Também $M_y = \iint_R x (\delta(x,y)) dA = k \int_{-2}^2 \int_{y^2}^4 x^2 dx dy = k \frac{512}{7}$

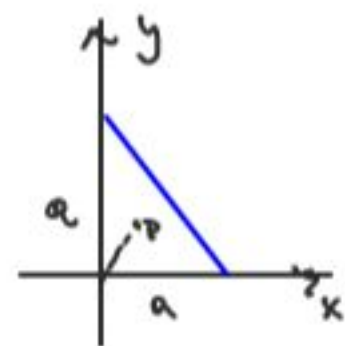
$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{20}{7}. \text{ Assim } (\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{20}{7}, 0\right).$$

Exemplo 3: Uma lâmina tem a forma de um triângulo retângulo isósceles com lados iguais de comprimento a . A densidade de massa por área no ponto P é diretamente proporcional ao quadrado da distância de P ao vértice oposto à hipotenusa. Ache o centro de massa.

Sol.: $\delta(x,y) = k(x^2 + y^2)$

$$M = \iint_R \delta(x,y) dA = \int_0^a \int_0^{a-x} k(x^2 + y^2) dy dx = \frac{ka^4}{6}$$

$$M_y = \iint_R x \delta(x,y) dA = k \int_0^a \int_0^{a-x} x(x^2 + y^2) dy dx = \frac{1}{15} a^5 k$$



Logo, $\bar{x} = \frac{2}{5} a$. Analogamente, $M_x = \frac{1}{15} ka^5$ e $\bar{y} = \frac{2}{5} a$.

Momento de Inércia de uma lâmina

$$I_x = \iint_R y^2 \delta(x,y) dA \quad (\text{Momento de inércia em relação ao eixo } x)$$

$$I_y = \iint_R x^2 \delta(x,y) dA \quad (\text{Momento de inércia em relação ao eixo } y)$$

$$I_0 = \iint_R (x^2 + y^2) \delta(x,y) dA \quad (\text{Momento de inércia polar}).$$

Exemplo: Encontre o momento de inércia do exemplo em relação aos eixos coordenados e à origem.

Solução: Usando a densidade $\delta(x,y) = 6x + 6y + 6$ dado no exemplo, o momento de inércia em relação ao eixo x é

$$I_x = \int_0^1 \int_0^{2x} y^2 \delta(x,y) dy dx = \int_0^1 \int_0^{2x} (6xy + 6y^2 + 6y) dy dx = \int_0^1 \left(2xy^3 + \frac{3}{2}y^4 + 2y^3 \right) \Big|_0^{2x} dx$$

$$= \int_0^1 (40x^4 + 16x^3) dx = [8x^5 + 4x^4]_0^1 = 12$$

Da maneira semelhante

$$I_y = \int_0^1 \int_0^{2x} x^2 \delta(x,y) dy dx = \frac{39}{5}$$

Temos que

$$I_0 = I_x + I_y = 12 + \frac{39}{5} = \frac{99}{5}$$

O centróide de uma região é dado qdo $\delta(x,y) = cte$. Em muitas situações podemos fazer $\delta(x,y) = 1$.

Exemplo: Encontre o centróide de uma região no primeiro quadrante limitada acima pela reta $y=x$ e abaixo pela parábola $y=x^2$.



Solução: Fazemos $\delta = 1$

$$M = \int_0^1 \int_{x^2}^x dy dx = \int_0^1 [y]_{x^2}^x dx = \int_0^1 (x - x^2) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$M_y = \int_0^1 \int_{x^2}^x x dy dx = \int_0^1 (xy) \Big|_{x^2}^x dx = \int_0^1 (x^2 - x^3) dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{12}$$

$$M_x = \frac{1}{15}$$

Assim

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{2}, \quad \bar{y} = \frac{2}{5}$$

$$\text{centróide } (\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{5} \right)$$

Integrals Triplas



Considere um sólido Q no espaço tridimensional e vamos considerar uma partição desse sólido em n -cubos $P = \{Q_k, Q_k \subset Q\}$. Tomemos um ponto $(x_k, y_k, z_k) \in Q_k$

Formamos $f(x_k, y_k, z_k) \Delta V_k$

onde ΔV_k é o volume do cubo Q_k . Somando sobre todos os Q_k , temos:

$$\sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \Delta V_k \quad (\text{Soma de Riemann})$$

Daí,

$$\lim_{(n \rightarrow \infty)} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \Delta V_k = \iiint_Q f(x, y, z) dV$$

Volume de uma região no espaço

Se $f(x, y, z) \equiv 1$ então

$$V = \iiint_Q dV \text{ é o volume do sólido } Q.$$

Integrals Iteradas

Se Q é um cubo:

$$Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, m \leq z \leq n\}$$

então

$$\iiint_Q f(x, y, z) dV = \int_a^b \int_c^d \int_m^n f(x, y, z) dz dy dx.$$

Exemplo: Considere a função $f(x, y, z) = x + y + z$ calcule $\iiint_Q f(x, y, z) dV$ onde $Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 1 \leq z \leq 2\}$.

$$\text{solução: } \iiint_Q (x + y + z) dV = \int_{-1}^1 \int_0^1 \int_1^2 (x + y + z) dz dy dx = \int_{-1}^1 \int_0^1 \left[xz + yz + \frac{z^2}{2} \right]_1^2 dy dx$$

$$= \int_{-1}^1 \int_0^1 \left[2x + 2y + 2 - x - y - \frac{1}{2} \right] dy dx = \int_{-1}^1 \left[2xy + y^2 + 2y - xy - \frac{y^2}{2} - \frac{y}{2} \right]_0^1 dx$$

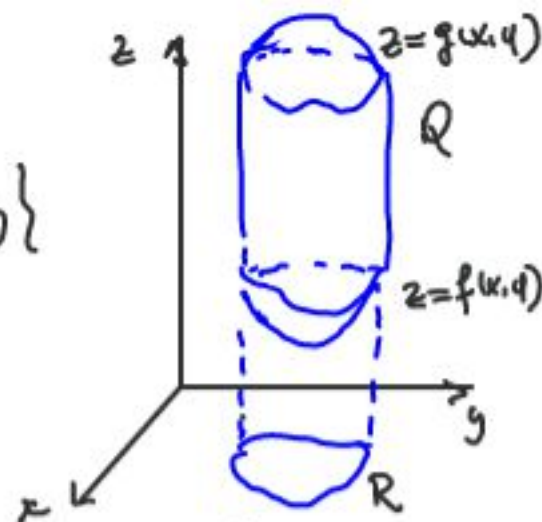
$$= \int_{-1}^1 \left[2x + 1 + 2 - x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right] dx = \int_{-1}^1 (x + 2) dx = 4.$$

Se Q é um sólido tal que

$$Q = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in R \text{ e } f(x, y) \leq z \leq g(x, y) \}$$

então

$$\iiint_Q h(x, y, z) dV = \iint_R \left[\int_{f(x, y)}^{g(x, y)} h(x, y, z) dz \right] dA$$



No caso em que $R = R_x = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x) \}$. Então

$$\iiint_Q h(x, y, z) dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{f(x, y)}^{g(x, y)} h(x, y, z) dz dy dx.$$

Se $R = R_y = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y) \}$. Então

$$\iiint_Q h(x, y, z) dV = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \int_{f(x, y)}^{g(x, y)} h(x, y, z) dz dx dy.$$

Exemplo 2: Encontre o volume da região D limitada pelas superfícies

$$z = x^2 + 3y^2 \text{ e } z = 8 - x^2 - y^2.$$

solução: O volume é

$$V = \iiint_D dz dy dx$$

A interseção das superfícies com

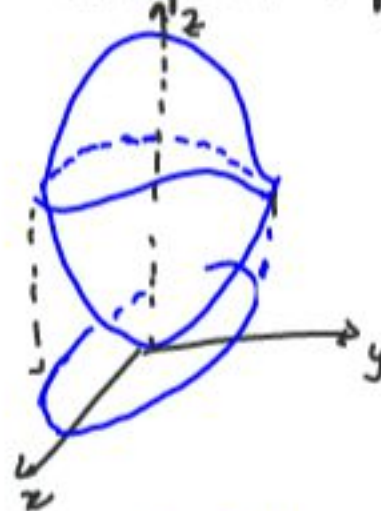
$$x^2 + 3y^2 = 8 - x^2 - y^2 \text{ ou}$$

$$2x^2 + 4y^2 = 8 \text{ ou } x^2 + 2y^2 = 4 \text{ (Elipse)}$$

ou

$$y = \pm \sqrt{\frac{4-x^2}{2}}. \text{ Assim}$$

$$V = \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}}^{\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}} \int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} dz dy dx = 8\pi\sqrt{2}.$$



$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \quad \begin{matrix} \text{a} \\ \text{b} \end{matrix} \frac{1}{2}$$

$$x = 2\cos\theta, y = \sqrt{2}\sin\theta \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 4 - y^2 \\ r^2 &= 4 - r^2 \sin^2\theta \end{aligned} \quad \begin{matrix} \text{ou} \\ \text{ou} \end{matrix} \frac{\cos\theta}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned} r^2 + r^2 \sin^2\theta &= 4 \\ (r + \frac{r \sin^2\theta}{2})^2 &= 4 + \frac{\sin^2\theta}{4} \end{aligned}$$

$$r = \frac{\sin\theta}{2} + \sqrt{4 + \frac{\sin^2\theta}{4}} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$x = r\cos\theta, y = \frac{r}{\sqrt{2}}\sin\theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

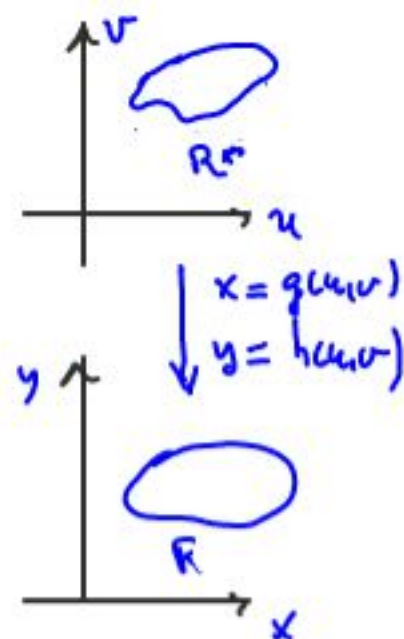
$$\int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{\frac{r^2}{2}}^{8-\frac{r^2}{2}} dz r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (8 - \frac{r^2}{2}) r dr d\theta = \int_0^{2\pi} (4r^2 - \frac{r^4}{4}) \Big|_0^2 d\theta = \int_0^{2\pi} (8 - 4) d\theta = 8\pi$$

Definição do Jacobiano
Se $x = g(u,v)$ e $y = h(u,v)$

$$T: R^{uv} \rightarrow R$$

$$(u,v) \mapsto T(u,v) = (x,y)$$

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$



Fórm. Mudança de variável:

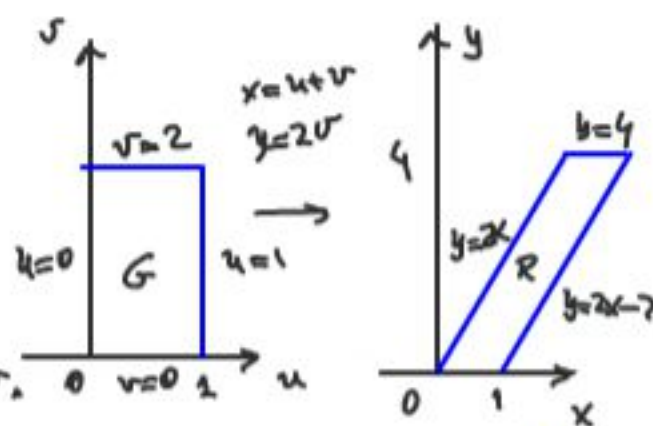
$$\iint_R f(x,y) dx dy = \iint_{R^*} f(g(u,v), h(u,v)) |J(u,v)| du dv$$

Exemplo: Calcule $\int_0^4 \int_{x=y/2}^{x=y/2+1} \frac{2x-y}{2} dx dy$

aplicando a transformação

$$u = \frac{2x-y}{2}, v = y/2$$

e integrando numa região apropriada no plano uv.



Solução: As equações $x = u+v$ e $y = 2v$ transformam G em R . Invertendo a transformação $u = \frac{2x-y}{2}$, $v = y/2$ transformam R em G .

Equação em xy para a fronteira de R	Equações em uv para a fronteira de G	Equações nas variáveis uv simplificados
$x = y/2$	$u+v = 2v/2 = v$	$u = 0$
$x = y/2 + 1$	$u+v = (2v/2) + 1 = v+1$	$u = 1$
$y = 0$	$2v = 0$	$v = 0$
$y = 4$	$2v = 4$	$v = 2$

O Jacobiano da transformação é

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial u}(u+v) & \frac{\partial}{\partial v}(u+v) \\ \frac{\partial}{\partial u}(2v) & \frac{\partial}{\partial v}(2v) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

Agora temos que

$$\int_0^4 \int_{x=y/2}^{x=y/2+1} \frac{2x-y}{2} dx dy = \int_{v=0}^{v=2} \int_{u=0}^{u=1} u |J(u,v)| du dv$$

$$= \int_0^2 \int_0^1 u(2) du dv = \int_0^2 [u^2]_0^1 dv = \int_0^2 dv = 2$$

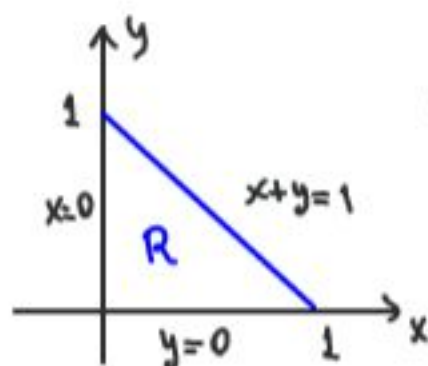
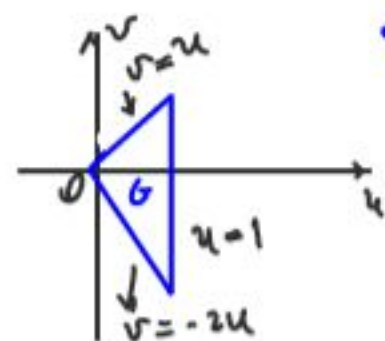
Exemplo 2: Usando uma transformação para integrar

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \sqrt{x+y} (y-2x)^2 dy dx.$$

Solução: O integrando segue a transformação $u = x+y$, $v = y-2x$. Isto nos conduz a:

$$x = \frac{u}{3} - \frac{v}{3}, \quad y = \frac{2u}{3} + \frac{v}{3} \quad (*)$$

Com as equações (*), podemos encontrar a fronteira de G



Equações com variáveis
em x, y da fronteira de R

Eq. em u, v para a
fronteira de G

Eq. nas variáveis
 u, v simplificadas

$$x+y=1$$

$$\left(\frac{u}{3} - \frac{v}{3}\right) + \left(\frac{2u}{3} + \frac{v}{3}\right) = 1$$

$$u=1$$

$$x=0$$

$$\frac{u}{3} - \frac{v}{3} = 0$$

$$v=u$$

$$y=0$$

$$\frac{2u}{3} + \frac{v}{3} = 0$$

$$v=-2u$$

O Jacobiano da transformação em (*) é

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{3}$$

Aplicando na integral temos

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \sqrt{x+y} (y-2x)^2 dy dx = \int_{u=0}^1 \int_{v=-2u}^u u^{1/2} v^2 |J(u,v)| dv du$$

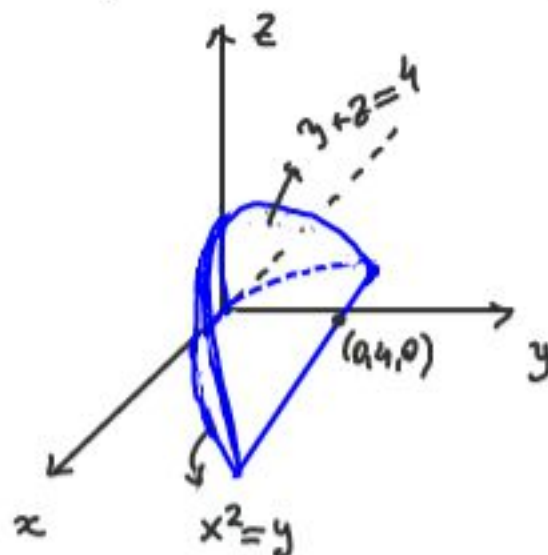
$$= \int_0^1 \int_{-2u}^u u^{1/2} v^2 \left(\frac{1}{3}\right) dv du = \frac{1}{3} \int_0^1 u^{1/2} \left[\frac{1}{3} v^3 \right]_{v=-2u}^u du$$

$$= \frac{1}{9} \int_0^1 u^{1/2} (u^3 + 8u^3) du = \int_0^1 u^{7/2} = \frac{2}{9} u^{9/2} \Big|_0^1 = \frac{2}{9}.$$

Exemplo 1: Ache o volume do sólido delimitado pelo cilindro $x^2 = y$ e pelos planos $y+z=4$ e $z=0$.

