

Integrais Duplas

Considere W um retângulo que contenha a região R . A totalidade das sub-regiões retangulares fechadas internamente contidas



em R constitui uma **partição de R** . Designando por $R_1, R_2, \dots, R_n$ essas sub-regiões retangulares, então a partição interna é $P = \{R_i, i=1, \dots, n\}$. O comprimento da maior diagonal das R_i será denotada por $\|P\|$ e chamada **norma** da partição P . A área R_i denotamos por ΔA_i .

Definição: Seja f uma função de duas variáveis definida numa região R e $P = \{R_i, i=1, \dots, n\}$ uma partição de R . Uma soma de Riemann de f para P é a soma

$$\sum_{i=1}^n f(u_i, v_i) \Delta A_i$$

onde (u_i, v_i) está em R_i .

Definição 2: Sejam f uma função de duas variáveis definida numa região R e L um número real. A afirmação

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(u_i, v_i) \Delta A_i = L$$

significa que, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $P = \{R_i\}$ é uma partição interior de R com $\|P\| \leq \delta$ então

$$\left| \sum_{i=1}^n f(u_i, v_i) \Delta A_i - L \right| < \epsilon$$

para qualquer escolha de (u_i, v_i) em R_i .

Definição 3: Seja f uma função de duas variáveis definida em R . A integral dupla de f sobre R é dada por

$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(u_i, v_i) \Delta A_i$$

se o limite existir.

Definição 4: Seja f contínua com $f(x, y) \geq 0, \forall (x, y) \in R$. O volume do sólido compreendido entre o gráfico de $z = f(x, y)$ e acima de R é

$$V = \iint_R f(x, y) dA.$$

Se $f(x,y) < 0$ em R , a integral dupla de f sobre R é o negativo do volume de sólido situado acima do gráfico de f e sob a região R .

Propriedades

Se f é integrável e c é uma constante qualquer, então

$$a) \iint_R c f(x,y) dA = c \iint_R f(x,y) dA$$

$$b) \iint_R (f(x,y) + g(x,y)) dA = \iint_R f(x,y) dA + \iint_R g(x,y) dA$$

c) Se R é a união de duas regiões não superpostas R_1 e R_2 então

$$\iint_R f(x,y) dA = \iint_{R_1} f(x,y) dA + \iint_{R_2} f(x,y) dA$$

d) Se $f(x,y) \geq 0$ em R então $\iint_R f(x,y) dA \geq 0$.

Integrais Iteradas

Se R é uma região do tipo

$$R = \{ (x,y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d \}$$

então a integral de uma função f definida em R é dada por

$$\iint_R f(x,y) dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y) dy dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y) dy \right] dx$$

ou

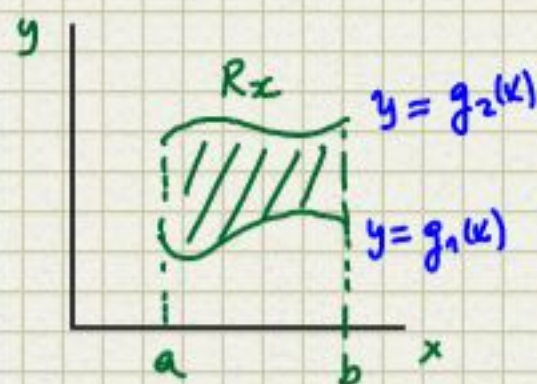
$$\iint_R f(x,y) dA = \int_c^d \int_a^b f(x,y) dx dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y) dx \right] dy,$$

Exemplo: Calcular $\int_1^4 \int_{-1}^2 (2x + 6x^2y) dy dx$.

