1 Integral de Superficie

1.1 Representação paramétrica de uma superfície

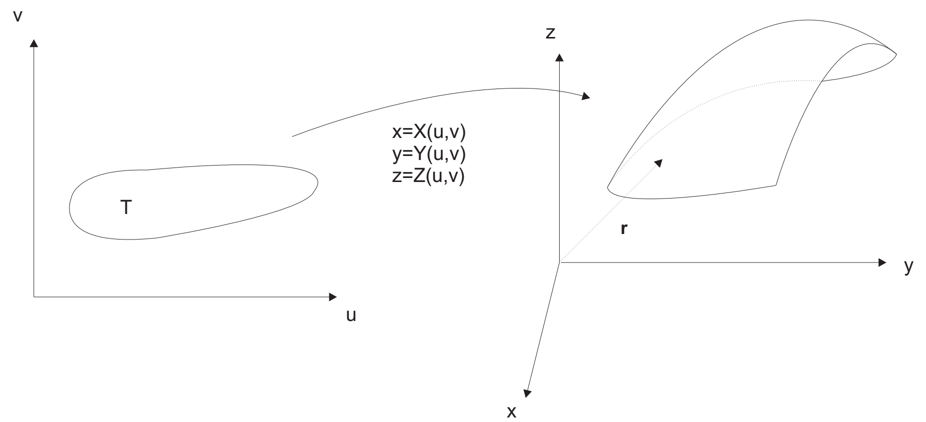
Representação Implícita: $S = \{(x, y, z) : \ F(x, y, z) = 0\}$. Exemplo: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (superfície esférica)

Representação explícita: $z = f(x, y)$. Exemplo: $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ e $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ (neste caso, temos a semi-esfera superior e a inferior, respectivamente.)

Representação Paramétrica: $x = X(u, v), \ y = Y(u, v), \ z = Z(u, v)$. (u, v) varia num conjunto conexo bidimensional T no plano-uv. Os pontos (x, y, z) correspondem a porções de superfície no espaço-xyz.

Representação Paramétrica Vetorial:

$$\mathbf{r}\,(u, v) = X\,(u, v)\,\mathbf{i} + Y\,(u, v)\,\mathbf{j} + Z\,(u, v)\,\mathbf{k}, \ (u, v) \in T$$



Exemplo 1: Representação paramétrica de uma esfera

$$x = a\cos u \cos v, \quad y = a \operatorname{sen} u \cos v, \ z = a \operatorname{sen} v \tag{1}$$