Solução: O volume é dado por

$$V = \int_{-2}^2 \int_{x^2}^4 \int_0^{4-y} dz dy dx = \frac{256}{15}.$$



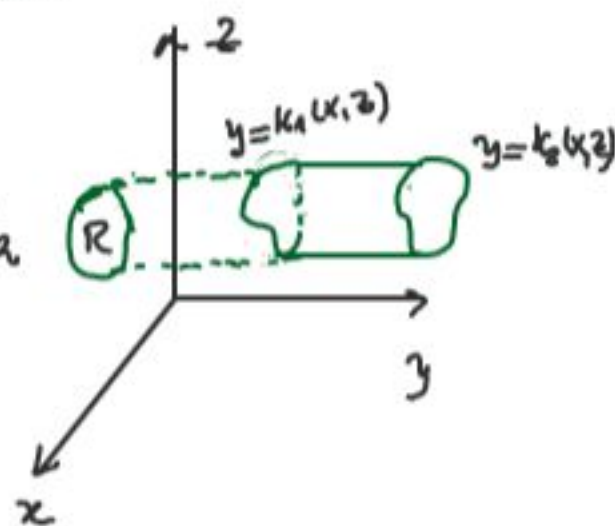
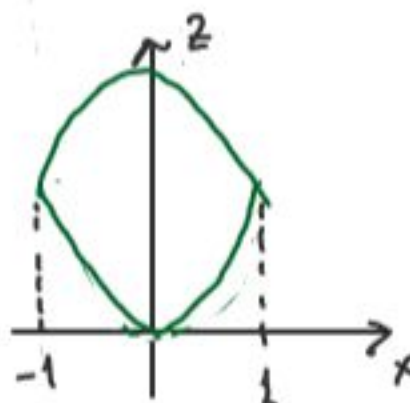
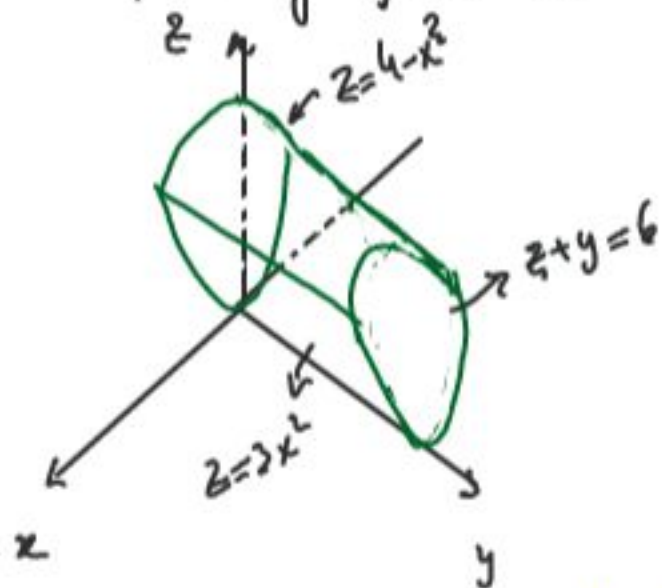
Se Q é um sólido da forma

$$Q = \{ (x,y,z) : a \leq x \leq b, h_1(x) \leq z \leq h_2(x), K_1(x,z) \leq y \leq K_2(x,z) \}$$

então

$$\iiint_Q f(x,y,z) dV = \int_a^b \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \int_{K_1(x,z)}^{K_2(x,z)} f(x,y,z) dy dz dx$$

Exemplo 2: Ache o volume da região Q delimitada pelos gráficos de $z = 3x^2$, $z = 4 - x^2$, $y = 0$ e $z + y = 6$.



$$V = \int_{-1}^1 \int_{3x^2}^{4-x^2} \int_0^{6-z} dy dz dx = \frac{304}{15}.$$

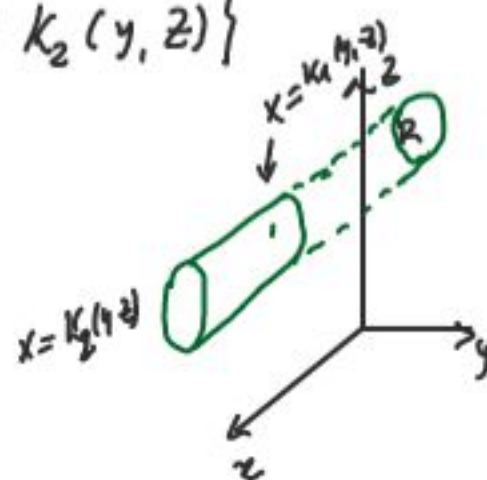
$\hookrightarrow \frac{264}{15} (?)$

Finalmente, Q pode ser uma região do tipo

$$Q = \{ (x,y,z) : (y,z) \in R, K_1(y,z) \leq x \leq K_2(y,z) \}$$

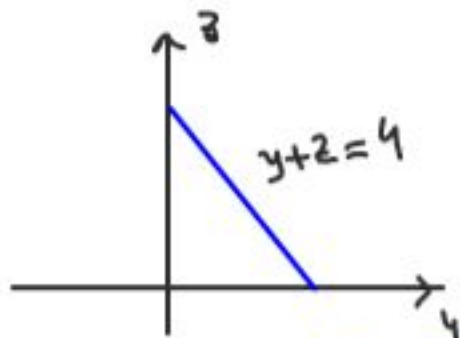
então

$$\iiint_Q f(x,y,z) dV = \iint_R \int_{K_1(y,z)}^{K_2(y,z)} f(x,y,z) dx dA$$



Exemplo 3: No exemplo 1 ache o volume do sólido S delimitado pelo cilindro $x^2 = y$ e pelos planos $y+z=4$ e $z=0$.

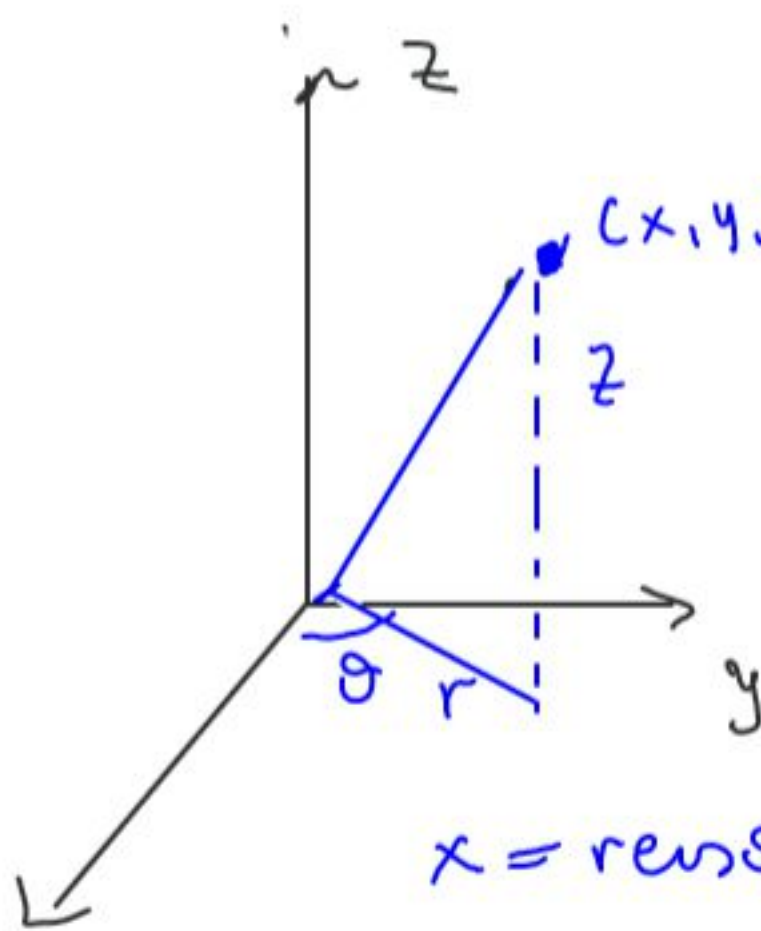
Solução: A projeção do sólido no plano- yz é:



Logo,

$$V = \int_0^4 \int_0^{4-z} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx dy dz.$$

Coordenadas Cilíndricas



$$E = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

$$D = \{(r, \theta) \mid \alpha \leq \theta \leq \beta, h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)\}$$

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{u_1(r \cos \theta, r \sin \theta)}^{u_2(r \cos \theta, r \sin \theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dz dr d\theta$$

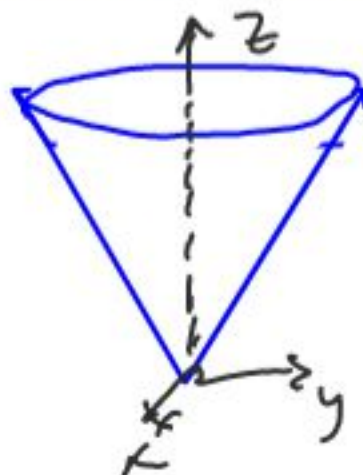
$f \equiv 1$ Temos o volume do sólido

$$V = \iiint_E dV = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{u_1}^{u_2} r dz dr d\theta.$$

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = z$$

Cone em coordenadas cilíndricas

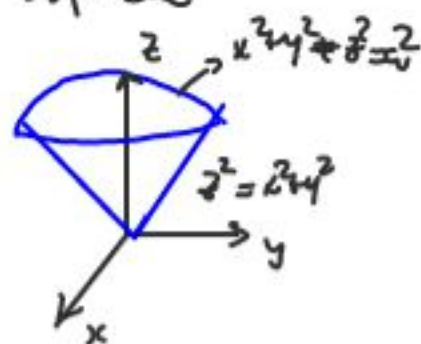
$$z = r$$



O cilindro é dado por $r=a$.

Exercício 1: Ache o volume do sólido determinado pela esfera de raio a e o cone $x^2 + y^2 = z^2$.

Solução: A interseção da esfera com o cone
 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ e $z^2 = x^2 + y^2$



é: $2z^2 = a^2 \Rightarrow z = \frac{a}{\sqrt{2}}$

O volume é

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \int_r^{\sqrt{a^2 - r^2}} r \, dz \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} r [\sqrt{a^2 - r^2}]_r^{\sqrt{a^2 - r^2}} \, dr \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} [r \sqrt{a^2 - r^2} - r^2] \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} - \left[\frac{\sqrt{u}}{2} \right]_{a^2}^{\frac{a^2}{2}} \, d\theta - \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{2u^{3/2}}{2 \cdot 3} \right]_{a^2}^{\frac{a^2}{2}} \, d\theta - \int_0^{2\pi} \frac{a^3}{3(\sqrt{2})^3} \, d\theta = \frac{1}{3} \left[a^3 - \frac{a^3}{2^{3/2}} \right] 2\pi - \frac{a^3}{3 \cdot 2^{3/2}} 2\pi$$

$u = a^2 - r^2$
 $du = -2r \, dr$
 $r = 0 \Rightarrow u = a^2$
 $r = \frac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2}$
 $\frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$
 $\frac{1}{2} - 1$

$2\sqrt{2}$
 $= \left(\frac{1}{3} a^3 - \frac{a^3}{3\sqrt{2}} \right) 2\pi = \frac{1}{3} \left(a^3 - \frac{a^3}{\sqrt{2}} \right) = \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \right) \pi$

Exercício 2: Suponha que o sólido seja a região que está abaixo da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ e acima da região determinada pelo cilindro $x^2 + y^2 = \frac{a^2}{2}$ cortado pelo plano $z = 0$. Ache o volume desse sólido.

Solução: O volume do sólido é

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \int_0^{\sqrt{a^2 - r^2}} r \, dz \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} r \sqrt{a^2 - r^2} \, dr \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_{\frac{3}{4}a^2}^{a^2} \sqrt{u} \, du \, d\theta = 2\pi \frac{2}{3} \left[u^{3/2} \right]_{\frac{3}{4}a^2}^{a^2} = \frac{2\pi}{3} \left[a^3 - \frac{3^{3/2} a^3}{2^3} \right]$$



Exemplo 3: Considere o sólido Q determinado pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ e o parabolóide $az \geq x^2 + y^2$. Qual o volume desse sólido?

Solução: Interseção da esfera e o parabolóide



$z^2 + z^2 - a^2 = 0 \Rightarrow z = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4a^2}}{2} = \frac{-1 \pm 2a\sqrt{2}}{2} = \frac{-1 \pm a\sqrt{2}}{2} = a \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2} \right)$
 daí $V = \int_0^{2\pi} \int_0^{a(\frac{\sqrt{2}-1}{2})} \int_{\frac{r^2}{2a}}^{\sqrt{a^2 - r^2}} r \, dz \, dr \, d\theta$

A massa de um sólido Q é dada por

$$M = \iiint_Q \delta(x, y, z) \, dV$$

Os MOMENTOS em relação aos três planos coordenados

$$M_{yz} = \iiint_R x \rho(x,y,z) dV, \quad M_{xz} = \iiint_R y \rho(x,y,z) dV, \quad M_{xy} = \iiint_R z \rho(x,y,z) dV$$

O centro de massa é $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ onde

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M}, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}$$

Se a densidade é constante, o centro de massa é chamado de centroide. Os momentos de inércia em relação aos três eixos coordenados são

$$I_x = \iiint_R (y^2 + z^2) \rho(x,y,z) dV, \quad I_y = \iiint_R (x^2 + z^2) \rho(x,y,z) dV, \quad I_z = \iiint_R (x^2 + y^2) \rho(x,y,z) dV$$

$$I_z = \iiint_R (x^2 + y^2) \rho(x,y,z) dV$$

Exemplo 1: Determine o centro de massa de um sólido com densidade constante que é limitado pelo cilindro parabólico $x = y^2$ e pelos planos $x = z$, $z = 0$ e $x = 1$.