$$\text{solução: } \int_1^4 \int_{-1}^2 (2x + 6x^2y) dy dx = 234$$

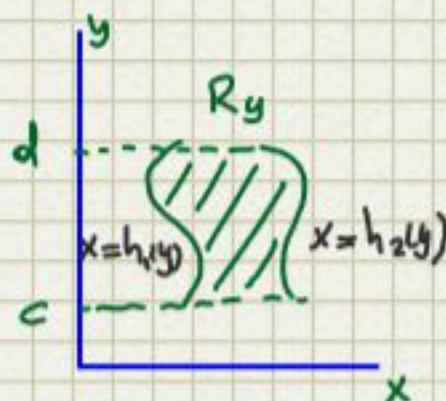
Seja R uma região do tipo R_x , ou R_y ,
uma região definida por

$$R_x = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : g_1(x) \leq y \leq g_2(x), a \leq x \leq b \}$$



ou do tipo R_y dada por

$$R_y = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : h_1(y) \leq x \leq h_2(y), c \leq y \leq d \}$$

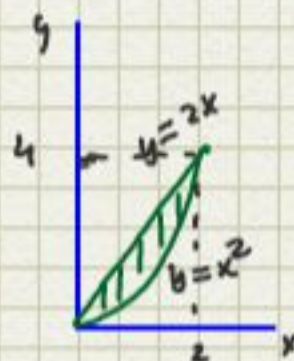


então temos que

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx$$

$$\text{ou} \quad \iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy$$

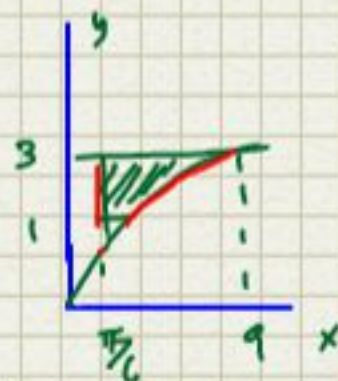
Exemplo 1: Calcule $\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^3 + 4y) dy dx$.



$$\text{Sol.:} \quad \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^3 + 4y) dy dx = \int_0^2 \left[x^3 y + 4 \frac{y^2}{2} \right]_{x^2}^{2x} dx$$

$$= \int_0^2 (8x^2 - x^3) dx = \frac{32}{3}$$

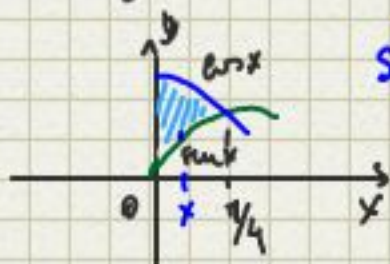
Exemplo 2: Calcule $\int_1^3 \int_{\pi/6}^{y^2} 2y \cos z dx dy$.



$$\text{solução:} \quad \int_1^3 \int_{\pi/6}^{y^2} 2y \cos z dx dy = \int_1^3 2y [\sin z]_{\pi/6}^{y^2} dy = \int_1^3 2y [\sin y^2 - \sin \frac{\pi}{6}] dy$$

$$= \int_1^3 (2y \sin y^2 - y) dy = \left[-\cos y^2 - \frac{y^2}{2} \right]_1^3 = -4 - \cos 9 + \cos 1$$

Exemplo 3: Seja R a região do plano-xy delimitada por $y = \sin x$ e $y = \cos x$ com x variando de 0 a $\pi/4$. Calcule $\iint_R (y+1) dA$.



$$\text{Sol.:} \quad \iint_R (y+1) dA = \int_0^{\pi/4} \int_{\sin x}^{\cos x} (y+1) dy dx$$

Volume e Área

A área de uma região R fechada e limitada é

$$A = \iint_R dA$$

O volume do sólido compreendido entre o gráfico de $z = f(x, y)$ e sobre uma região R do plano- xy é

$$V = \iint_R f(x, y) dA \quad (f(x, y) \geq 0)$$

Se $R = R_x = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x) \}$ então

$$V = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx$$

e a área da região R_x é

$$A = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy dx = \int_a^b (g_2(x) - g_1(x)) dx.$$

De forma análoga, isso vale para regiões do tipo R_y .