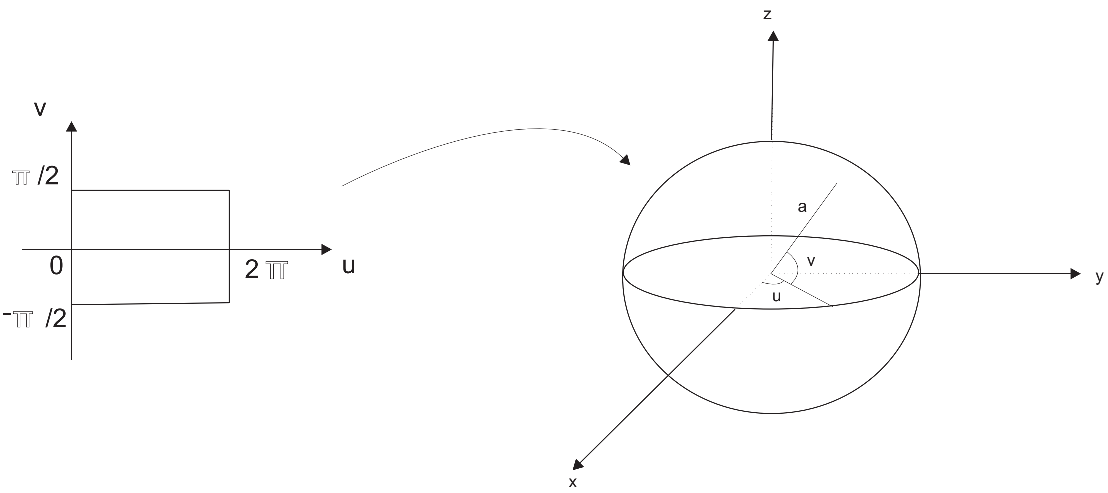
daí obtemos

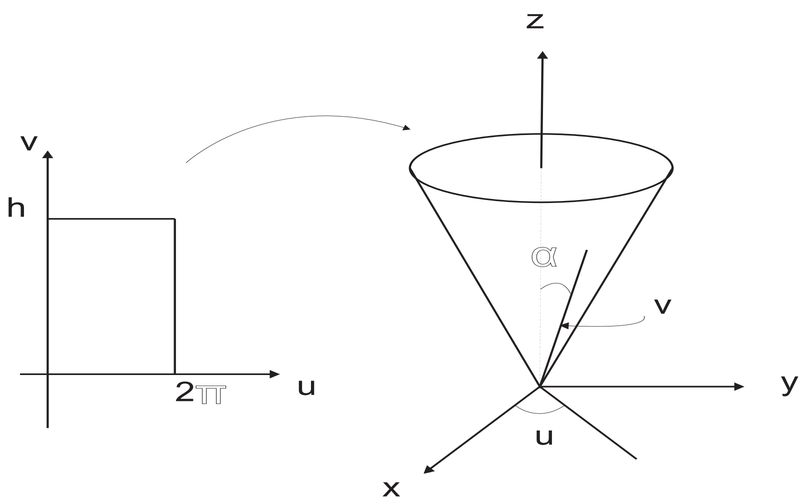
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

se (u, v) varia no retângulo $T = [0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ os pontos determinados (1) descrevem toda a esfera. O hemisfério superior é a imagem de um retângulo $[0, 2\pi] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e o inferior a imagem de $[0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$.

Exemplo 2: Representação vetorial de um cone

$$\mathbf{r}\,(u, v) = v \operatorname{sen}\alpha \cos u\mathbf{i} + v \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen} u\mathbf{j} + v\cos\alpha\mathbf{k}$$





onde v é a distância do vértice ao ponto (x, y, z) no cone, u é o ângulo polar e α é ângulo do vértice.

A imagem de T através de $\mathbf{r}$ é a *superfície paramétrica* e representamos por $\mathbf{r}(T)$. Se a função $\mathbf{r}$ é injetiva em T, a imagem $\mathbf{r}(T)$ se denominará *superfície paramétrica simples.* Em tal caso, pontos distintos de T se aplicam em pontos distintos da superfície. Em particular, toda curva fechada simples em T se aplica numa curva fechada simples situada na superfície.

Uma superfície paramétrica $\mathbf{r}(t)$ pode degenerar-se num ponto ou em uma curva. Por exemplo, $X(u, v) = u + v,\ Y(u, v) = (u + v)^2,\ Z(u, v) = (u + v)^3$, sendo $T = [0, 1] \times [0, 1]$. Escrevendo $t = u+v$, obtemos a curva parametrizada por $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, $0 \leq t \leq 2$.

1.2 Produto Vetorial fundamental

Considere uma superfície representada por

$$S: \ \mathbf{r}(u,v) = X\,(u,v)\,\mathbf{i} + Y\,(u,v)\,\mathbf{j} + Z\,(u,v)\,\mathbf{k}, \ \ (u,v) \in T$$

Se X, Y e Z são deriváveis em T podemos considerar os dois vetores

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \frac{\partial X}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial Y}{\partial u}\mathbf{j} + \frac{\partial Z}{\partial u}\mathbf{k}$$

e

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \frac{\partial X}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial Y}{\partial v}\mathbf{j} + \frac{\partial Z}{\partial v}\mathbf{k}$$

O produto vetorial $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ se denominará *produto vetorial fundamental* de $\mathbf{r}$.

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial u} \\ \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial v} & \frac{\partial Z}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial u} \\ \frac{\partial Y}{\partial v} & \frac{\partial Z}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} \frac{\partial Z}{\partial u} & \frac{\partial X}{\partial u} \\ \frac{\partial Z}{\partial v} & \frac{\partial X}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial u} \\ \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{k}$$
$$= \frac{\partial(Y,Z)}{\partial(u,v)}\mathbf{i} + \frac{\partial(Z,X)}{\partial(u,v)}\mathbf{j} + \frac{\partial(X,Y)}{\partial(u,v)}\mathbf{k}.$$

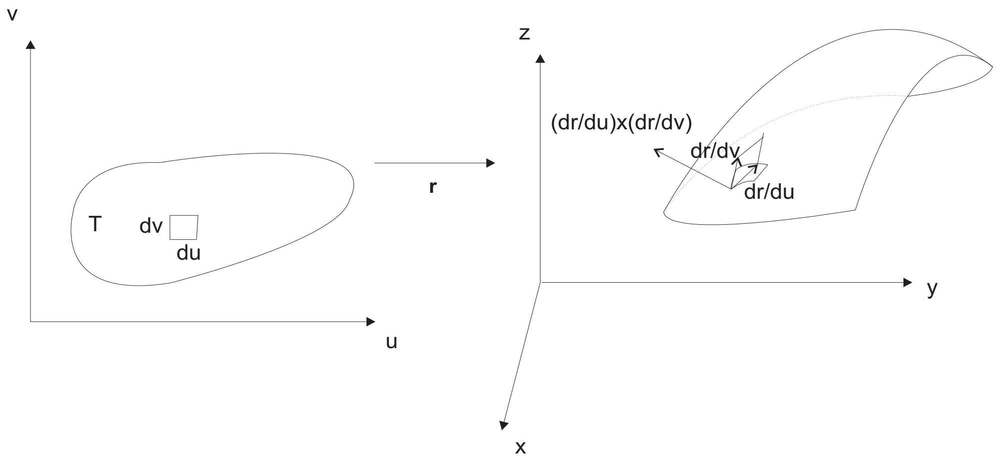
Se (u,v) é um ponto em T no qual $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ são contínuas e o produto vetorial fundamental não é nulo, então o ponto imagem $\mathbf{r}\,(u,v)$ se chama *ponto regular* de $\mathbf{r}$, caso contrário, o ponto é dito *ponto singular*. Uma superfície $\mathbf{r}\,(T)$ se chama *regular* se todos os seus pontos são regulares.