Solução: O sólido Q e sua projeção estão nas figuras abaixo. As superfícies inferior e superior de Q são os planos $z = 0$ e $z = x$. Então

$$Q = \{(x,y,z) \mid -1 \leq y \leq 1, y^2 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq x\}$$

Se $\rho(x,y,z) = \rho$, a massa é

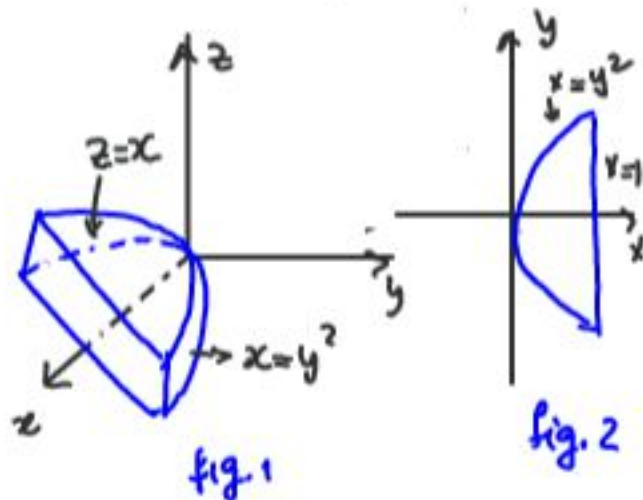
$$\begin{aligned} M &= \iiint_Q \rho dV = \rho \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 \int_0^x dz dx dy = \rho \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 x dx dy \\ &= \frac{\rho}{2} \int_{-1}^1 (1 - y^4) dy = \rho \int_0^1 (1 - y^4) dy = \frac{4\rho}{5} \end{aligned}$$

Pela simetria de Q e ρ em relação ao plano xz , podemos dizer que $M_{xz} = 0$ e, portanto, $\bar{y} = 0$. Agora

$$M_{yz} = \iiint_R x \rho dV = \rho \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 \int_0^x x dz dx dy = \frac{4\rho}{7}$$

$$M_{xy} = \iiint_R z \rho dV = \rho \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 \int_0^x z dz dx dy = \frac{2\rho}{7}$$

Logo:
 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (\frac{5}{7}, 0, \frac{2}{7})$



Exemplo 1: Um sólido Q está contido no cilindro $x^2 + y^2 = 1$, abaixo do plano $z = 4$ e acima do parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$. A densidade em algum ponto é proporcional à distância do ponto ao eixo do cilindro. Determine a massa de Q .

Solução: Em coordenadas cilíndricas o cilindro é $r = 1$ e o parabolóide é $z = 1 - r^2$ e podemos escrever

$$Q = \{ (r, \theta, z) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1, 1 - r^2 \leq z \leq 4 \}$$

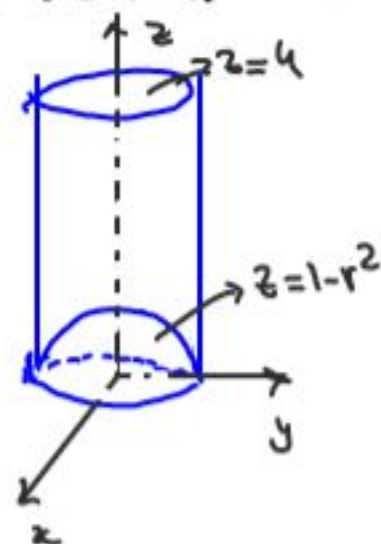
A densidade é proporcional à distância do eixo z , logo:

$$\delta(x, y, z) = k \sqrt{x^2 + y^2} = kr$$

Logo:

$$M = \iiint_Q \delta(x, y, z) dV = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{1-r^2}^4 (kr) r dz dr d\theta$$

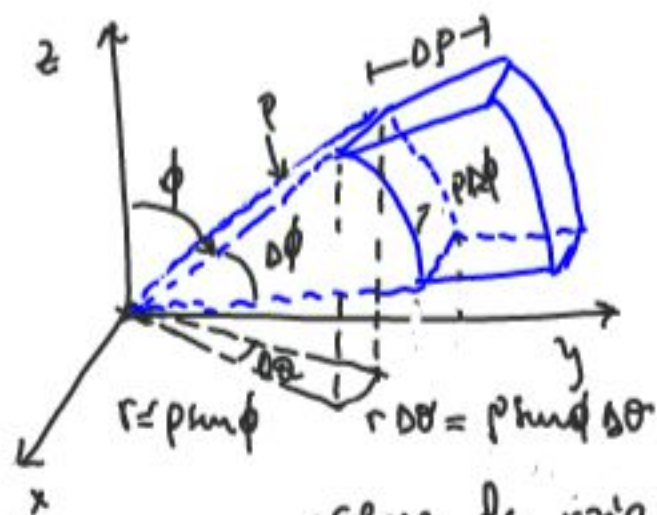
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 kr^2 [4 - (1 - r^2)] dr d\theta = k \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (3r^2 + r^4) dr = \frac{12\pi k}{5}$$



COORDENADAS ESFÉRICAS

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \phi$$

Elemento esférico



Volume do elemento esférico

$$\Delta V = \rho^2 \sin \phi \Delta \rho \Delta \phi \Delta \theta$$

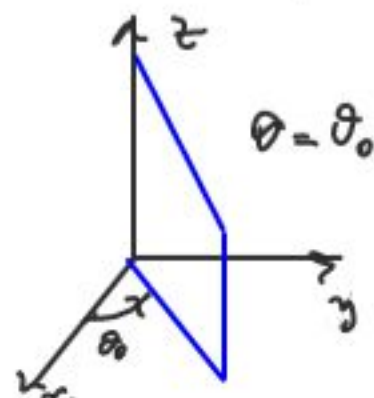
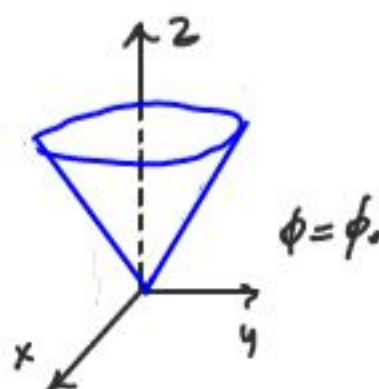
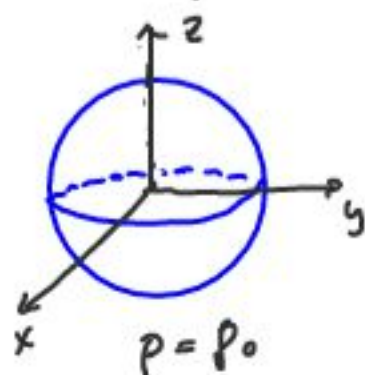
$$\rho \geq 0, \quad 0 \leq \phi \leq \pi, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Se $\rho = \rho_0$, o gráfico de $\rho = \rho_0$ é uma

esfera de raio ρ_0 com centro na origem. Se $\theta = \theta_0$

o gráfico de $\phi = \phi_0$ é um meio-cone de vértice na origem.

O gráfico de $\theta = \theta_0$ é um semiplano contendo o eixo z .



O elemento de volume em coordenadas esféricas é

$$dV = \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

Logo:

$$\iiint_Q f(\rho, \phi, \theta) dV = \iiint_Q f(\rho, \phi, \theta) \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

Exemplo: Ache o centróide de um sólido hemisférico Q de raio a

Solucão: Basta achar o $\bar{z}$:

$$M_{xy} = \iiint_Q z \, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^a (\rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

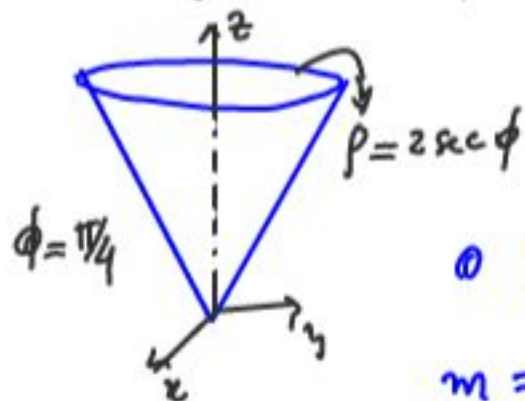
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^a \sin \phi \cos \phi \, d\phi \, d\theta = \frac{1}{4} \pi a^4$$

Como o volume da esfera é $V = \frac{4}{3} \pi a^3$ então o volume de um hemisfério é $V = \frac{2}{3} \pi a^3$. Logo,

$$\bar{z} = \frac{1}{4} \pi a^4 / \frac{2}{3} \pi a^3 = \frac{3}{8} a.$$

Logo: $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, 0, \frac{3}{8} a)$.

Exemplo 2: Um sólido Q é delimitado pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e pelo plano $z=2$. A densidade em $P(x, y, z)$ é diretamente proporcional ao quadrado da distância da origem a P . Ache sua massa.



Solucão: A densidade é

$$\delta = k(x^2 + y^2 + z^2) = k\rho^2$$

O plano $z=2$ é $\rho \cos \phi = 2 \Rightarrow \rho = 2 \sec \phi$. Assim

$$m = \iiint_Q \delta \, dV = k \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{2 \sec \phi} \rho^2 \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$= k \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \left[\frac{\rho^5}{5} \right]_0^{2 \sec \phi} \sin \phi \, d\phi \, d\theta = k \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \frac{32}{5} \sec^5 \phi \sin \phi \, d\phi \, d\theta$$

$$= \frac{32}{5} k \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \sec^3 \phi \sec \phi \tan \phi \, d\phi \, d\theta = \frac{32}{5} k \int_0^{2\pi} \left[\frac{\sec^4 \phi}{4} \right]_0^{\pi/4} d\theta$$

$$= \frac{8}{5} k (4-1) 2\pi = \frac{48}{5} k \pi.$$

$$\frac{2^4}{5} = ?$$

$$\left(\frac{1}{\cos \phi} \right)^4 \bigg|_0^{\pi/4} = \left(\frac{1}{\cos \pi/4} \right)^4 - \left(\frac{1}{\cos 0} \right)^4 = \left(\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \right)^4 - 1 = 4 - 1 = 3$$

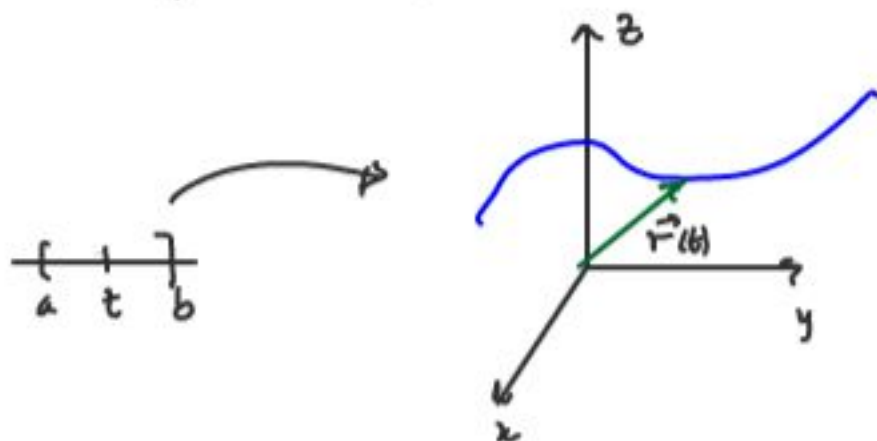
CURVAS NO ESPAÇO

1. Função vetorial

$$\vec{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$t \mapsto \vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$$

Quando t percorre $[a, b]$ o vetor $\vec{r}(t)$ descreve uma curva no espaço.



Exemplo: Seja $r(t) = (9-4t)\vec{i} + (-4+6t)\vec{j} + (3+3t)\vec{k}$, $t \in \mathbb{R}$. Desenhe $\vec{r}(t)$.

Solução: Note que: $\vec{r}(t) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ onde

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} x = 9-4t \\ y = -4+6t \\ z = 3+3t \end{cases} \quad \text{isto é uma reta no espaço.}$$

As equações paramétricas da curva são:

$$C: x = f(t), y = g(t), z = h(t), a \leq t \leq b.$$

Podemos representá-la dessa forma ou na forma vetorial

$$\vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}, a \leq t \leq b.$$

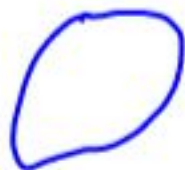
A orientação de C é a direção determinada pelos valores crescentes de t .



curva aberta

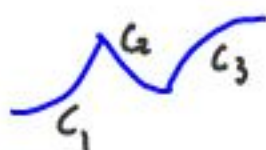


curva fechada



curva fechada simples

Uma curva C é suave se admite uma parametrização suave: $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$, com f' , g' e h' contínuas e não simultaneamente nulas, exceto possivelmente nas extremidades. Uma curva C é parcialmente suave se ela é a união finita de curvas suaves.



$C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ é parcialmente suave.

CURVAS NO PLANO

$$\vec{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto \vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j}$$

$$C: \vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j}, \quad a \leq t \leq b$$

ou

$$C: x = f(t), y = g(t), \quad a \leq t \leq b$$

Exemplo: O círculo

$$C: x^2 + y^2 = a^2 \quad \text{ou}$$

$$C: x = a \cos t, y = a \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

ou ainda

$$C: \vec{r}(t) = a \cos t \vec{i} + a \sin t \vec{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Exemplo 2: Parábola

$$C: x = 2t, y = t^2 - 1, \quad -1 \leq t \leq 2$$

ou

$$C: \vec{r}(t) = 2t\vec{i} + (t^2 - 1)\vec{j}, \quad -1 \leq t \leq 2$$

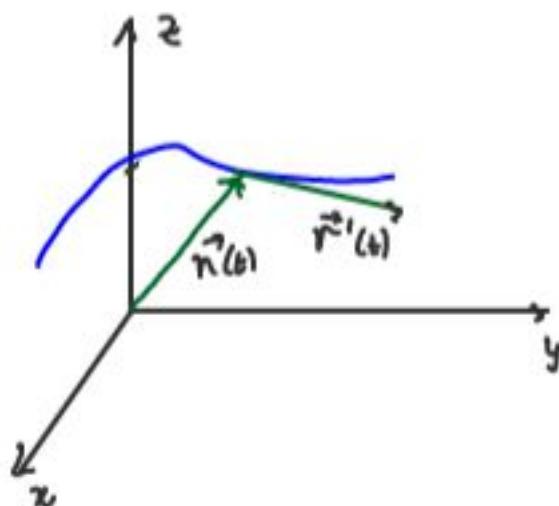
A cada curva C dada por

$$\vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}, \quad a \leq t \leq b$$

podemos tomar o vetor tangente

$$\vec{r}'(t) = f'(t)\vec{i} + g'(t)\vec{j} + h'(t)\vec{k}$$

Neste caso,

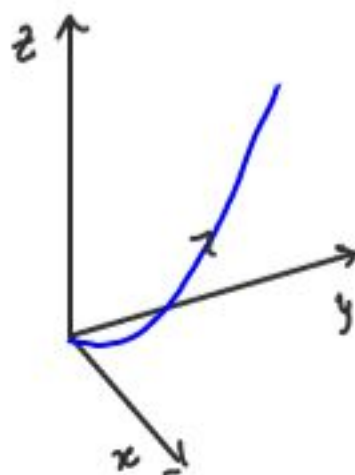


Uma cúbica reversa é uma curva com parametrização

$$x = at, y = bt^2, z = ct^3$$

onde a, b, c são constantes não-nulas.