Exemplo 1: Ache a área A da região do plano- xy delimitada pelos gráficos de $2y = 16 - x^2$ e $x + 2y = 4$.

Solução: Temos que

$$y = 8 - \frac{x^2}{2} \text{ e } y = 4 - \frac{x}{2}$$

Interceptando as duas equações acima obtemos

$$2 - \frac{x}{2} = 8 - \frac{x^2}{2} \text{ ou } 2 - \frac{x}{2} = 2(4 - \frac{x^2}{4})$$

ou ainda

$$2 - \frac{x}{2} = 2(2 - \frac{x}{2})(2 + \frac{x}{2})$$

$$\text{ou } (2 - \frac{x}{2}) \left[1 - 2(2 + \frac{x}{2}) \right] \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 4 \end{cases} \text{ ou}$$

$$\text{Logo: } A = \int_{-3}^4 \int_{2 - \frac{x}{2}}^{8 - \frac{x^2}{2}} dy dx = \int_{-3}^4 \left(6 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} \right) dx = \frac{343}{12}.$$

Exemplo 2: Ache a área A da região do plano xy delimitada pelos gráficos de $x=y^3$, $x+y=2$ e $y=0$.

Sol.: Interceptando $x=y^3$ com $x+y=2$, temos

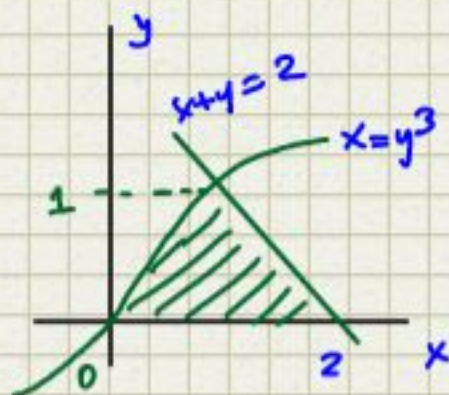
$$y^3 + y - 2 = 0$$

cuya raiz é $y=1$. Logo, temos

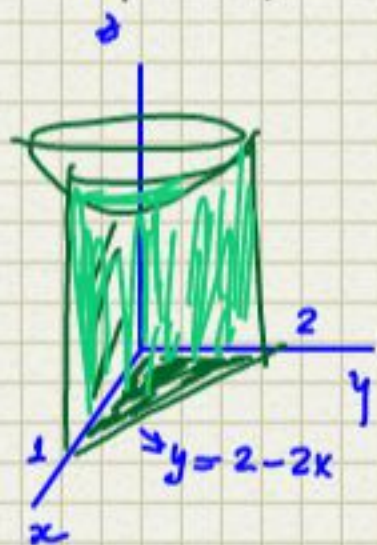
$$A = \int_0^1 \int_{y^3}^{2-y} dx dy = \int_0^1 [x]_{y^3}^{2-y} dy = \int_0^1 (2-y-y^3) dy = \left(2y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4} \right)_0^1$$

$$= 5/4$$

$$A = \int_0^1 \int_0^{\sqrt[3]{x}} dy dx + \int_1^2 \int_0^{2-x} dy dx.$$



Exemplo 3: Ache o volume do sólido do primeiro octante delimitada pelos planos coordenados, pelo parabolóide $z = x^2 + y^2 + 1$ e pelo plano $2x+y=2$.



$$V = \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} \sqrt{9-y^2} \, dx \, dy = \int_0^3 \sqrt{9-y^2} [x]_0^{\sqrt{9-y^2}} \, dy$$

$$= \int_0^3 (9-y^2) \, dy = \left(9y - \frac{y^3}{3} \right)_0^3 = 18.$$

Integrais duplas em coordenadas polares

Considere a região R como na figura 1, delimitada por arcos de círculos de raios r_1 e r_2 e por dois raios que saem da origem. Se $\Delta\theta$ é a medida em radianos do ângulo entre os raios e se $\Delta r = r_2 - r_1$ então a área ΔA de R é