Um retângulo em T que tenha uma área $\Delta u \Delta v$ se converte numa porção em $\mathbf{r}(T)$ que aproximamos por um paralelogramo determinado pelos vetores $\left(\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right)\Delta u$ e $\left(\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)\Delta v$. A área desse paralelogramo é o módulo do produto vetorial

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\Delta u \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\Delta v \right\| = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| \Delta u \Delta v.$$

Em cada ponto regular os vetores $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ determinam um plano que tem o vetor $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ como *normal*. Por esta razão o plano determinado por $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ se chama *plano tangente* à superfície. A continuidade de $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$

implica na continuidade de $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$; isto significa que o plano tangente se move continuamente numa superfície regular. Assim, a continuidade de $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ e $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ evita a presença de bicos ou arestas nas superfícies, o fato de $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \neq 0$ evita os casos degenerados.



Exemplo 3: Superfícies com representação explícita, $z = f(x, y)$. Neste caso,

$$\mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(x, y)\mathbf{k},\ (x, y) \in R$$

A região R denomina-se a projeção da superfície sobre o plano$-xy$.

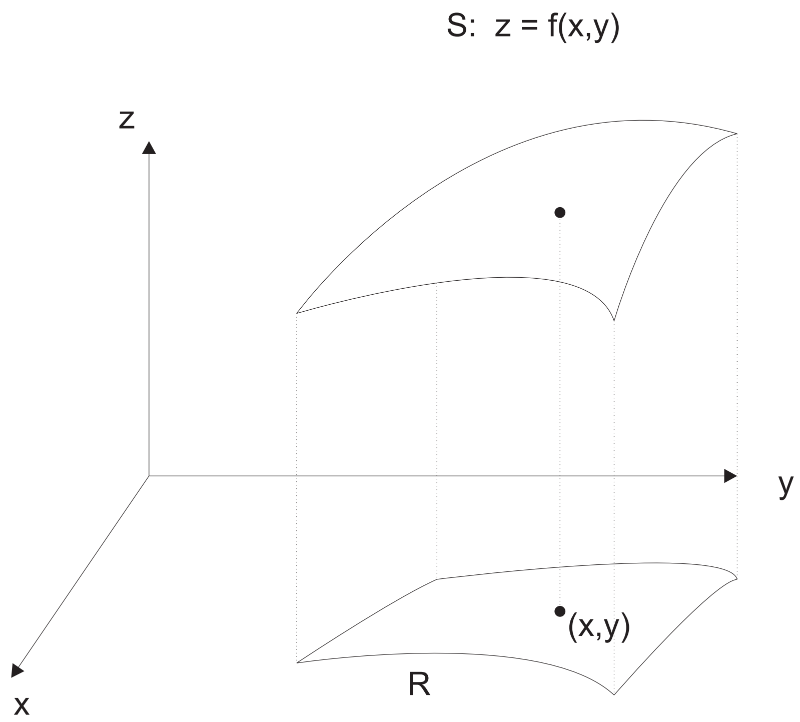
Temos que

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} = \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{k}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{k}, \text{ supondo } f \text{ diferenciável}$$

o que nos dá

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = -\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Posto que a componente z de $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}$ é 1, o produto vetorial fundamental nunca é zero. Logo os únicos pontos singulares desta representação são os pontos onde $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ não são contínuas.



Um caso típico é a equação $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$, que representa um hemisfério de raio 1 e centro na origem, se $x^2+y^2 \leq 1$. A equação vetorial é

$$\mathbf{r}(x,y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + \sqrt{1-x^2-y^2}\mathbf{k}$$

ela aplica o disco unitário $T = \{(x,y) : \; x^2+y^2 \leq 1\}$ sobre o hemisfério e tal aplicação é injetora. As derivadas parciais $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}$ existem e são contínuas em todo o interior do disco, mas não existem na fronteira do disco. Logo, todo ponto da fronteira é um ponto singular desta representação.