Exemplo: $\vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}, t \geq 0$.



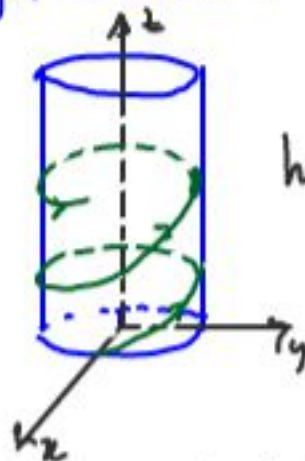
Exemplo 2: Seja $\vec{r}(t) = a \cos t \vec{i} + a \sin t \vec{j} + bt \vec{k}$ $t \geq 0$ a, b constantes positivas.
 Trace essa curva.

Solução: Equações paramétricas da curva

$$x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt, t \geq 0$$

Observe que $x^2 + y^2 = a^2$

Logo, a curva faz num cilindro circular reto de raio a .



hélice circular

Podemos definir o comprimento de uma curva C

$$x = f(t), y = g(t), z = h(t), a \leq t \leq b$$

$\alpha \subset \mathbb{R} \Rightarrow \alpha$ auto intercepta, exceto possivelmente em $t=a$ e $t=b$ por

$$L = \int_a^b \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2 + (h'(t))^2} dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt.$$

Exemplo 1: Ache o comprimento da hélice circular

$$x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt, 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Solução: O comprimento da hélice circular é

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2 + b^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2} dt = \sqrt{a^2 + b^2} 2\pi.$$

CAMPOS VETORIAIS

Um campo vetorial em três dimensões é uma função $\vec{F}$ cujo domínio D é um subconjunto de $\mathbb{R}^3$ e cujo contradomínio é um subconjunto de $\mathbb{R}^3$. Se (x, y, z) está em D então

$$\vec{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\vec{F}(x, y, z) = M(x, y, z) \vec{i} + N(x, y, z) \vec{j} + P(x, y, z) \vec{k}$$

onde M, N e P são funções escalares.

$$M, N, P: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}.$$

Se $\vec{F}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dizemos que $\vec{F}$ é um campo vetorial bidimensional.

$$\vec{F}(x, y) = M(x, y) \vec{i} + N(x, y) \vec{j}.$$

A função comprimento de arco é definida por

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt$$

ou se C é a curva suave

$$C: x = f(t), y = g(t), z = h(t), a \leq t \leq b$$

então

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2 + (h'(t))^2} dt$$

assim

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2 + h'(t)^2}$$

ou

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

A diferencial de s é

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}.$$

Quando uma curva C é parametrizada pelo seu comprimento de arco então $\|s'(t)\| = 1$.

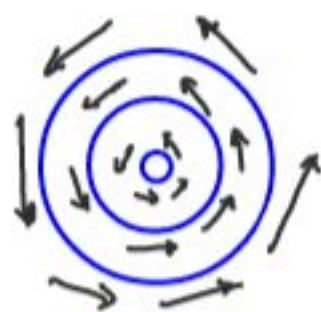
Exemplo 1: Descreva o campo vetorial $\vec{F}(x,y) = -y\vec{i} + x\vec{j}$.

Considere um ponto arbitrário $P(x,y)$ e seja $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ o vetor posição de P . Note que $\vec{F}$ é ortogonal a $\vec{r}$, logo é tangente ao círculo de raio $\|\vec{r}\|$. De fato,

$$\vec{r} \cdot \vec{F}(x,y) = (x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot (-y\vec{i} + x\vec{j}) = 0$$

Note também que

$$\|\vec{F}(x,y)\| = \sqrt{y^2 + x^2} = \|\vec{r}\|.$$



Definição: Seja $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ o vetor posição de (x,y,z) e denotemos por $\vec{u} = \frac{1}{\|\vec{r}\|} \vec{r}$ o vetor unitário com a mesma direção de $\vec{r}$. Um campo vetorial é um campo quadrado inverso se

$$\vec{F}(x,y,z) = \frac{C}{\|\vec{r}\|^2} \vec{u} = \frac{C}{\|\vec{r}\|^3} \vec{r}.$$

Exemplos de campos quadrados inversos

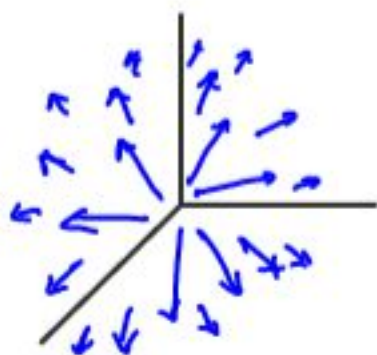
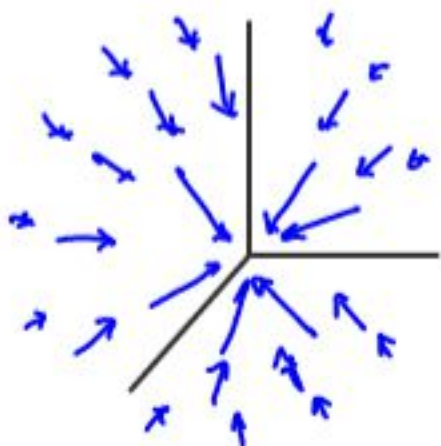
Exemplo 1: Lei de Gravitação Universal de Newton

$$\vec{F}(x,y,z) = -G \frac{m_0 m}{\|\vec{r}\|^2} \vec{u}. \quad (\text{força de atração entre um corpo de massa } m_0 \text{ e um outro de massa } m).$$

m_0 está localizado na origem de um sistema de coordenadas xyz , G é a constante gravitacional, $\vec{r}$ o vetor posição do ponto K , uma partícula de massa m está localizada em K .

Exemplo 2: Lei de Coulomb

$$\vec{F}(x,y,z) = C \frac{Qq}{\|\vec{r}\|^2} \vec{u} \quad (\text{força que } Q \text{ exerce sobre } q)$$



Campos quadrados inversos

Seja $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ um campo escalar e considere o campo vetorial ∇f definido por

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

Esse campo é chamado de campo gradiente.

Dado um campo vetorial $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido por

$$\vec{F}(x, y, z) = M(x, y, z) \vec{i} + N(x, y, z) \vec{j} + P(x, y, z) \vec{k}$$

e se existe uma função escalar $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

então digamos $\vec{\nabla} f = \vec{F}$ que $\vec{F}$ é um campo conservativo.

Exemplo 1: O campo $\vec{F}(x, y) = y \cos(xy) \vec{i} + x \cos(xy) \vec{j}$ é um campo conservativo pois a função $f(x, y) = \sin(xy)$ satisfaz

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} = y \cos(xy) \vec{i} + x \cos(xy) \vec{j}.$$

Exemplo 2: Todo campo quadrado inverso é conservativo.

De fato, seja $\vec{F}(x, y, z) = \frac{C}{\|\vec{r}\|^2} \vec{u}$ onde $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, e

$$\vec{u} = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}, \quad \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \text{ Note que a função}$$

$$f(x, y, z) = -\frac{C}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \text{ satisfaz } \vec{\nabla} f = \vec{F}.$$

Veremos:
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [C(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}] = -\frac{1}{2} C(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \cdot 2x = \frac{-Cx}{\|\vec{r}\|^3}$$

Analogamente

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-Cy}{\|\vec{r}\|^3} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{-Cz}{\|\vec{r}\|^3}$$

Assim

$$\vec{\nabla} f = -\frac{C(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})}{\|\vec{r}\|^3} = \frac{-C\vec{u}}{\|\vec{r}\|^2}.$$

Logo: $\vec{F}$ é um campo conservativo nos pontos onde $\vec{r} \neq \vec{0}$.

Exemplo 3: O campo $\vec{F}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$ é conservativo pois existe f função escalar tal que $\vec{\nabla} f = x\vec{i} + y\vec{j}$.

De fato, temos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = y$$

$$\text{donde } f(x, y) = \frac{x^2}{2} + g(y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = g'(y) = y \Rightarrow g(y) = \frac{y^2}{2} + C.$$

$$\text{Logo, } f(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \text{ satisfaz } \vec{\nabla} f = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Exemplo 4: O campo $\vec{F} = -x\vec{i} + xy\vec{j}$ não é conservativo.

De fato, se existisse $f(x,y)$ tal que $\nabla f = \vec{F}$ então

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -x \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xy$$

assim $f(x,y) = -\frac{x^2}{2} + g(y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = g'(y) = xy$ (absurdo!)

pois $g'(y)$ depende só de y e não de x .

Seja $\vec{F} = M\vec{i} + N\vec{j} + P\vec{k}$ o campo escalar divergente de $\vec{F}$, denotado por $\text{div } \vec{F}$, é definido por

$$\text{div } \vec{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Exemplo: Se $\vec{F}(x,y,z) = x^2\vec{i} + 2xy\vec{j} + z^2\vec{k}$ então

$$\text{div } \vec{F} = 2x + 2x + 2z = 4x + 2z.$$

Seja $\vec{F} = M\vec{i} + N\vec{j} + P\vec{k}$ definimos o campo rotacional de $\vec{F}$, e denotamos por $\text{rot } \vec{F}$, como

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\vec{k}$$

Exemplo: Considerando $\vec{F}(x,y,z) = x^2\vec{i} + 2xy\vec{j} + z^2\vec{k}$ então

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & 2xy & z^2 \end{vmatrix} = (0-0)\vec{i} + (0-0)\vec{j} + (2y-2x)\vec{k} = 2(y-x)\vec{k}$$

Vamos analisar sobre o rotacional de um campo conservativo.

Seja $\vec{F}$ um campo conservativo então existe f tal que $\nabla f = \vec{F}$.

Ou seja,

$$\vec{F} = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

Assim

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)\vec{k} = \vec{0} \quad \text{se } f \in C^2.$$

Exercício: Seja $\vec{F}(x,y,z) = xy^2z^4\vec{i} + (2z^2y+z)\vec{j} + (8z^2)\vec{k}$, ache o $\text{div } \vec{F}$.

Solução: $\text{div } \vec{F} = y^2z^4 + 2z^2 + 8y^2z$.

INTEGRAIS CURVÍLINEAS

Seja f uma função contínua numa região D do plano-xy que contenha a curva suave $C: x = \alpha(t), y = \beta(t), a \leq t \leq b$.

Particionando o intervalo $[a,b]$

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

Denotemos por $|P|$ a norma da partição. Se $P_k(x_k, y_k)$ é um ponto de C correspondente a t_k , então os pontos $P_0, P_1, \dots, P_n$ dividem C em n partes $\overline{P_{k-1}P_k}$. Seja

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \Delta y_k = y_k - y_{k-1}, \Delta s_k = \text{comprimento de } \overline{P_{k-1}P_k}$$

Para cada k , seja $Q_k(u_k, v_k)$ um ponto de $\overline{P_{k-1}P_k}$. Formemos os três seguintes somatórios

$$\sum f(u_k, v_k) \Delta s_k, \sum f(u_k, v_k) \Delta x_k, \sum f(u_k, v_k) \Delta y_k$$

Definimos as integrais curvilineas se os limites existirem

$$\int_C f(x,y) ds = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_k f(u_k, v_k) \Delta s_k \quad (1)$$

$$\int_C f(x,y) dx = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_k f(u_k, v_k) \Delta x_k \quad (2)$$

$$\int_C f(x,y) dy = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_k f(u_k, v_k) \Delta y_k \quad (3)$$

Se f é contínua em D , então os limites em (1), (2) e (3) existem e não os mesmos para toda parametrização de C (desde que se tenha a mesma orientação). Usando a parametrização

$C: x = \alpha(t), y = \beta(t), a \leq t \leq b$, temos

$$dx = \alpha'(t)dt, dy = \beta'(t)dt, ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{(\alpha'(t))^2 + (\beta'(t))^2} dt$$

Temos então o resultado.

Teorema: Se uma curva suave C é dada por $x = \alpha(t), y = \beta(t), a \leq t \leq b$ e se $f(x,y)$ é contínua numa região D contendo C , então

$$\int_C f(x,y) ds = \int_a^b f(\alpha(t), \beta(t)) \sqrt{(\alpha'(t))^2 + (\beta'(t))^2} dt$$

$$\int_C f(x,y) dx = \int_a^b f(\alpha(t), \beta(t)) \alpha'(t) dt$$

$$\int_C f(x,y) dy = \int_a^b f(\alpha(t), \beta(t)) \beta'(t) dt.$$

Observação: Tal resultado pode ser estendido para curvas parcialmente suaves, isto é,

$$C = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n$$

então

$$\int_C f(x,y) ds = \int_{C_1} f(x,y) ds + \int_{C_2} f(x,y) ds + \dots + \int_{C_n} f(x,y) ds.$$

Também

$$\int_C f(x,y) ds = - \int_{-C} f(x,y) ds$$

e

$$\int_C (f(x,y) + g(x,y)) ds = \int_C f(x,y) ds + \int_C g(x,y) ds$$

Exemplo 1: Calcule $\int_C xy^2 ds$ se C admite a parametrização

$$x = \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq \pi/2.$$

Solução: Aplicando o teorema obtemos

$$\int_C xy^2 ds = \int_0^{\pi/2} \cos t (\sin^2 t) \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} dt = \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos t dt = \frac{1}{3}.$$

Exemplo 2: Calcule $\int_C xy^2 dx + \int_C xy^2 dy$ se C é a parte da parábola $C: y = x^2$ de $(0,0)$ a $(2,4)$.