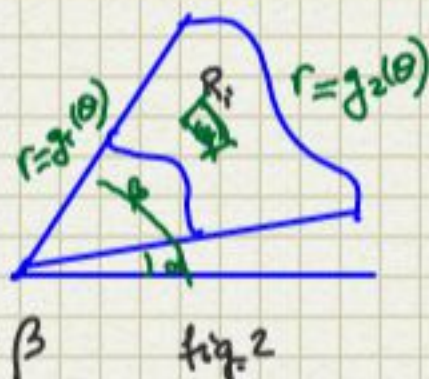
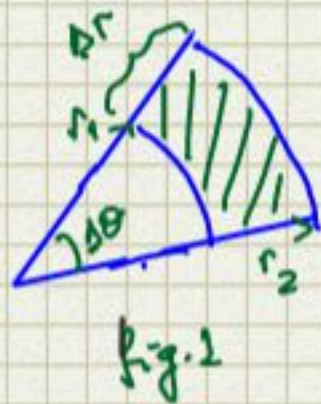
$$\Delta A = \frac{1}{2} r_2^2 \Delta\theta - \frac{1}{2} r_1^2 \Delta\theta$$

ou

$$\Delta A = \frac{1}{2} (r_2^2 - r_1^2) \Delta\theta = \frac{1}{2} (r_1 + r_2)(r_2 - r_1) \Delta\theta$$

chamando $\bar{r} = \frac{r_1 + r_2}{2}$ então

$$\Delta A = \bar{r} \Delta r \Delta\theta$$



Agora consideremos a região R como na figura 2 delimitada por dois raios que fazem ângulos α e β com o eixo polar, e pelos gráficos de suas equações polares $r = g_1(\theta)$ e $r = g_2(\theta)$, em que g_1 e g_2 são funções contínuas e $g_1(\theta) \leq g_2(\theta)$ para $\alpha \leq \theta \leq \beta$.

Subdividimos R por arcos circulares e raios conforme a figura 2. Então a coleção de regiões polares elementares $R_1, \dots, R_n$ que estão completamente dentro de R é chamada de partição polar interna

P de R . A $\|P\|$ é o comprimento da maior diagonal das R_k . Escolhido um ponto (r_k, θ_k) em R_k tal que r_k seja o raio médio, então

$$\Delta A_k = r_k \Delta r_k \Delta\theta_k$$

Se f é uma função contínua de variáveis polares r e θ então temos o resultado.

Theorema 1:

$$\iint_R f(r, \theta) dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r, \theta) r dr d\theta = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_k f(r_k, \theta_k) r_k \Delta r_k \Delta \theta_k$$

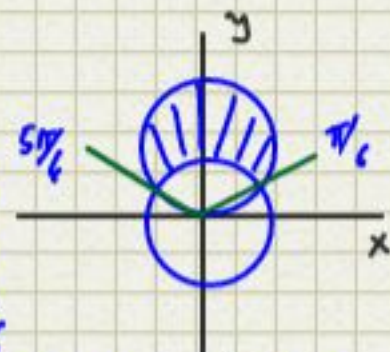
Se $f(r, \theta) = 1$ então obtém-se a área de R

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} r dr d\theta.$$

Exemplo 1: Ache a área da região R exterior ao círculo $r = a$ e interior ao círculo $r = 2a \sin \theta$.

Sol.: Os pontos de interseção destes círculos são:

$$a = 2a \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_1 = \pi/6, \theta_2 = 5\pi/6$$



$$5\pi/6 - \pi/6 = 2\pi/3$$

Logo:

$$A = \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \int_a^{2a \sin \theta} r dr d\theta = \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \left[\frac{r^2}{2} \right]_a^{2a \sin \theta} d\theta = \int_{\pi/6}^{5\pi/6} (2a^2 \sin^2 \theta - \frac{a^2}{2}) d\theta$$