Exemplo 4: Consideremos o mesmo hemisfério do exemplo anterior, mas desta vez como imagem do retângulo $T = [0, 2\pi] \times \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ através da aplicação

$$\mathbf{r}(u,v) = a\cos u \cos v\mathbf{i} + a \operatorname{sen} u \cos v\mathbf{j} + a \operatorname{sen} v\mathbf{k}$$

os vetores $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ vem dados pelas fórmulas

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = -a \operatorname{sen} v \cos v\mathbf{i} + a\cos u \cos v\mathbf{j}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = -a\cos u \;\; \operatorname{sen} v\mathbf{i} - a \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v\mathbf{j} + a\cos v\mathbf{k}$$

Temos que

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = a \cos v \mathbf{r}(u, v)$$

A imagem de T não é uma superfície paramétrica simples pois esta aplicação não é injetora. Com efeito, todo ponto do segmento retilíneo $v = \frac{\pi}{2}$, $0 \leq u \leq 2\pi$ se aplica no ponto $(0, 0, a)$ (pólo norte). Também pela periodicidade do seno e cosseno, $\mathbf{r}$ toma os mesmos valores nos pontos $(0, v)$ e $(2\pi, v)$ de modo que os lados esquerdo e direito de T se aplicam na mesma curva, que é um arco que o une o pólo norte ao ponto $(a, 0, 0)$. Os vetores $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ e $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ são contínuos em todo T. Como $\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| = a^2 \cos v$, então os únicos pontos singulares desta representação se apresenta quando $\cos v = 0$. Logo o único ponto singular é o pólo norte.

1.3 Área de uma superfície paramétrica

Seja $S = \mathbf{r}(T)$ uma superfície paramétrica representada pela função $\mathbf{r}$ definida numa região T do plano$-uv$. Um retângulo em T de área $\Delta u \Delta v$ é aplicado por $\mathbf{r}$ sobre um paralelogramo curvilíneo em S com área aproximadamente igual a

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| \Delta u \Delta v.$$

Definição: A área de S, que representamos por $a(S)$, se define pela integral dupla

$$a(S) = \iint_T \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| du dv. \tag{2}$$

Ou seja,

$$a(S) = \iint_T \sqrt{\left(\frac{\partial(Y, Z)}{\partial(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(Z, X)}{\partial(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)}\right)^2} du dv \tag{3}$$

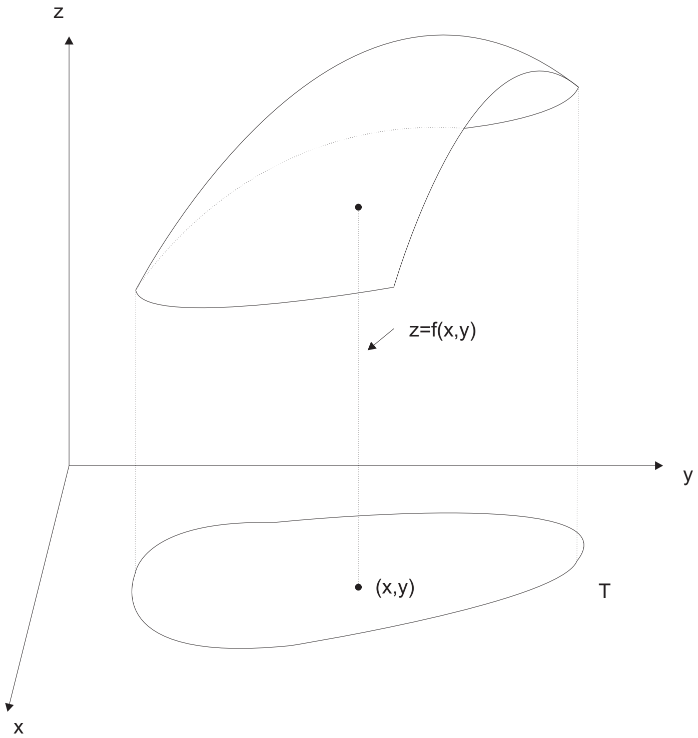
Se S vem dada explicitamente por uma equação da forma $z = f(x, y)$, então

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right\| = \left\| -\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k} \right\| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}.$$

Nesse caso,

$$a(S) = \iint_T \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy,$$

onde T é a projeção de S no plano-xy.