Solução: As equações paramétricas de C são

$$x = t, y = t^2, 0 \leq t \leq 2$$

As diferenciais são

$$dx = dt, dy = 2t dt$$

Assim

$$\int_C xy^2 dx = \int_0^2 t (t^2)^2 dt = \int_0^2 t^5 dt = \frac{32}{3}$$

$$\int_C xy^2 dy = \int_0^2 t (t^2)^2 (2t) dt = 2 \int_0^2 t^6 dt = \frac{256}{7}.$$

Podemos ter feito, $y = x^2$, $0 \leq x \leq 2$ assim $dx = dx$, $dy = 2x dx$

$$\int_C xy^2 dx = \int_0^2 x (x^2)^2 dx = \int_0^2 x^5 dx$$

$$\int_C xy^2 dy = \int_0^2 x (x^2)^2 (2x dx) = 2 \int_0^2 x^6 dx$$

Considere a função vetorial $\vec{F}$ com domínio D onde a curva $C: \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$, $a \leq t \leq b$, está incluída. Definimos

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt$$

em outras palavras, podemos dizer que se $\vec{F}(x,y) = M(x,y)\vec{i} + N(x,y)\vec{j}$ e $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ então

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C M(x,y) dx + N(x,y) dy$$

Se $\vec{r} = \vec{s}$ representam dois caminhos equivalentes e regulares então

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad \begin{array}{c} \vec{r} \\ \swarrow \searrow \\ C \end{array}$$

desde que $\vec{r} = \vec{s}$ originem C na mesma direção, e

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad \begin{array}{c} \vec{r} \\ \nearrow \nwarrow \\ C \end{array}$$

Se $\vec{r} = \vec{s}$ originem C em direções opostas. Tudo que fizemos para o plano vale para o espaço, ou seja, se

$$\vec{F} = M\vec{i} + N\vec{j} + P\vec{k}$$

com M, N, P funções escalares e suponha C parametrizada por $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$, $a \leq t \leq b$

assim

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C M dx + N dy + P dz$$

ou

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b M(f(t), g(t), h(t)) f'(t) dt + \int_a^b N(f(t), g(t), h(t)) g'(t) dt + \int_a^b P(f(t), g(t), h(t)) h'(t) dt$$

Exemplo 3: Seja $\vec{F}$ um campo vetorial

$$\vec{F}(x,y) = \sqrt{y} \vec{i} + (x^3 + y) \vec{j}$$

Calcular a integral de linha de $\vec{F}$ desde $(0,0)$ a $(1,1)$ ao longo das curvas

- a) a reta L de equações paramétricas $x=t, y=t, 0 \leq t \leq 1$.
- b) o caminho C de equações paramétricas $x=t^2, y=t^3, 0 \leq t \leq 1$.

Solução: Para o caminho de parte (a) seja $\vec{\alpha}(t) = t\vec{i} + t\vec{j}$. Então

$$\vec{\alpha}'(t) = \vec{i} + \vec{j} \text{ e } \vec{F}(\vec{\alpha}(t)) = \sqrt{t} \vec{i} + (t^3 + t) \vec{j}, \text{ assim}$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\alpha} = \int_{(0,0)}^{(1,1)} \vec{F} \cdot d\vec{\alpha} = \int_0^1 (\sqrt{t} + t^3 + t) dt = \left(\frac{2}{3} t^{3/2} + \frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2} \right)_0^1 = \frac{17}{12}.$$

(b) Tomemos $\vec{\alpha}(t) = t^2 \vec{i} + t^3 \vec{j}$ então $\vec{\alpha}'(t) = 2t \vec{i} + 3t^2 \vec{j}$ e

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\alpha} = \int_0^1 \vec{F}(\vec{\alpha}(t)) \cdot \vec{\alpha}'(t) dt = \int_0^1 (2t^{5/2} + 3t^8 + 3t^5) dt = \frac{59}{42}.$$

APLICAÇÃO

Imagine uma curva C no espaço tridimensional como um fio de arame delgado com densidade variável. Suponha que a densidade é expressa por $\delta(x,y,z)$. A massa total do arame é

$$m = \int_C \delta(x,y,z) ds$$

O centro de massa se define por

$$\bar{x}m = \int_C x \delta(x,y,z) ds, \bar{y}m = \int_C y \delta(x,y,z) ds, \bar{z}m = \int_C z \delta(x,y,z) ds$$

Um arame de densidade constante dig-se uniforme. Neste caso, o centro de gravidade é o centróide.

Exemplo 1: Calcular a massa do arame m de uma mola que tem a forma de uma hélice cuja equação vetorial é

$$\vec{\alpha}(t) = a \cos t \vec{i} + a \sin t \vec{j} + bt \vec{k}, 0 \leq t \leq 2\pi$$

se a densidade em (x,y,z) é $\delta(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Solução: A integral para calcular m é

$$m = \int_C (x^2 + y^2 + z^2) ds = \int_0^{2\pi} (a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t + b^2 t^2) \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2 + b^2} dt$$

$$\text{daí } m = \sqrt{a^2 + b^2} \int_0^{2\pi} (a^2 + b^2 t^2) dt = \sqrt{a^2 + b^2} \left(2\pi a^2 + \frac{8}{3} \pi^3 b^2 \right)$$

Neste exemplo,

$$\begin{aligned} \bar{z} m &= \int_C z f(x, y, z) ds = \int_C z (x^2 + y^2 + z^2) ds \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2} b t (a^2 + b^2 t^2) dt = b \sqrt{a^2 + b^2} (2\pi a^2 + 4\pi^3 b^2) \end{aligned}$$

$$\text{Assim } \bar{z} = \frac{b (2\pi a^2 + 4\pi^3 b^2)}{2\pi a^2 + \frac{8}{3} \pi^3 b^2}.$$

$$\text{Como } \bar{x} = \bar{y} = 0 \text{ então } (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, 0, \bar{z}).$$

O momento de inércia de um arame delgado com densidade δ , em relação a uma reta L é definido por

$$I_L = \int_C d^2(x, y, z) \delta(x, y, z) ds$$

onde $d(x, y, z)$ é a distância de um ponto (x, y, z) de C a L e $\delta(x, y, z)$ é a densidade do arame.

Exemplo 2: Calcular o momento de inércia I_z da mola do exemplo anterior.

$$\text{Solução: } d(x, y, z) = x^2 + y^2 = a^2 \text{ e } \delta(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \text{ então}$$

$$I_z = \int_C (x^2 + y^2) (x^2 + y^2 + z^2) ds = a^2 \int_C (x^2 + y^2 + z^2) ds = a^2 m.$$

TRABALHO

Considere $\vec{F}$ um campo de forças: $\vec{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\vec{i} + N(x, y, z)\vec{j} + P(x, y, z)\vec{k}$. Queremos calcular o trabalho realizado por $\vec{F}$ ao longo de uma curva C . Seja C a curva parametrizada por

$$x = g(t), y = h(t), z = k(t), a \leq t \leq b.$$

Considere uma partição de $[a, b]$

$$P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$$

Para cada ponto $P_k(x_k, y_k, z_k)$ há um valor t_k associado.

Denotemos

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \Delta y_k = y_k - y_{k-1}, \Delta z_k = z_k - z_{k-1}$$

$$\overrightarrow{P_{k-1}P_k} = \Delta x_k \vec{i} + \Delta y_k \vec{j} + \Delta z_k \vec{k}. \text{ Tomemos a soma de Riemann}$$

$$\begin{aligned} \sum_k \vec{F}_k \cdot \overrightarrow{P_{k-1}P_k} &= \sum_k (M_k \vec{i} + N_k \vec{j} + P_k \vec{k}) \cdot (\Delta x_k \vec{i} + \Delta y_k \vec{j} + \Delta z_k \vec{k}) \\ &= \sum_k M_k \Delta x_k + N_k \Delta y_k + P_k \Delta z_k \end{aligned}$$

daí

$$\lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_k M_k \Delta x_k + N_k \Delta y_k + P_k \Delta z_k = \int_C M dx + N dy + P dz$$

Se s é o parâmetro de comprimento de arco da curva C e $\vec{r}$ é o vetor posição do ponto na curva

$$\vec{r}(s) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

onde $x = g(s)$, $y = h(s)$, $z = k(s)$ então o vetor tangente à curva C em cada ponto é

$$\vec{T}(s) = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{dx}{ds} \vec{i} + \frac{dy}{ds} \vec{j} + \frac{dz}{ds} \vec{k}$$

A componente tangencial da força $\vec{F}$ em cada ponto é

$$\vec{F} \cdot \vec{T}(s) = M \frac{dx}{ds} + N \frac{dy}{ds} + P \frac{dz}{ds}$$

Logo, se $a \leq s \leq b$, temos que o trabalho de $\vec{F}$ ao longo de C é

$$\begin{aligned} W &= \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(s) \cdot \vec{T}(s) ds = \int_C \left(M \frac{dx}{ds} + N \frac{dy}{ds} + P \frac{dz}{ds} \right) ds \\ &= \int_C M dx + N dy + P dz \end{aligned}$$

Exemplo 1: Se $\vec{F}(x,y) = (x^2+y^2)\vec{i} + (2xy)\vec{j}$, calcular $\int_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds$ sobre as seguintes curvas:

a) de $(0,0)$ a $(1,1)$ sobre a reta $y=x$;

b) de $(0,0)$ a $(1,1)$ sobre a parábola $y=x^2$.

Solução: (a) Podemos parametrizar $y=x$, por

$$x=t, y=t, 0 \leq t \leq 1.$$

$$\text{Assim, } \int_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds = \int_C (x^2+y^2) dx + (2xy) dy = \int_0^1 [(t^2+t^2) + 2t^2] dt = \int_0^1 4t^2 dt = \frac{4}{3}.$$

Analogamente, para o caso (b) temos que a parábola pode ser parametrizada por

$$x=t, y=t^2, 0 \leq t \leq 1$$

assim

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 [(t^2 + t^4) + (2tt^2)t] dt = \int_0^1 (t^2 + 5t^4) dt = \frac{4}{3}$$

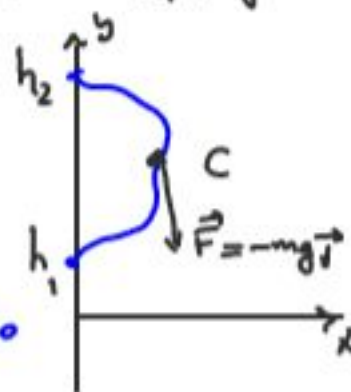
Exemplo 2: A força gravitacional na vizinhança de um ponto da superfície da Terra é representada por $-mg\vec{j}$, onde o eixo-y aponta para cima. Mostre que o trabalho realizado por essa força sobre um corpo que se desloca, num plano vertical, da altura h_1 até a altura h_2 , seguindo qualquer caminho é igual a $mg(h_1 - h_2)$.

Solução: Seja $\vec{F} = -mg\vec{j}$, a força de gravidade que atua no corpo numa posição $\vec{r}$ e esse $\vec{r}$ representa a curva em que o corpo está se deslocando podemos dizer que

$$\vec{r}(t) = \alpha(t)\vec{i} + \beta(t)\vec{j}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

onde $\alpha(0)=0$ e $\beta(0)=h_1$ e $\alpha(1)=0$ e $\beta(1)=h_2$. O trabalho que atua no corpo será dado por

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_0^1 mg \beta'(t) dt = -mg(\beta(t)) \Big|_0^1 = -mg(h_2 - h_1) = mg(h_1 - h_2).$$



Exemplo 3: Seja C a parte da parábola $y=x^2$ entre os pontos $(0,0)$ a $(3,9)$. Se $\vec{F}(x,y) = -y\vec{i} + x\vec{j}$ é uma força que atua em (x,y) , ache o trabalho realizado por $\vec{F}$ ao longo de C de

(a) $(0,0)$ a $(3,9)$

(b) $(3,9)$ a $(0,0)$.

Solução: Seja $C: x=t, y=t^2, 0 \leq t \leq 3$, então

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C -y dx + x dy = \int_0^3 (-t^2 + (2t)t) dt = \int_0^3 t^2 dt = 9$$

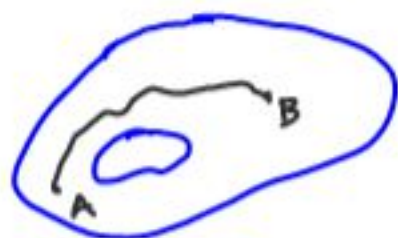
Agora seja $-C: x=-t, y=t^2, -3 \leq t \leq 0$

$$\begin{aligned} W &= \int_{-C} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{-C} -y dx + x dy = \int_{-3}^0 (t^2 - t(2t)) dt = \int_{-3}^0 -t^2 dt = -\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-3}^0 \\ &= -\frac{0^3}{3} + \frac{(-3)^3}{3} = -9. \end{aligned}$$

INDEPENDÊNCIA DO CAMINHO

Integrais que tem o mesmo valor ao longo de qualquer caminho que una dois pontos A e B são integrais independentes do caminho. Se a integral $\int_C f(x,y) ds$ é independente do caminho então podemos denotá-la por $\int_A^B f(x,y) ds$.

Região Conexa: Uma região diz-se conexa se quaisquer dois pontos dessa região podem ser ligados por uma curva parcialmente suave, inteiramente contida na região.



Região conexa



Região não-conexa

Teorema: Se $\vec{F}(x,y) = M(x,y)\vec{i} + N(x,y)\vec{j}$ é contínua numa região conexa aberta D, então a integral curvilínea $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ é independente do caminho, se e somente se, $\vec{F}$ é conservativo.

Prova: Suponha que exista f tal que $\nabla f = \vec{F}$

$$\vec{F}(x,y) = M(x,y)\vec{i} + N(x,y)\vec{j} = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$$

sejam $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2) \in D$ e C uma curva arbitrária ligando A e B então

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C M dx + N dy = \int_C \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

se C admite a parametrização $x = g(t)$, $y = h(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, então

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(g(t), h(t)) g'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(t), h(t)) h'(t) \right) dt$$

Para regra da cadeia

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} [f(g(t), h(t))] dt = f(g(t_2), h(t_2)) - f(g(t_1), h(t_1))$$

$$= f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1) = [f(x,y)]_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)}$$

Em outras palavras: Se $\vec{F}(x,y) = M(x,y)\vec{i} + N(x,y)\vec{j}$ é contínua em D, região conexa e aberta, e C é uma curva parcialmente suave em D com extremidades $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$. Se existe f tal que $\nabla f = \vec{F}$ então

$$\int_{A(x_1, y_1)}^{B(x_2, y_2)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = [f(x, y)]_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)}$$

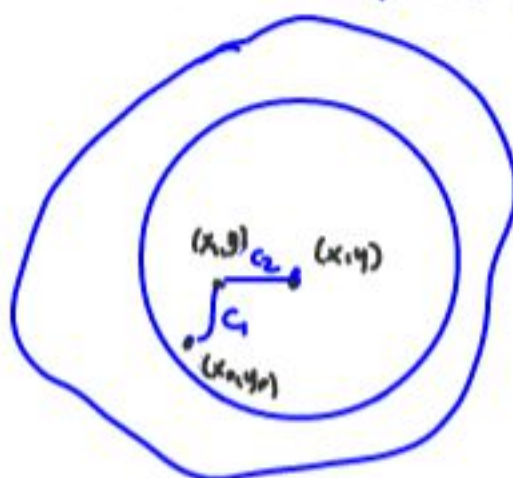
ou seja, o integral independe do caminho.