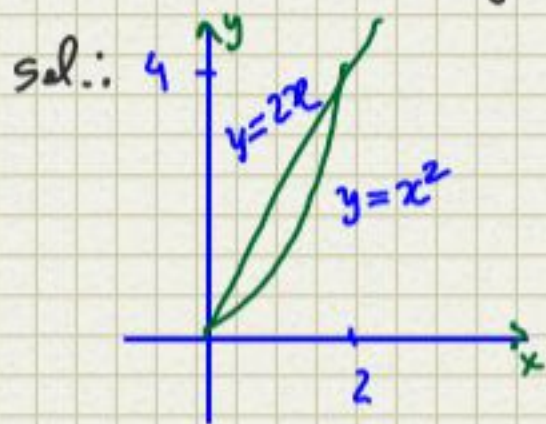
$$= a^2 \int_{\pi/6}^{5\$$

Invertendo a ordem de integração

Exemplo: Esboce a região de integração para a integral

$$\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (4x+2) dy dx.$$

Escreva uma integral equivalente com a ordem de integração invertida.



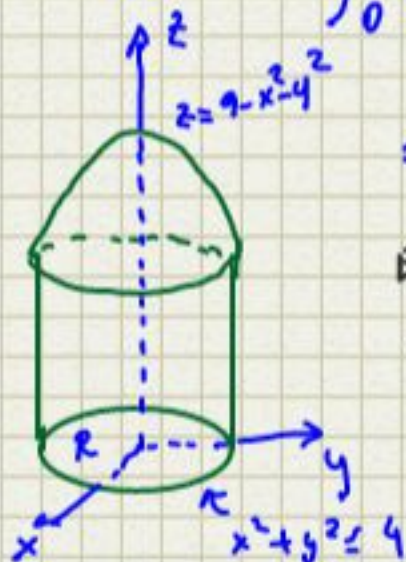
Dai: $x = \sqrt{y}$ e $x = y/2$ Assim

$$\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (4x+2) dy dx = \int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} (4x+2) dx dy$$

Exemplo 1: Calcule $\int_0^1 \int_y^1 \frac{\sin x}{x} dx dy$.

Sol.:
$$\int_0^1 \int_y^1 \frac{\sin x}{x} dx dy = \int_0^1 \int_0^x \frac{\sin x}{x} dy dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} [y]_0^x dx = \int_0^1 \sin x dx$$

$$= [-\cos x]_0^1 = -\cos 1 + 1 \approx 0.46.$$



Exemplo: Considere o sólido Q que está abaixo do gráfico de $z = 9 - x^2 - y^2$ e acima da região determinada pelo círculo $x^2 + y^2 = 4$. Encontre o volume desse sólido.

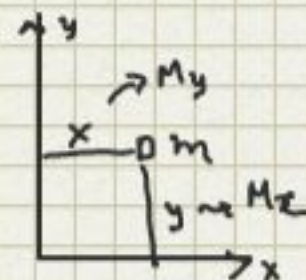
Sol.:
$$V = \iint_R (9 - x^2 - y^2) dA = \int_0^{2\pi} \int_0^2 ($$

Momentos e centro de massa

Uma placa fina com densidade variável $\delta(x,y)$ tem
m massa $M = \iint_R \delta(x,y) dA$ (R é a região que representa a placa)

Os momentos dessas placas são

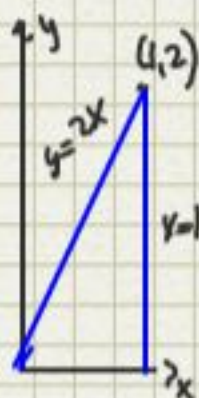
$$M_x = \iint_R y \delta(x,y) dA, \quad M_y = \iint_R x \delta(x,y) dA$$