Quando S está num plano paralelo ao plano-xy, a função f é constante e temos $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ daí

$$a(S) = \iint_T dxdy.$$

Em cada ponto de S, seja $\gamma = \hat{a}ngulo(\mathbf{N}, \mathbf{k})$ onde $\mathbf{N} = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}$. Como a componente z de $\mathbf{N}$ é 1, temos

$$\cos\gamma = \frac{\mathbf{N} \cdot \mathbf{k}}{\|\mathbf{N}\| \, \|\mathbf{k}\|} = \frac{1}{\|\mathbf{N}\|} = \frac{1}{\left\| \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right\|}.$$

Portanto, $\left\| \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right\| = \dfrac{1}{\cos\gamma}$. Logo,

$$a(S) = \iint_T \frac{1}{\cos\gamma} dxdy.$$

Se S está num plano não perpendicular ao plano-xy. Neste caso, $\gamma =$constante e temos que $a(S) =$ (área de T) / $\cos\gamma$, ou

$$a(S) = \frac{1}{\cos\gamma}\iint\limits_{T} dxdy.$$

Agora se S vem dada implicitamente por $F(x,y,z) = 0$. Se S pode projetar-se injetivamente sobre o plano-xy a equação $F(x,y,z) = 0$ define z como função de x e y, seja $z = f(x,y)$, assim

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial x}\Big/\frac{\partial F}{\partial z} \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial F}{\partial y}\Big/\frac{\partial F}{\partial z}$$

nos pontos onde $\dfrac{\partial F}{\partial z} \neq 0$. Desse modo

$$a(S) = \iint\limits_{T} \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}{\left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|} dxdy. \tag{4}$$

Exemplo 1: Área de um hemisfério. Consideremos um hemisfério S de raio a e centro na origem. Temos a representação implícita $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad z \geq 0$; a explícita $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$; e a paramétrica

$$\mathbf{r}(u,v) = a\cos u \ \cos v\mathbf{i} + a \operatorname{sen} u \ \cos v\mathbf{j} + a \operatorname{sen} v\mathbf{k}.$$

Para calcular a área de S a partir da representação implícita utilizamos a fórmula (4) tomando

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2.$$

Temos que $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y$, $\frac{\partial F}{\partial z} = 2z$. O hemisfério se projeto de forma injetiva no disco $D = \{(x,y) : \ x^2 + y^2 \leq a^2\}$ do plano-xy. Não podemos aplica a fórmula diretamente pois $\frac{\partial F}{\partial z}$ é nula na fronteira de D. Mas tal derivada não é nula em todo ponto no interior de D, assim consideramos um disco concêntrico $D(R)$ de raio R, $R < a$. Se $S(R)$ representa a porção correspondente do hemisfério superior, (4) é aplicável e resulta:

$$\text{área de } S(R) = \iint\limits_{D(R)} \frac{\sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + (2z)^2}}{|2z|} dxdy$$

$$= \iint_{D(R)} \frac{a}{z} dxdy = a \iint_{D(R)} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dxdy$$

temos

$$\text{área de } S(R) = a \int_0^{2\pi} \left[\int_0^R \frac{1}{\sqrt{a^2 - r^2}} rdr \right] d\theta = 2\pi a \left(a - \sqrt{a^2 - R^2} \right)$$

Quando $R \to a$ então área de $S(R) \to 2\pi a^2$. No caso da superfície parametrizada, temos

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| = \| a \cos v \ \mathbf{r}(u, v) \| = a^2 |\cos v|$$

Logo, podemos aplicar (3) tomando $T = [0, 2\pi] \times \left[0, \frac{1}{2}\pi\right]$. Obtemos

$$a(S) = a^2 \iint_T |\cos v| \, dudv = a^2 \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos v dv \right] du = 2\pi a^2.$$

1.4 Integrais de Superfície

Definicao: Seja $S = \mathbf{r}(T)$ uma superfície paramétrica descrita por uma função diferenciável $\mathbf{r}$ definida em T do plano-uv e seja f um campo escalar definido e limitado em S. A *integral de superfície* de f sobre S se representa por $\iint_S f dS$ (ou por $\iint_S f(x, y, z) dS$) e é definida como

$$\iint_S f dS = \iint_T f(\mathbf{r}(u, v)) \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| dudv.$$

Exemplo 1: *Área de superfície*

$$\iint_S dS = \iint_T \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| dudv.$$

Exemplo 2: *Fluxo de um fluido através de uma superfície.* Imagine que um fluído é uma coleção de pontos chamados partículas. A cada partícula (x, y, z) corresponde um vetor $\mathbf{v}(x, y, z)$ chamado velocidade. Este é o campo de velocidade da corrente. O campo de velocidade pode ou não mudar com o tempo. Consideraremos as correntes estacionárias. Seja $\rho(x, y, z)$ a densidade (massa por unidade de volume) do fluído em (x, y, z). Se o fluído é incompressível a densidade ρ será constante em todo fluído. O produto da densidade pela velocidade representamos por $\mathbf{F}$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \rho\,(x, y, z)\,\mathbf{v}\,(x, y, z) \quad \text{(densidade de fluxo da corrente)}$$

O vetor $\mathbf{F}(x, y, z)$ tem a mesma direção da velocidade e suas medidas de dimensões são

$$\frac{\text{massa}}{\text{unid. vol.}} \cdot \frac{\text{distancia}}{\text{unid. tempo}} = \frac{\text{massa}}{\text{unid. área} \cdot \text{unid. tempo}}.$$

$\mathbf{F}$ nos diz quanta massa de fluído circula no ponto (x, y, z) na direção de $\mathbf{v}$, por unidade de área e de tempo.