Reciprocamente, suponha que a integral seja independente do caminho, defina

$$f(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

para todo $(x, y) \in D$. f depende só de x e y , escolha um círculo D com centro (x, y) e seja (x_1, y_1) um ponto interno ao círculo $x_1 \neq x$. Temos que

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{(x_1, y_1)}^{(x, y)} \vec{F} \cdot d\vec{r} \end{aligned}$$



Como o primeiro integral não depende de x , temos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int_{(x_1, y_1)}^{(x, y)} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Seja $\vec{F} \cdot d\vec{r} = M(x, y) dx + N(x, y) dy$, $dy = 0$ em C_2 , então

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \int_{(x_1, y_1)}^{(x, y)} M(x, y) dx = M(x, y).$$

Analogamente, $\frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y)$

Logo, $\nabla f = M\vec{i} + N\vec{j} = \vec{F}$.

Observação: 1) A prova do Teorema pode ser estendida a curvas parcialmente suaves subdividindo C num número finito de curvas suaves.

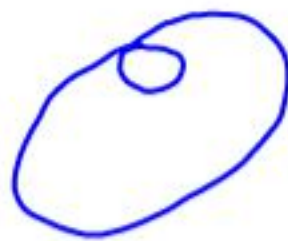
2) A demonstração do Teorema anterior nos dá um método para calcular integrais curvilíneas que não dependem do caminho. Descrevemos esse método pelo seguinte teorema.

Teorema: Seja $\vec{F}(x, y) = M(x, y)\vec{i} + N(x, y)\vec{j}$ contínua numa região aberta conexa D e C uma curva parcialmente suave em D com extremidades $A(x_1, y_1) \in B(x_2, y_2)$. Se $\vec{F} = \nabla f$, então $\int_C M dx + N dy = \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = [f(x, y)]_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)}$.

Se uma integral curvilínea $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ é independente do caminho, então pelo Teorema anterior com $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ vemos que $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$, para toda curva fechada simples.



curva fechada simples



curva fechada não-simples.

Exemplo 1: Seja $\vec{F}(x, y) = (6xy^2 + 2y)\vec{i} + (6x^2y + 2x)\vec{j}$.

(a) Mostre que $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ é independente do caminho.

(b) Calcule $\int_{(1,0)}^{(1,1)} \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Solução: (a) Pelo Teorema anterior a integral curvilínea é independente do caminho se, e somente se, existe uma função diferenciável $f(x, y)$ tal que

$$\nabla f(x, y) = \vec{F}(x, y).$$

isto é,

$$\frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} = (6xy^2 + 2y)\vec{i} + (6x^2y + 2x)\vec{j}$$

ou

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy^2 + 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 6x^2y + 2x$$

integrando (parcialmente) $\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy^2 + 2y$ em relação a x , obtemos

$$f(x, y) = 3x^2y^2 + 2xy + h(y)$$

Diferenciando $f(x, y)$ com respeito a y temos

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 6x^2y + 2x + h'(y) = 6x^2y + 2x$$

Logo,

$$h'(y) = 0$$

o que implica em

$$h(y) = c \quad (c \text{ constante})$$

segue que

$$f(x, y) = 3x^2y^2 + 2xy + c$$

e f é tal que $\nabla f = \vec{F}$. Portanto, $\vec{F}$ é conservativo.

(b) Como qualquer função potencial serve para calcular a integral, aplicamos o Teorema anterior com $f(x, y) = 3x^2y^2 + 2xy$. Assim

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = [f(x, y)]_{(1,0)}^{(1,1)} = [3x^2y^2 + 2xy]_{(1,0)}^{(1,1)} = 5.$$

Se a integral $\int_C M(x,y)dx + N(x,y)dy$ é independente do caminho então existe f tal que

$$M = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad N = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Logo, $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$. (Se M, N tem derivadas parciais primeiras contínuas)

A recíproca desse resultado é falsa, a menos que imponhamos restrições ao domínio D de $\vec{F}(x,y)$. Se D é uma região simplesmente conexa, no sentido que toda curva fechada simples C em D inclui somente pontos de D , então $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ implica em $\int_C M(x,y)dx + N(x,y)dy$ é independente do caminho.

Teorema: Se $M(x,y)$ e $N(x,y)$ tem derivadas parciais primeiras contínuas numa região simplesmente conexa D , então a integral curvilínea

$$\int_C M(x,y)dx + N(x,y)dy \text{ é independente do caminho em } D \text{ se, e somente se,}$$
$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Exemplo: Mostre que $\int_C (e^{3y} - y^2 \sin x)dx + (3xe^{3y} + 2y \cos x)dy$ é independente do caminho numa região simplesmente conexa.

Sol.: $M(x,y) = e^{3y} - y^2 \sin x$, $N(x,y) = 3xe^{3y} + 2y \cos x$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3e^{3y} - 2y \sin x, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 3e^{3y} - 2y \sin x \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

e a integral independe do caminho.

Observação: Se $\vec{F}$ é um campo de forças conservativo em duas dimensões então o trabalho realizado por $\vec{F}$ ao longo de qualquer caminho C de $A(x_1, y_1)$ a $B(x_2, y_2)$ é igual à diferença de potenciais entre A e B . Pois

$$W = \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1).$$

Se a integral independe do caminho e se tomarmos C curva fechada e $A=B$ então a diferença de potencial é zero, e assim $W=0$. Reciprocamente se $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$, para toda curva fechada C simples, então a integral é independente do caminho e o campo é conservativo.

Exemplo: Seja $\vec{F}(x,y,z) = (y + e^{x+z})\vec{i} + x\vec{j} + e^{x+z}\vec{k}$. Mostre que $\vec{F}$ é conservativo. Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ onde C é a curva que liga os pontos $A(1,0,0)$ a $B(1,1,1)$.

Solução: De fato, a função potencial de $\vec{F}$ é

$$f(x,y,z) = xy + e^{x+z}$$

Logo, $\vec{F}$ é conservativo $\Rightarrow \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ independe do caminho, logo,

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = [f(x,y,z)]_A^B = [xy + e^{x+z}]_{(1,0,0)}^{(1,1,1)} = 1 + e^2 - e.$$

Note que $\vec{F}(x,y,z) = (y \cos(xy) + zy)\vec{i} + (x \cos(xy) + zx)\vec{j} + xy\vec{k}$ é um campo conservativo num domínio simplesmente conexo, pois $\vec{F} = M\vec{i} + N\vec{j} + P\vec{k}$ e

$$M_y = \cos(xy) - xy \sin(xy) + z = N_x$$

$$M_z = y = P_x$$

$$N_z = x = P_y$$

a função potencial de $\vec{F}$ é $f(x,y,z) = \sin(xy) + xyz$. Então

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = [\sin(xy) + xyz]_{(1,0,1)}^{(\frac{1}{2}, \pi, 1)} = (\sin \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \sin 0 + 0) = 1 + \frac{\pi}{2}$$

Se C é a curva que liga os pontos $A(1,0,1)$ a $B(\frac{1}{2}, \pi, 1)$.

No caso, de um campo $\vec{F} = M\vec{i} + N\vec{j} + P\vec{k}$ se $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ independe do caminho $\Rightarrow \exists f$ tal que $\nabla f = \vec{F}$ e assim

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = P$$

Desse modo,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \quad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

se M, N e P forem de classe C^1 .

Teorema: $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C M dx + N dy + P dz$ é independente do caminho num

região simplesmente conexa, se, e só se, $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

Definição: Seja $\vec{F}(x,y,z)$ um campo vetorial de forças conservativo com função potencial f . A energia potencial $p(x,y,z)$ é $p(x,y,z) = -f(x,y,z)$.

Como a energia potencial é o negativo do potencial até

$$\vec{F} = -\nabla p$$

Logo,
$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = [-p(x, y, z)]_A^B = p(A) - p(B).$$

Se uma partícula tem massa m e velocidade v , então sua energia cinética é $\frac{1}{2}mv^2$.

Lei de conservação de energia: Se uma partícula move-se de um ponto para outro num campo vetorial de forças conservativas, então a soma das energias cinética e potencial permanece constante, isto é, a energia total não varia.

Exemplo: considere o campo de forças

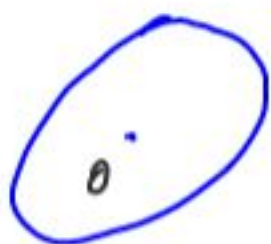
$$\vec{F} = -\frac{y}{x^2+y^2} \vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2} \vec{j}$$

Note que se $M(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$, $N(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ então

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

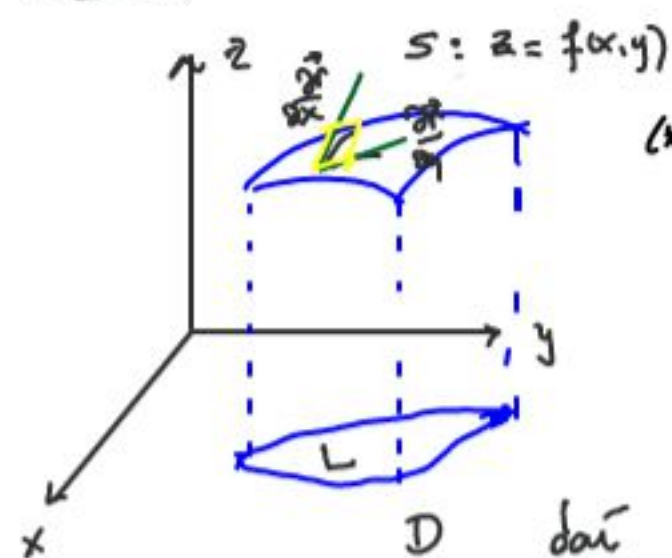
Mas se considerarmos uma região que contenha a origem então

$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \neq 0$ para toda curva C fechada simples que envolva a origem. Logo, a integral depende do caminho C , portanto, o campo $\vec{F}$ não é conservativo. Mas, $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$, para toda curva C que não envolva a origem, logo, $\vec{F}$ é conservativo, nesse caso.



INTEGRAIS DE SUPERFÍCIES

Seja S uma superfície parametrizada por $z = f(x, y)$, com $(x, y) \in D$
 $D \subseteq \mathbb{R}^2$.



A área de superfície é dada por

$$A(S) = \iint_S ds = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy.$$

Isto segue de

$$\vec{r}(x, y) = x \vec{i} + y \vec{j} + f(x, y) \vec{k}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial x} \vec{k}, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{k}$$

O vetor normal é

$$\vec{n} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = -\frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \vec{k}$$

A área de um paralelogramo determinado por

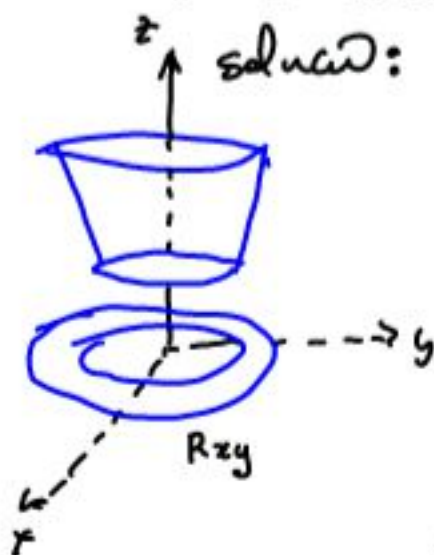
$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} dx, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} dy$$

é

$$A = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} dx \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} dy \right\| = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \right\| dx dy = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy$$

daí se conclui (*).

Exemplo: Calcule $\iint_S ds$ onde S é a porção do cone $z^2 = x^2 + y^2$ compreendida entre $z=1$ e $z=4$.



Solução:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} = g(x, y) \text{ daí } g_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad g_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Assim

$$\iint_S ds = \iint_{R_{xy}} \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} dx dy = \sqrt{2} \iint_{R_{xy}} dx dy$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_1^4 r dr d\theta = \sqrt{2} \left[\frac{r^2}{2} \right]_1^4 \cdot 2\pi = \sqrt{2} \cdot 2\pi \left[8 - \frac{1}{2} \right] = 15\sqrt{2}\pi.$$

Integral de Superfície

A integral de superfície de uma função $g(x, y, z)$ é dada por:

$$\iint_S g(x, y, z) ds = \iint_D g(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy.$$

Exemplo 2: Calcular $\iint_S x^2 z ds$ onde S é a parte do cone $z^2 = x^2 + y^2$ compreendida entre $z=1$ e $z=4$.

sol.: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Assim

$$\begin{aligned} \iint_S x^2 z ds &= \iint_{R_{xy}} x^2 \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} dx dy = \sqrt{2} \iint_{R_{xy}} x^2 \sqrt{x^2 + y^2} dx dy \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_1^4 (r^2 \cos^2 \theta) r^2 dr d\theta = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \left[\frac{r^5}{5} \right]_1^4 d\theta = \frac{1023\sqrt{2}}{5} \int_0^{2\pi} \frac{(1 + \cos 2\theta)}{2} d\theta \\ &= \frac{1023\sqrt{2}}{5} \pi. \end{aligned}$$

A integral seguinte

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \iint_D \vec{F} \cdot \vec{n} \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy$$

é a integral do fluxo de um fluido que atravessa S .



$$dV = \vec{F} \cdot \vec{n} ds \text{ onde } h = \vec{F} \cdot \vec{n}$$

$$V = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds \text{ (quantidade de fluido que atravessa S)}$$

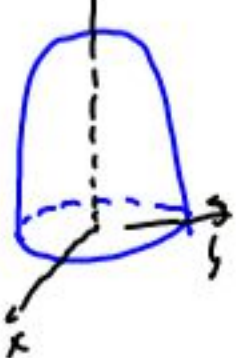
Exemplo 3: Seja S a parte do gráfico de $z = 9 - x^2 - y^2$ em $z \geq 0$. Se $\vec{F} = 3x\vec{i} + 3y\vec{j} + z\vec{k}$ ache o fluxo de $\vec{F}$ através de S .

solução: $S: g(x, y, z) = z - (9 - x^2 - y^2) = z - 9 + x^2 + y^2 = 0$

$$\vec{n} = \frac{\nabla g}{\|\nabla g\|} = \frac{2x\vec{i} + 2y\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}} \quad ds = \frac{\sqrt{g_x^2 + g_y^2 + g_z^2} dA}{|g_z|} = \frac{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dA}{1}$$

Assim

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \iint_R \frac{6x^2 + 6y^2 + z}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}} ds = \iint_R \frac{6x^2 + 6y^2 + 9 - x^2 - y^2}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}} dA$$



cont.

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \iint_R (5x^2 + 5y^2 + 9) dA = \int_0^{2\pi} \int_0^3 (5r^2 + 9) r dr d\theta = \frac{567}{2} \pi.$$

Revisão

Curvas

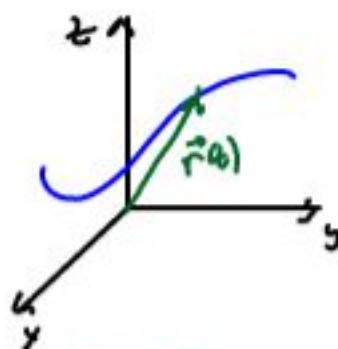
$$C: x = f(t), y = g(t), z = h(t), a \leq t \leq b$$

ou

$$C: \vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}, a \leq t \leq b$$

Exemplo: Helice circular

$$C: x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt, 0 \leq t \leq 2\pi$$



Campo vetorial

$$\vec{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \mapsto \vec{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\vec{i} + N(x, y, z)\vec{j} + P(x, y, z)\vec{k}$$

Exemplo: Campo quadrado inverso

$$\vec{F}(x, y, z) = \frac{c}{\|\vec{r}\|^2} \vec{r} = \frac{c}{\|\vec{r}\|^3} \vec{r} = \frac{c}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$$

Campo conservativo são campos tais que $\exists$ funo potencial para ele.