Centro de massa:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M}$$

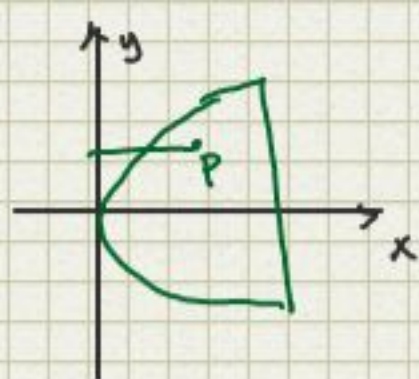
Exemplo 1: Uma placa fina cobre uma região triangular limitada pelo eixo-x e pelas retas $x=1$ e $y=2x$ no primeiro quadrante. A densidade da placa é $\delta(x,y) = 6x + 6y + 6$. Encontre a massa da placa, os momentos e o centro de massa em relação aos eixos coordenados.



Solução:

$$M = \int_0^1 \int_0^{2x} \delta(x,y) dy dx = \int_0^1 \int_0^{2x} (6x + 6y + 6) dy dx = \int_0^1 [6xy + 3y^2 + 6y]_0^{2x} dx$$
$$= \int_0^1 (24x^2 + 12x) dx = [8x^3 + 6x^2]_0^1 = 14$$

Os momentos são:



Sol.: $\delta(x,y) = kx$, k constante. O centro de massa está sobre o eixo x pela simetria da região e pela forma de δ . Isto é, $\bar{y} = 0$.

$$m = \iint_R \delta(x,y) dA = k \int_{-2}^2 \int_{y^2}^4 x dx dy = \frac{128}{5} k$$

Também
$$M_y = \iint_R x (\delta(x,y)) dA = k \int_{-2}^2 \int_{y^2}^4 x^2 dx dy = k \frac{512}{7}$$

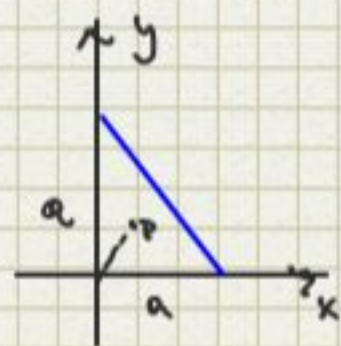
$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{20}{7}. \text{ Assim } (\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{20}{7}, 0\right).$$

Exemplo 3: Uma lâmina tem a forma de um triângulo retângulo isósceles com lados iguais de comprimento a . A densidade de massa por área no ponto P é diretamente proporcional ao quadrado da distância de P ao vértice oposto à hipotenusa. Ache o centro de massa.

Sol.: $\delta(x,y) = k(x^2 + y^2)$

$$M = \iint_R \delta(x,y) dA = \int_0^a \int_0^{a-x} k(x^2 + y^2) dy dx = \frac{ka^4}{6}$$

$$M_y = \iint_R x \delta(x,y) dA = k \int_0^a \int_0^{a-x} x(x^2 + y^2) dy dx = \frac{1}{15} a^5 k$$



Exemplo: Encontre o momento de inércia do exemplo em relação aos eixos coordenados e à origem.

Solução: Usando a densidade $\delta(x,y) = 6x + 6y + 6$ dado no exemplo, o momento de inércia em relação ao eixo x é

$$I_x = \int_0^1 \int_0^{2x} y^2 \delta(x,y) dy dx = \int_0^1 \int_0^{2x} (6xy + 6y^2 + 6y) dy dx = \int_0^1 \left(2xy^3 + \frac{3}{2}y^4 + 2y^3 \right) \Big|_0^{2x} dx$$

$$= \int_0^1 (40x^4 + 16x^3) dx = [8x^5 + 4x^4]_0^1 = 12$$

Da maneira semelhante

$$I_y = \int_0^1 \int_0^{2x} x^2 \delta(x,y) dy dx = \frac{39}{5}$$

Temos que

$$I_0 = I_x + I_y = 12 + \frac{39}{5} = \frac{99}{5}$$

O centróide de uma região é dado qdo $\delta(x,y) = cte$. Em muitas situações podemos fazer $\delta(x,y) = 1$.