Seja $S = \mathbf{r}\,(T)$ uma superfície paramétrica simples. Em cada ponto regular de S designamos por η o vetor unitário normal que tenha o mesmo sentido que o produto vetorial fundamental. Isto é

$$\eta \ = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\|}$$

$\mathbf{F} \cdot \eta$ é a componente do vetor densidade de fluxo na direção η . A massa de fluído que passa através de S na unidade de tempo na direção de η se define por

$$\iint\limits_{\mathbf{r}(T)} \mathbf{F} \cdot \eta dS = \iint\limits_{T} \mathbf{F} \cdot \eta \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| dudv.$$

1.5 Mudança de representação paramétrica

Seja $\mathbf{r} : A \to \mathbf{r}\,(A)$ a região do plano-uv. Suponha $\mathbf{G} : B \to A$ injetiva e continuamente diferenciável.

$$\mathbf{G}\,(s, t) = U\,(s, t)\,\mathbf{i} + V\,(s, t)\,\mathbf{j} \quad \text{se} \ \ (s, t) \in B \tag{5}$$

Considere $\mathbf{R}$ definida por

$$\mathbf{R}\,(s, t) = \mathbf{r}\,[\mathbf{G}\,(s, t)] \tag{6}$$

$\mathbf{r}$ e $\mathbf{R}$ são *regularmente equivalentes,* representam a mesma superfície.

Theorem 1 *Sejam* $\mathbf{r}$ *e* $\mathbf{R}$ *regularmente equivalentes ligadas por* (6) , *donde* $\mathbf{G} = U\mathbf{i} + V\mathbf{j}$ *é injetiva e continuamente diferenciável. Temos então*

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) \frac{\partial\,(U, V)}{\partial\,(s, t)}$$

donde $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\,(U, V)$ *e* $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\,(U, V)$.

Demonstração: $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial s} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\frac{\partial U}{\partial s} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\frac{\partial V}{\partial s}$, $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\frac{\partial V}{\partial t}$ daí

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial U}{\partial s}\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial t}\frac{\partial V}{\partial s}\right).$$

Theorem 2 *Se* $\mathbf{r}$ *e* $\mathbf{R}$ *são equivalentes e se* $\iint\limits_{\mathbf{r}(A)} f dS$ *existe então* $\iint\limits_{\mathbf{R}(B)} f dS$ *existe e*

$$\iint\limits_{\mathbf{r}(A)} f dS = \iint\limits_{\mathbf{R}(B)} f dS.$$

Demonstração: $\iint\limits_{\mathbf{r}(A)} f dS = \iint\limits_{A} f(\mathbf{r}(u,v)) \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| dudv$ agora

$$\begin{aligned}\iint\limits_{A} f(\mathbf{r}(u,v)) \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| dudv &= \iint\limits_{B} f(\mathbf{r}(\mathbf{G}(s,t))) \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| \left| \frac{\partial (U,V)}{\partial (s,t)} \right| dudv \\ &= \iint\limits_{B} f(\mathbf{R}(s,t)) \left\| \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} \right\| dsdt = \iint\limits_{\mathbf{R}(B)} f dS.\end{aligned}$$

2 Teorema de Green

Seja C uma curva plana suave com parametrização

$$x = g(t),\ y = h(t),\quad a \leq t \leq b.$$

Suponha que C seja uma curva fechada simples, isto é, existe somente um único ponto de interseção, $P(a) = P(b)$. Vamos considerar também que C está orientada positivamente, isto é, ao longo de C a região R que C encerra estará sempre à esquerda quando o ponto $P(t)$ descreve C. A integral ao longo de uma curva fechada terá a seguinte notação:

$$\oint\limits_{C} M(x,y)dx + N(x,y)dy.$$

e chamaremos a integral curvilínea ao longo de uma curva fechada simples C. Então temos o seguinte resultado importante que é conhecido como o teorema de Green.