$\vec{F}$ é conservativa se $\exists f$ tal que $\nabla f = \vec{F}$.

Integrais curvilíneas

Se C é dado por $x = \alpha(t)$, $y = \beta(t)$, $z = \gamma(t)$, $a \leq t \leq b$ e $f(x, y, z)$ é contínua numa região D contendo C então

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)) \sqrt{\alpha'(t)^2 + \beta'(t)^2 + \gamma'(t)^2} dt$$

$$\int_C f(x, y, z) dx = \int_a^b f(\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)) \alpha'(t) dt$$

$\vdots$

Exemplo: Calcule $\int_C x^2 y ds$ onde $C: x = \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq \pi/2$.

$$\text{solu}^\circ: \int_C x^2 y ds = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t (\sin t) \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \sin t dt = \frac{1}{3}$$

Se $\vec{F} = M\vec{i} + N\vec{j} + P\vec{k}$ então

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C M dx + N dy + P dz$$

Se C é parametrizada por

$$x = f(t), y = g(t), z = h(t), a \leq t \leq b$$

então

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C Mdz + Ndy + Pdx = \int_a^b M(f(t), g(t), h(t)) f'(t) dt + \int_a^b N(f(t), g(t), h(t)) g'(t) dt + \int_a^b P(f(t), g(t), h(t)) h'(t) dt.$$

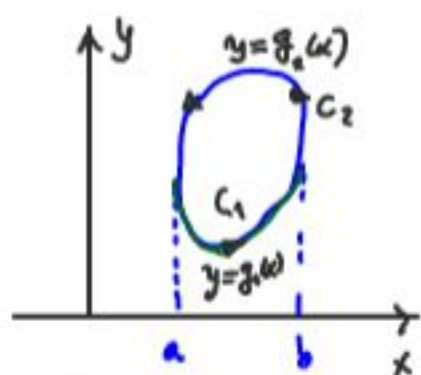
TEOREMA DE GREEN

Teorema (Green) Seja γ uma curva simples, fechada e parcialmente regular, que delimita uma região D do plano xy . Se $L(x,y)$ e $M(x,y)$ são funções de classe C^1 , na região $D \cup \partial D$ então

$$\oint_{\gamma} Ldx + Mdy = \iint_D \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} \right) dx dy.$$

onde $\gamma = \partial D$ é orientada positivamente (anti-horário).

Prova: Suponha que D é uma região do tipo R_x :



$$\oint_{\gamma} Ldx + Mdy = \int_{C_1} Ldx + Mdy + \int_{C_2} Ldx + Mdy$$

Vamos mostrar

$$\oint_{\gamma} Ldx = - \iint_D \frac{\partial L}{\partial y} dx dy$$

De fato,

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} Ldx &= \int_{C_1} Ldx + \int_{C_2} Ldx = \int_a^b L(x, g_1(x)) dx + \int_b^a L(x, g_2(x)) dx \\ &= \int_a^b [L(x, g_1(x)) - L(x, g_2(x))] dx \end{aligned}$$

Agora analisemos a integral dupla

$$\begin{aligned}
 - \iint_D \frac{\partial L}{\partial y} dx dy &= - \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial L}{\partial y}(x, y) dy dx = - \int_a^b [L(x, y)]_{g_1(x)}^{g_2(x)} dx \\
 &= - \int_a^b [L(x, g_2(x)) - L(x, g_1(x))] dx = \int_a^b [L(x, g_1(x)) - L(x, g_2(x))] dx
 \end{aligned}$$

De maneira análoga, supondo D uma região do tipo R_y , provamos que

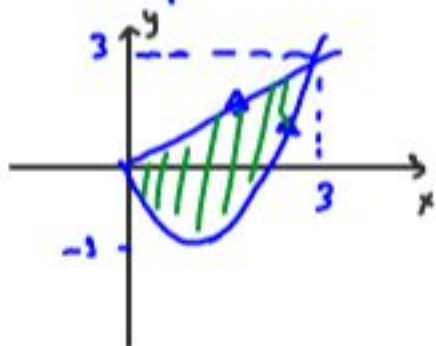
$$\oint_{\gamma} M dy = \iint_D \frac{\partial M}{\partial x} dx dy.$$

Exemplo: Com o auxílio do Teorema de Green, calcule a integral de linha

$$\oint_{\partial D} 3xy dx + 2x^2 dy$$

onde D é a região delimitada pela reta $y=x$ e a parábola $y=x^2-2x$.

Solução: A região D é do tipo R_x e é dada pela figura abaixo:



$$D = \{ (x, y) : 0 \leq x \leq 3, x^2 - 2x \leq y \leq x \}.$$

Logo,

$$\oint_{\partial D} 3xy dx + 2x^2 dy = \iint_D x dx dy = \int_0^3 \int_{x^2-2x}^x x dy dx$$

$$= \int_0^3 x [x - x^2 + 2x] dx = \int_0^3 (3x^2 - x^3) dx = \left[x^3 - \frac{x^4}{4} \right]_0^3 = 3^3 - \frac{3^4}{4} = 3^3 \left[1 - \frac{3}{4} \right] = \frac{27}{4}.$$

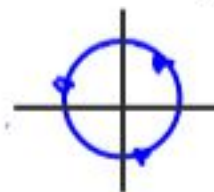
Exemplo 2: Calcule $\oint_{\gamma} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}$ onde γ é a circunferência $x^2 + y^2 = \varepsilon^2$.

Solução: Usando a parametrização:

$$\gamma: x = \varepsilon \cos \theta, y = \varepsilon \sin \theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

temos:

$$\oint_{\gamma} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{[-\varepsilon \sin \theta (-\varepsilon \sin \theta) + \varepsilon \cos \theta (\varepsilon \cos \theta)]}{\varepsilon^2} d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi.$$



Note que: $M_y = N_x$. Logo, não podemos usar o Teorema de Green na

circunferência envolve a região.



$$\int_{\gamma_1} N dx + M dy = - \int_{\gamma_2} N dx + M dy$$

Logo,

$$\int_{\partial D} M dx + N dy = \int_{\gamma} M dx + N dy + \int_{\gamma_0} M dx + N dy$$

Assim

$$\oint_{\gamma} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} = - \int_{\gamma_0} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} = 2\pi$$

No caso em que a região D tem múltiplos buracos, temos que o Teorema de Green γ fica dada por:



Teo. Green:

$$\oint_{\gamma} M dx + N dy + \sum_{i=1}^n \oint_{\gamma_i} M dx + N dy = \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA$$

Aplicações do Teorema de Green

$$\oint_{\gamma} x dy = \iint_D dA = A(D)$$

ou

$$-\oint_{\gamma} y dx = \iint_D dA = A(D)$$

ou ainda

$$A(D) = \frac{1}{2} \oint_{\gamma} x dy - y dx$$

Exercício: Use o teorema de Green para achar a área da região elíptica, $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$.

Sol.: $A = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a \cos t)(b \cos t) dt - (b \sin t)(-a \sin t) dt = \pi ab$.

Note que se $\vec{F}(x,y) = M(x,y)\vec{i} + N(x,y)\vec{j}$ então podemos representar $\vec{F}$ por:

$$\vec{F}(x,y) = M(x,y)\vec{i} + N(x,y)\vec{j} + 0\vec{k}$$

O rotacional de $\vec{F}$ é

$$\text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & 0 \end{vmatrix} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\vec{k}$$

seja s o parâmetro comprimento de arco para C , e consideremos o vetor tangente unitário

$$\vec{T} = \frac{dx}{ds}\vec{i} + \frac{dy}{ds}\vec{j} + \frac{dz}{ds}\vec{k}$$

Desse modo,

$$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds = \iint_R (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{k} dA. \quad (\text{Forma vetorial do Teorema de Green})$$

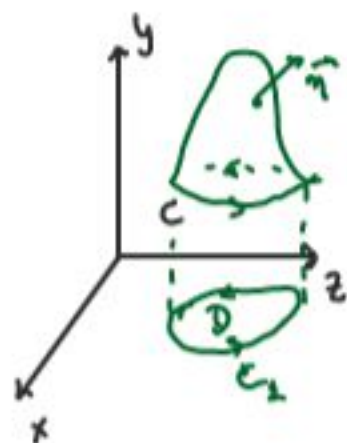
Dado, $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$

o vetor $\vec{\eta} = dy\vec{i} - dx\vec{j}$ é tal que $\vec{\eta} \perp d\vec{r}$, ou, $\vec{\eta} \cdot d\vec{r} = 0$, temos que

$$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{\eta} ds = \oint_C Ndx + Mdy = \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) dA = \iint_R \text{div } \vec{F} dA.$$

Teorema de Stokes

O teorema de Stokes relaciona uma integral de superfície sobre uma superfície S com uma integral de linha ao redor da curva fronteira de S (curva no espaço). A figura abaixo mostra uma superfície orientada com seu vetor normal $\vec{n}$. A orientação de S induz a orientação positiva da curva fronteira C mostrada na figura. Isto significa que se você andar na direção positiva ao redor da curva C com a cabeça na direção do sentido de $\vec{n}$, então a superfície estará sempre à sua esquerda.



Teorema de Stokes: Seja S uma superfície orientada, suave por partes, cuja fronteira é formada por uma curva simples C , fechada, suave por partes, com orientação positiva. Seja F um campo vetorial cujos componentes têm derivadas parciais contínuas na região aberta de $\mathbb{R}^3$ que contém S . Então

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds.$$

Notemos que $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{F} \cdot \vec{T} \, ds$.

O teorema de Stokes nos diz que a integral de linha ao redor da curva fronteira de S da componente tangencial de $\vec{F}$ é igual à integral de superfície da componente normal do rotacional de $\vec{F}$. Como $C = \partial S$ poderíamos ter escrito

$$\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds = \int_{\partial S} \vec{F} \cdot \vec{T} \, ds.$$

Lembremos também que $\int_C \vec{F} \cdot \vec{T} \, ds$ é a circulação de $\vec{F}$ ao longo do bordo C de S , no sentido C positivo.

Prova do Teorema de Stokes: Admitamos que a equação de S seja $z = g(x, y)$ $(x, y) \in D$, com $g \in C^2$, e que D seja uma região plana simples cuja fronteira C_1 corresponde a C . Se a orientação de S é a positiva, então a orientação positiva de C corresponde à orientação positiva de C_1 . Podemos escrever $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, com $P, Q, R \in C^1$.

Como S é um gráfico de uma função, podemos aplicar a fórmula de integral de superfície dada abaixo:

$$\vec{n} = (-g_x \vec{i} - g_y \vec{j} + \vec{k}) / \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2} = \frac{-z_x \vec{i} - z_y \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}$$

$$ds = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} \, dA$$

Logo

$$\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds = \iint_D \left[- \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) z_x - \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) z_y + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right] dA \quad (*)$$

onde as derivadas parciais de P, Q e R são calculadas em $(x, y, g(x, y))$. Se

$$C_1: x = x(t), \quad y = y(t), \quad a \leq t \leq b$$

é a representação paramétrica de C_1 , então a representação paramétrica de C é

$$C: x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = g(x(t), y(t)), \quad a \leq t \leq b$$

Isto nos permite, com a ajuda da regra da cadeia, calcular a integral de linha como segue:

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_a^b \left(P \frac{dx}{dt} + Q \frac{dy}{dt} + R \frac{dz}{dt} \right) dt \\ &= \int_a^b \left[P \frac{dx}{dt} + Q \frac{dy}{dt} + R \left(\frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right) \right] dt \\ &= \int_a^b \left[\left(P + R \frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{dx}{dt} + \left(Q + R \frac{\partial z}{\partial y} \right) \frac{dy}{dt} \right] dt \\ &= \int_a^b \left(P + R \frac{\partial z}{\partial x} \right) dx + \left(Q + R \frac{\partial z}{\partial y} \right) dy \\ \text{Teo. Green} \quad \left\{ \begin{array}{l} \rightarrow \\ \downarrow \end{array} \right. &= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(Q + R \frac{\partial z}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(P + R \frac{\partial z}{\partial x} \right) \right] dA \end{aligned}$$

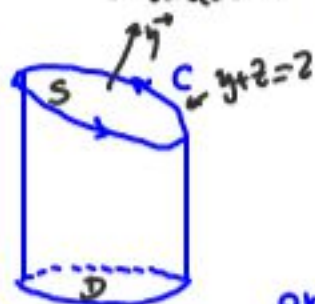
Usando novamente a regra da cadeia, e lembrando que P, Q e R são funções de x, y e z , que z é função de x e y , temos

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot \vec{T} \, ds &= \iint_D \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + R \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} + R \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \right) \right] dA \end{aligned}$$

Quatro dos termos da integral se cancelam, e os seis restantes podem ser arrumados para se obter o lado direito de (*). Portanto,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds.$$

Exemplo 1: Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$ onde $F(x, y, z) = -y^2 \vec{i} + x \vec{j} + z^2 \vec{k}$ e C é a curva da interseção do plano $y+z=2$ com o cilindro $x^2+y^2=1$. (Oriente C positivamente.)



Solução: A curva C é uma elipse. Vamos usar o Teorema de Stokes

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & x & z^2 \end{vmatrix} = (1+2y) \vec{k}$$

orientando S para cima, então a orientação induzida em C será positiva. A projeção D de S sobre o plano xy é o disco $x^2+y^2 \leq 1$, e assim, temos

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds = \iint_D (1+2y) \, dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1+2r \sin \theta) r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} + \frac{2r^3}{3} \sin \theta \right]_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \sin \theta \right) d\theta = \frac{1}{2} (2\pi) = \pi. \end{aligned}$$

Exemplo 2: Use o Teorema de Stokes para calcular $\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds$ onde $\vec{F}(x, y, z) = yz \vec{i} + xz \vec{j} + xy \vec{k}$. S é a parte da esfera $x^2+y^2+z^2=4$ que está dentro do cilindro $x^2+y^2=1$ e acima do plano xy .