Theorem 3 *Seja C uma curva fechada simples parcialmente suave e seja R a região que consiste de C e seu interior. Se M e N são funções contínuas com derivadas parciais primeiras contínuas em toda uma região D contendo R, então*

$$\oint_C M(x,y)dx + N(x,y)dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA. \tag{7}$$

Proof. Consideremos R uma região do tipo R_x ou R_y, isto é,

$$R = \{(x,y) : \ a \leq x \leq b, \ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\} = R_x$$

$$R = \{(x,y) : \ c \leq y \leq d, \ h_1(x) \leq y \leq h_2(x)\} = R_y$$

onde g_1, g_2, h_1 e h_2 são funções suaves. É suficiente mostrar que

$$\oint_C M(x,y)dx = -\iint_R \frac{\partial M}{\partial y} dA \tag{8}$$

$$\oint_C N(x,y)dx = \iint_R \frac{\partial N}{\partial x} dA \tag{9}$$

Prova de (8) : C consiste de duas curvas suaves C_1 e C_2 de equações $y = g_1(x)$ e $y = g_2(x)$, respectivamente. Daí

$$\oint_C M(x,y)dx = \oint_{C_1} M(x,y)dx + \oint_{C_2} M(x,y)dx$$

obtemos então que

$$\begin{aligned} \oint_C M(x,y)dx &= \int_a^b M(x, g_1(x))dx + \int_b^a M(x, g_2(x))dx \\ &= \int_a^b M(x, g_1(x))dx - \int_a^b M(x, g_2(x))dx \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \iint_R \frac{\partial M}{\partial y} dA &= \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y} dy dx \\ &= \int_a^b [M(x,y)]_{g_1(x)}^{g_2(x)} dx \\ &= \int_a^b (M(x, g_2(x)) - M(x, g_1(x))) dx \end{aligned}$$

segue que:

$$\oint_C M(x,y)dx = -\iint_R \frac{\partial M}{\partial y} dA$$

De modo análogo, considerando R como uma região do tipo R_y, prova-se (9) .Ou seja,

$$\oint_C N(x,y)dx = \oint_{C_1} N(x,y)dx + \oint_{C_2} N(x,y)dx$$

obtemos então que

$$\begin{aligned}
\oint_C N(x,y)dx &= \int_d^c N(h_1(y),y)dy + \int_c^d N(h_2(y),y)dy \\
&= \int_c^d (-N(h_1(y),y)dy + N(h_2(y),y)dy)dx.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\iint_R \frac{\partial N}{\partial x} dA &= \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \frac{\partial N}{\partial x} dx dy \\
&= \int_c^d [N(x,y)]_{h_1(y)}^{h_2(y)} dy \\
&= \int_c^d (N(h_2(y),y) - N(h_1(y),y))\, dy.
\end{aligned}$$

o que prova o teorema. ∎

Se $R = R_1 \cup R_2$, $\partial R_1 = C_1 \cup C_1'$, $\quad \partial R_2 = C_2 \cup C_2'$ temos

$$\iint_{R_1} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA = \oint_{C_1 \cup C_1'} M dx + N dy$$

$$\iint_{R_2} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA = \oint_{C_2 \cup C_2'} M dx + N dy$$

A integral ao longo de C_1' é de sinal contrário à integral ao longo de C_2'. Portanto,

$$\oint_C M(x,y)dx + N(x,y)dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA.$$

Example 4 *Usando o teorema de Green, calcule* $\oint\limits_C 5xydx + x^3dy$, *onde* C *é a curva fechada que consiste nos gráficos de* $y = x^2$ *e* $y = 2x$, *entre os pontos* $(0,0)$ *e* $(2,4)$.

Solução: Pelo teorema de Green: $M(x,y) = 5xy$ e $N = x^3$ logo

$$\begin{aligned}
\oint\limits_C 5xydx + x^3dy &= \iint\limits_R \left[\frac{\partial\left(x^3\right)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(5xy\right)\right] dA \\
&= \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} \left(3x^2 - 5x\right) dydx \\
&= \int_0^2 \left[3x^2y - 5xy\right]_{x^2}^{2x} dx \\
&= \int_0^2 \left[11x^3 - 10x^2 - 3x^4\right] dx = -\frac{28}{15}.
\end{aligned}$$

Example 5 *Usando o teorema de Green, calcule a integral curvilínea*

$$\oint\limits_C 2xydx + \left(x^2 + y^2\right) dy$$

onde C *é a elipse* $4x^2 + 9y^2 = 36$.

Solução: Pelo teorema de Green, com $M(x,y) = 2xy,\ N(x,y) = x^2 + y^2$, temos

$$\oint\limits_C 2xydx + \left(x^2 + y^2\right) dy = \iint\limits_R (2x - 2x)dx = \iint\limits_R 0dA = 0.$$

A integral sempre será zero para qualquer curva fechada.

Example 6 *Calcule* $\oint\limits_C \left(4 + e^{\sqrt{x}}\right) dx + (\operatorname{sen} y + 3x^2)\, dy$ *se* C *é a fronteira da região* R *delimitada pelos quartos de círculo de raio* a *e* b, *respectivamente, e pelos segmentos de eixo-*x *e* y.