Solução: Para achar a curva fronteira C resolvemos as equações $x^2+y^2+z^2=4$ e $x^2+y^2=1$, daí, $z^2=3$, e assim $z=\sqrt{3}$. Então C é a circunferência dada pelas equações $x^2+y^2=1$, $z=\sqrt{3}$. A equação vetorial de C é

$$r(t) = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j} + \sqrt{3} \vec{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$r'(t) = -\sin t \vec{i} + \cos t \vec{j}$$

$$\vec{F}(r(t)) = \sqrt{3} \sin t \vec{i} + \sqrt{3} \cos t \vec{j} + \cos t \sin t \vec{k}$$

Pelo Teorema de Stokes:

$$\begin{aligned} \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds &= \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(r(t)) \cdot r'(t) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} -\sqrt{3} \cos t \sin t + \sqrt{3} \sin t \cos t \, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{3} \cdot 0 \, dt = 0 \end{aligned}$$

Teorema:

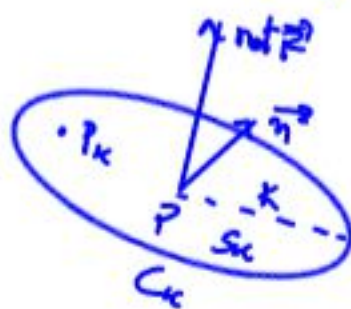
Se $\vec{F}(x,y,z)$ tem derivadas parciais contínuas em toda uma região simplesmente conexa D , então $\text{rot } \vec{F} = 0$ em D se e somente se $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ para toda curva fechada simples C em D .

Demonstração: Se $\text{rot } \vec{F} = 0$ então pelo Teorema de Stokes

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds = 0$$

Reciprocamente, suponha $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ para toda curva fechada simples C . Se em algum ponto P , $\text{rot } \vec{F} \neq 0$, então por continuidade existe um região de D contendo P tal que $\text{rot } \vec{F} \neq 0$ nessa região.

Se nessa região, escolhermos um disco circular do tipo seguinte
 com a orientação a $\text{rot } \vec{F}$ então



$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds \geq 0$$

o que é uma contradição. Consequentemente, $\text{rot } \vec{F} = 0$
 em toda região D .

Se $\vec{F}$ é contínua numa região conveniente, então a condição

$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$, $\forall$ curva fechada simples é equivalente à independência do caminho.

Teorema: Se $\vec{F}$ ter derivadas parciais primeiras contínuas em todo um região simplesmente conexa D então as condições seguintes são equivalentes:

- (i) $\vec{F}$ é conservativa, isto é, existe f tal que $df = \vec{F}$.
- (ii) $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ é independente do caminho em D .
- (iii) $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$, $\forall$ curva fechada simples C em D .
- (iv) $\vec{F}$ é irrotacional, isto é, $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$.

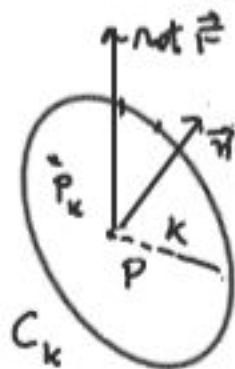
Exemplo: Prove que se $\vec{F}(x, y, z) = (3x^2 + y^2)\vec{i} + 2xy\vec{j} - 3z^2\vec{k}$, então $\vec{F}$ é conservativo.

Solução: A função $\vec{F}$ tem derivadas parciais primeiras contínuas para todo (x, y, z) . Como

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x^2 + y^2 & 2xy & -3z^2 \end{vmatrix} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} = \vec{0}$$

então $\vec{F}$ é conservativo.

Usando o Teorema de Stokes podemos obter uma interpretação física para $\text{rot } \vec{F}$. Se P é um ponto arbitrário, seja S_k um disco circular de raio k e centro em P e denotemos por C_k a fronteira de S_k . Aplicando o Teorema de Stokes e um teorema do valor médio para integrais duplas, somos conduzidos a



$$\oint_{C_k} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{S_k} \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds = [\text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n}]_{P_k} (\pi k^2)$$

onde P_k é um ponto interno de S_k e πk^2 é a área de S_k . Assim

$$[\text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n}]_{P_k} = \frac{1}{\pi k^2} \oint_{C_k} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Fazendo $k \rightarrow 0$, então $P_k \rightarrow P$, assim obtemos

$$(*) \quad [\text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n}]_P = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{\pi k^2} \oint_{C_k} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

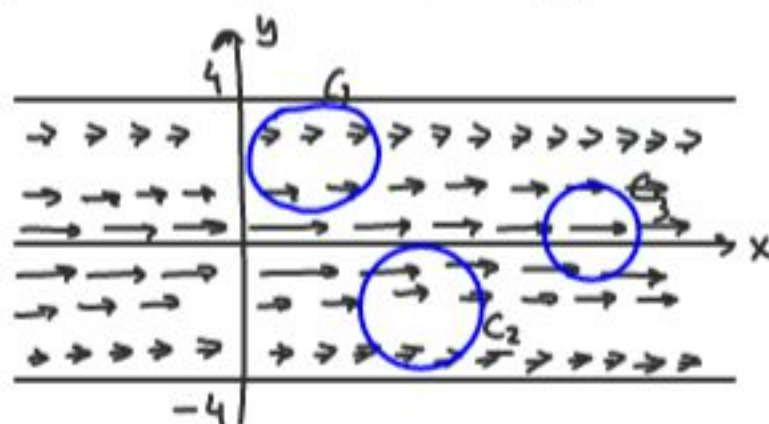
Se $\vec{F}$ é um campo de velocidade de um fluido, a integral análoga $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$ é a circulação em torno de C . Mede a tendência média do fluido de se mover, ou circular, ao longo de C . Assim (*) nos dá a informação sobre o movimento do fluido ao longo da circunferência de um disco circular que é perpendicular a $\vec{\eta}$, pelo o disco tende a reduzir-se a um ponto. Como $[\text{rot } \vec{F} \cdot \vec{\eta}]_P$ toma seu valor máximo quando $\vec{\eta}$ é paralelo a $\text{rot } \vec{F}$, a direção de $\text{rot } \vec{F}$ em P é a direção para a qual a circulação ao longo da fronteira de um disco perpendicular a $\text{rot } \vec{F}$ toma seu valor máximo, pelo o disco tende a reduzir-se a um ponto.

Exemplo: Seja $\vec{F}(x,y,z) = \frac{3}{y^2+1} \vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$ com $|y| \leq 4$.

(a) Descreva o campo vetorial $\vec{F}$, discuta a circulação de $\vec{F}$ ao longo de vários arcos C_k do plano- xy .

(b) Onde $(\text{rot } \vec{F}) \cdot \vec{\eta}$ toma seu valor máximo?

Solução: (a) Restringendo nossa atenção ao plano- xy , os vetores de $\vec{F}$ formam o padrão da figura a seguir.



Consideremos $\vec{F}$ como um campo de velocidade de um fluido que corre em um canal. Note que a velocidade do fluido é máxima ao longo do eixo do- x e diminui à medida que aproximamos de uma das retas $y = \pm 4$. Considerando

o círculo C_2 , então, evidentemente, $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s} > 0$, pois, pelo C_1 é percorrido na direção positiva, o componente tangencial $\vec{F} \cdot d\vec{s}$ é grande e positivo na metade inferior de C_1 e negativo na metade superior. Introduzindo um medidor rotacional no centro de C_1 , com eixo perpendicular ao plano xy , as pás girariam no sentido anti-horário.

Novamente, considerando valores de $\vec{F} \cdot d\vec{s}$, vemos que $\oint_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$ e $\oint_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} < 0$. Um medidor rotacional para C_2 giraria no sentido horário, e um medidor para C_3 não giraria.

(b) Calculando o $\text{rot } \vec{F}$ temos:

$$\text{rot } \vec{F} = \left(\frac{6y}{(y^2+1)^2} \right) \vec{k}$$

Como o unitário da normal $\vec{n}$ é $\vec{k}$

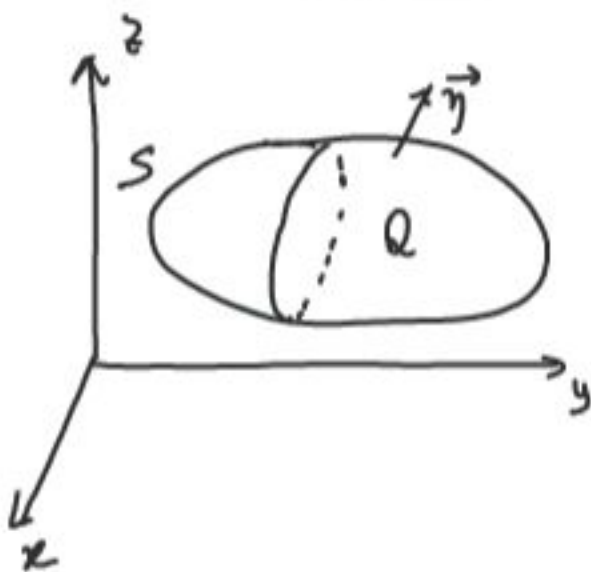
$$\text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} = \frac{6y}{(y^2+1)^2}$$

Sabe-se que $(\text{rot } \vec{F}) \cdot \vec{n}$ é positivo para pontos acima do eixo-x, negativo para pontos abaixo do eixo-x e 0 para pontos do eixo-x. Diferenciando em relação a y, temos

$$D_y [\text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n}] = \frac{6(1-3y^2)}{(y^2+1)^3}$$

e, portanto, os números críticos para $\text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n}$ são $y = \pm 1/\sqrt{3} \approx \pm 0,577$. Pelo Teste da 1ª derivada vemos que esses números conduzem a valores máximos ou mínimos. O máximo ocorre qdo $y = 1/\sqrt{3}$.

TEOREMA DE GAUSS

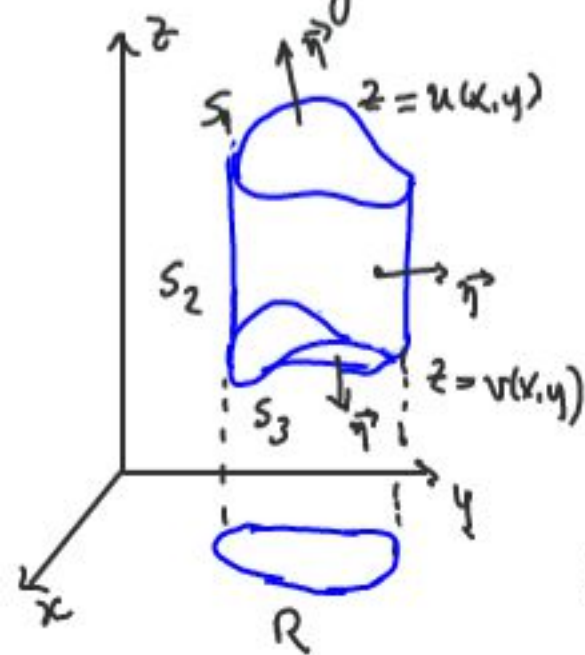


Seja Q uma região em três dimensões delimitada por uma superfície fechada S, e denotemos por $\vec{n}$ o vetor normal unitário externo a S. Se $\vec{F}$ é uma função vetorial dotada de derivadas parciais contínuas em Q, então

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds = \iiint_Q \text{div } \vec{F} \, dv$$

Isto é, o fluxo de $\vec{F}$ sobre S é igual à integral tripla da divergência de $\vec{F}$ sobre Q.

Demonstração: Vamos supor para efeito de demonstração que a região Q seja como a figura abaixo.



Se $\vec{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\vec{i} + N(x, y, z)\vec{j} + P(x, y, z)\vec{k}$ podemos escrever a conclusão do Teorema como

$$\iint_S (M\vec{i} \cdot \vec{n} + N\vec{j} \cdot \vec{n} + P\vec{k} \cdot \vec{n}) \, ds = \iiint_Q \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \right) dv$$

Para provar esta igualdade, basta mostrar que

$$(i) \quad \iint_S M\vec{i} \cdot \vec{n} \, ds = \iiint_Q \frac{\partial M}{\partial x} \, dv$$

$$(ii) \quad \iint_S N \vec{j} \cdot \vec{\eta} \, ds = \iiint_Q \frac{\partial N}{\partial y} \, dV$$

$$(iii) \quad \iint_S P \vec{k} \cdot \vec{\eta} \, ds = \iiint_Q \frac{\partial P}{\partial z} \, dV$$

Vamos provar (iii). Sobre S_2 o componente $\vec{k}$ de $\vec{\eta}$ é 0 a, então, $\vec{k} \cdot \vec{\eta} = 0$, assim a integral do fluxo sobre S_2 é 0, e podemos escrever

$$\iint_S P \vec{k} \cdot \vec{\eta} \, ds = \iint_{S_1} P \vec{k} \cdot \vec{\eta} \, ds + \iint_{S_3} P \vec{k} \cdot \vec{\eta} \, ds$$

Se fazemos em S_1 : $g_1(x, y, z) = z - u(x, y)$ e calculamos

$$\vec{\eta} = \frac{\nabla g_1}{\|\nabla g_1\|} = \frac{-u_x \vec{i} - u_y \vec{j} + 1 \vec{k}}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}}$$

Logo, $\vec{k} \cdot \vec{\eta} = \frac{1}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}}$. Assim

$$\iint_S P \vec{k} \cdot \vec{\eta} \, ds = \iint_R P(x, y, u(x, y)) \, dA$$

Em S_3 , temos $g_2(x, y, z) = z - v(x, y)$
e utilizamos a normal unitária inferior $\vec{\eta}$ dada por

$$\vec{\eta} = -\frac{\nabla g_2}{\|\nabla g_2\|} = \frac{v_x \vec{i} + v_y \vec{j} - 1 \vec{k}}{\sqrt{1 + v_x^2 + v_y^2}}$$

Em S_3 , temos

$$\iint_{S_3} P \vec{k} \cdot \vec{\eta} \, ds = - \iint_R P(x, y, v(x, y)) \, dA$$

Somando as integrais temos

$$\begin{aligned} \iint_S P \vec{k} \cdot \vec{\eta} \, ds &= \iint_R [P(x, y, u(x, y)) - P(x, y, v(x, y))] \, dA \\ &= \iint_R \left[\int_{v(x, y)}^{u(x, y)} \frac{\partial P}{\partial z} \, dz \right] \, dA = \iiint_Q \frac{\partial P}{\partial z} \, dV. \end{aligned}$$

Como queríamos provar. A prova de $\iint_M \vec{a} \cdot \vec{n} \, ds$ e $\iint_N \vec{b} \cdot \vec{n} \, ds$ são análogas, desde que Q e S sejam S convenientemente restritas.

Exemplo 1: Seja Q a região delimitada pelo cilindro circular $x^2 + y^2 = 4$ e pelos planos $z=0$ e $z=3$. Denotemos por S a superfície de Q . Se $F(x, y, z) = x^3 \vec{i} + y^3 \vec{j} + z^3 \vec{k}$, use o Teorema de Gauss para calcular $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds$.

Solução: Temos que

$$\operatorname{div} \vec{F} = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 = 3(x^2 + y^2 + z^2)$$

Pelo Teo. Gauss

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds = 3 \iiint_Q (x^2 + y^2 + z^2) \, dV$$

(Calculando a integral tripla em coordenadas cilíndricas, temos

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds = 3 \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^3 (r^2 + z^2) r \, dz \, dr \, d\theta$$

$$= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left(r^2 z + \frac{1}{3} z^3 \right)_0^3 r \, dr \, d\theta = 3 \int_0^{2\pi} \int_0^2 (3r^2 + 9) r \, dr$$

$$= 3 \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{4} r^4 + \frac{9}{2} r^2 \right) d\theta = 3 \int_0^{2\pi} 30 \, d\theta = 90 [\theta]_0^{2\pi} = 180\pi.$$