Solução: Por Green

$$\begin{aligned}
\oint_C \left(4 + e^{\sqrt{x}}\right) dx + \left(\operatorname{sen} y + 3x^2\right) dy &= \iint_R (6x - 0)\, dA \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_a^b 6r^2 \cos\theta dr d\theta \\
&= 6 \left[\frac{1}{3} r^3\right]_a^b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta \\
&= 2\left(b^3 - a^3\right) [\operatorname{sen}\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\left(b^3 - a^3\right).
\end{aligned}$$

Usando o teorema de Green podemos encontrar uma fórmula para achar a área A de uma região R delimitada por uma curva simples parcialmente suave C. Fazendo $M = 0$ e $N = x$ em (7), obtemos

$$A = \iint_R dA = \oint_C x dy$$

também se fizermos $N = 0$ e $M = -y$ em (7), obtemos

$$A = \iint_R dA = -\oint_C y dx$$

Daí, podemos estabelecer o seguinte resultado.

Theorem 7 *Se uma região R do plano-xy é delimitada por uma curva fechada, simples, parcialmente suave C, então a área da região A de R é*

$$A = \oint_C x dy = -\oint_C y dx = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx.$$

Example 8 *Ache a área da elipse usando o teorema de acima.*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Solução: As equações paramétricas da elipse são $x = a\cos t$, $y = b\,\mathrm{sen}\,t$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Daí

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}\oint\limits_{C} xdy - ydx \\
&= \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} (a\cos t)\,(b\cos t)\,dt - (b\,\mathrm{sen}\,t)\,(-a\,\mathrm{sen}\,t)\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} ab\left(\cos^2 t + \mathrm{sen}^2\,t\right) dt \\
&= \frac{1}{2}ab2\pi = ab\pi
\end{aligned}$$

O teorema de Green é válido para regiões R que contenha "buracos ". A integração deve ser feita de modo a manter a região R sempre à esquerda de C. Assim, se tivermos uma região R cujo contorno exterior seja C_0 e os contornos interiores sejam C_1, $C_2, \cdots, C_n$, temos que

$$\oint\limits_{C_0} M(x,y)dx + N(x,y)dy - \sum_{i=1}^{n}\oint\limits_{C_i} M(x,y)dx + N(x,y)dy = \iint\limits_{R}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA$$

onde $C_i,\ i = 0, 1, \cdots, n$ são percorridos no sentido contrário aos ponteiros do relógio.

Example 9 *Sejam C_1 e C_2 duas curvas fechadas simples parcialmente suaves que não se interceptam, cada uma tendo a origem 0 como um ponto interior.Se*

$$M = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad N = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

prove que

$$\oint\limits_{C_1} M(x,y)dx + N(x,y)dy = \oint\limits_{C_2} M(x,y)dx + N(x,y)dy.$$

Solução: Denotando por R a região entre C_1 e C_2, o teorema de Green nos dá

$$\oint\limits_{C_1} M(x,y)dx + N(x,y)dy - \oint\limits_{C_2} M(x,y)dx + N(x,y)dy = \iint\limits_{R}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA$$

e como

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{(x^2 + y^2)\,(1) - x\,(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

a integral dupla sobre R é zero. Consequentemente

$$\oint_{C_1} M(x,y)dx + N(x,y)dy = \oint_{C_2} M(x,y)dx + N(x,y)dy.$$

Example 10 *Se* $\mathbf{F}$ *é definida por* $\mathbf{F}(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}\left(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}\right)$, *prove que* $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi$ *para toda curva fechada simples parcialmente suave que tenha a origem em seu interior.*

Solução: Fazendo $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ então M e N são as mesmas que no exemplo 5. Escolhendo um círculo C_1 de raio a e centro na origem e inteiramente contido em C, segue que

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

As equações paramétricas de C_1 são

$$x = a\cos t,\ y = a\operatorname{sen} t,\ 0 \leq t \leq 2\pi$$

obtemos

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \oint_{C_1} \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{-a\operatorname{sen} t}{a^2}\left(-a\operatorname{sen} t\right)dt + \frac{a\cos t}{a^2}a\cos t dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t\right)dt = 2\pi. \end{aligned}$$

2.1 Teorema de Green na forma vetorial

Seja $F(x,y) = M(x,y)\mathbf{i} + N(x,y)\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$, o rotacional de F é dado por

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & 0 \end{vmatrix} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

seja s o parâmetro comprimento de arco para C, consideremos o vetor tangente unitário

$$T = \frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j} + \frac{dz}{ds}\mathbf{k}$$

assim o teorema de Green toma a seguinte forma.

Teorema de Green: $\oint_C F \cdot T\ ds = \iint_R \left(\nabla \times F\right) \cdot \mathbf{k}\ dA.$