Exemplo: Encontre o centróide de uma região no

Integrais Triplas



Considere um sólido Q no espaço tridimensional e vamos considerar uma partição desse sólido em n -cubos $P = \{Q_k, Q_k \subset Q\}$. Tomemos um ponto $(x_k, y_k, z_k) \in Q_k$

Formamos $f(x_k, y_k, z_k) \Delta V_k$

onde ΔV_k é o volume do cubo Q_k . Somando sobre todos os Q_k , temos:

$$\sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \Delta V_k \quad (\text{Soma de Riemann})$$

Daí,

$$\lim_{(n \rightarrow \infty)} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \Delta V_k = \iiint_Q f(x, y, z) dV$$

Volume de uma região no espaço

Se $f(x, y, z) \equiv 1$ em Q

$$V = \iiint_Q dV \text{ é o volume do sólido } Q.$$

Integrais Iteradas

Se Q é um cubo:

$$Q = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, m \leq z \leq n \}$$

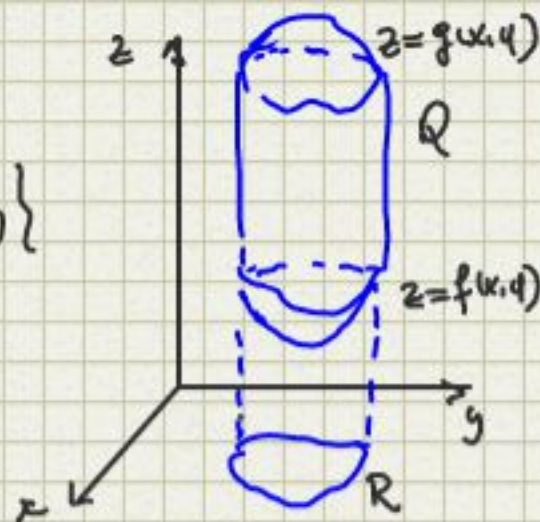
então

Se Q é um sólido tal que

$$Q = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in R \text{ e } f(x, y) \leq z \leq g(x, y) \}$$

então

$$\iiint_Q h(x, y, z) dV = \iint_R \left[\int_{f(x, y)}^{g(x, y)} h(x, y, z) dz \right] dA$$



No caso em que $R = R_x = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x) \}$. Então

$$\iiint_Q h(x, y, z) dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{f(x, y)}^{g(x, y)} h(x, y, z) dz dy dx.$$

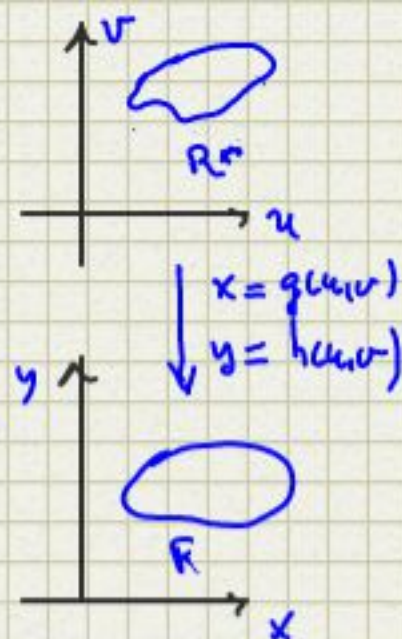
Se $R = R_y = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \le$

Definição do Jacobiano
Se $x = g(u,v)$ e $y = h(u,v)$

$$T: R_{uv} \rightarrow R$$

$$(u,v) \mapsto T(u,v) = (x,y)$$

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$



Fórm. Mudança de variável:

$$\iint_R f(x,y) dx dy = \iint_{R^*} f(g(u,v), h(u,v)) |J(u,v)| du dv$$

Exemplo: Calcule $\int_0^4 \int_{x=y/2}^{x=y/2+1} \frac{2x-y}{2} dx dy$

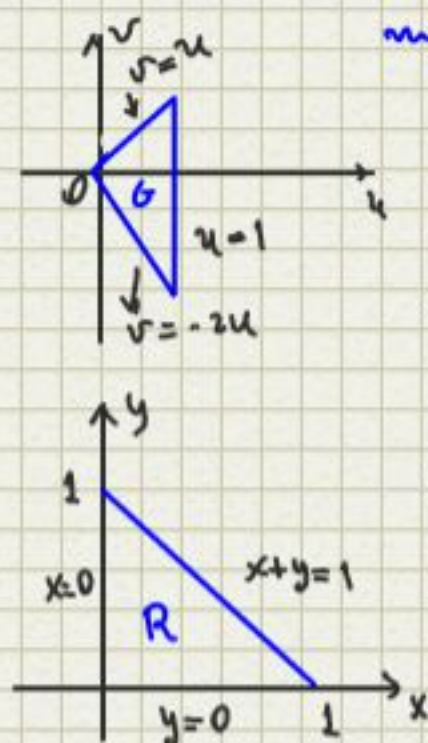
Exemplo 2: Usando uma transformação para integrar

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \sqrt{x+y} (y-2x)^2 dy dx.$$

Solução: O integrando segue a transformação $u = x+y$, $v = y-2x$. Isto nos conduz a:

$$x = \frac{u}{3} - \frac{v}{3}, \quad y = \frac{2u}{3} + \frac{v}{3} \quad (*)$$

Com as equações (*), podemos encontrar a fronteira de G

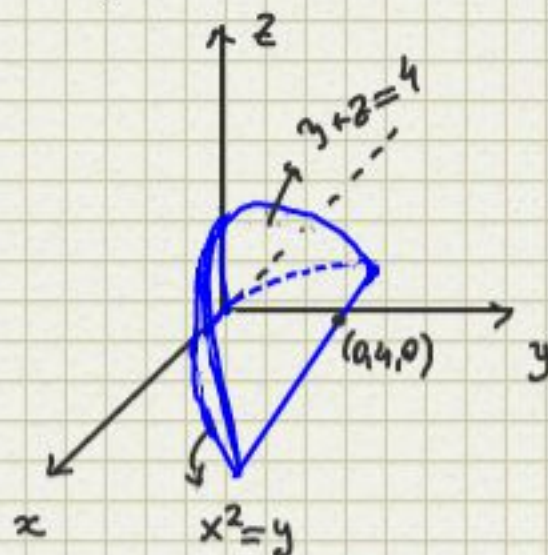


Equações com variáveis
em x, y da fronteira de

Exemplo 1: Ache o volume do sólido delimitado pelo cilindro $x^2=y$ e pelos planos $y+z=4$ e $z=0$.

Solução: O volume é dado por

$$V = \int_{-2}^2 \int_{x^2}^4 \int_0^{4-y} dz dy dx = \frac{256}{15}.$$



Se Q é um sólido da forma

$$Q = \{ (x,y,z) : a \leq x \leq b, h_1(x) \leq z \leq h_2(x), K_1(x,z) \leq y \leq K_2(x,z) \}$$

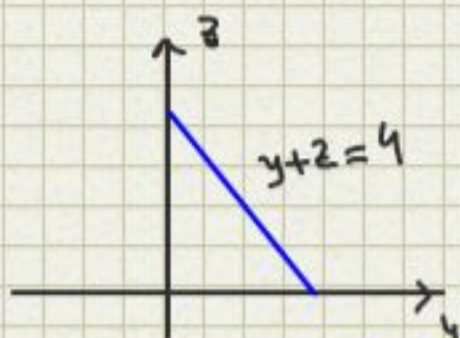
então

$$\iiint_Q f(x,y,z) dV = \int_a^b \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \int_{K_1(x,z)}^{K_2(x,z)} f(x,y,z) dy dz dx$$

Ex

Exemplo 3: No exemplo 1 ache o volume do sólido S delimitado pelo cilindro $x^2 = y$ e pelos planos $y+z=4$ e $z=0$.

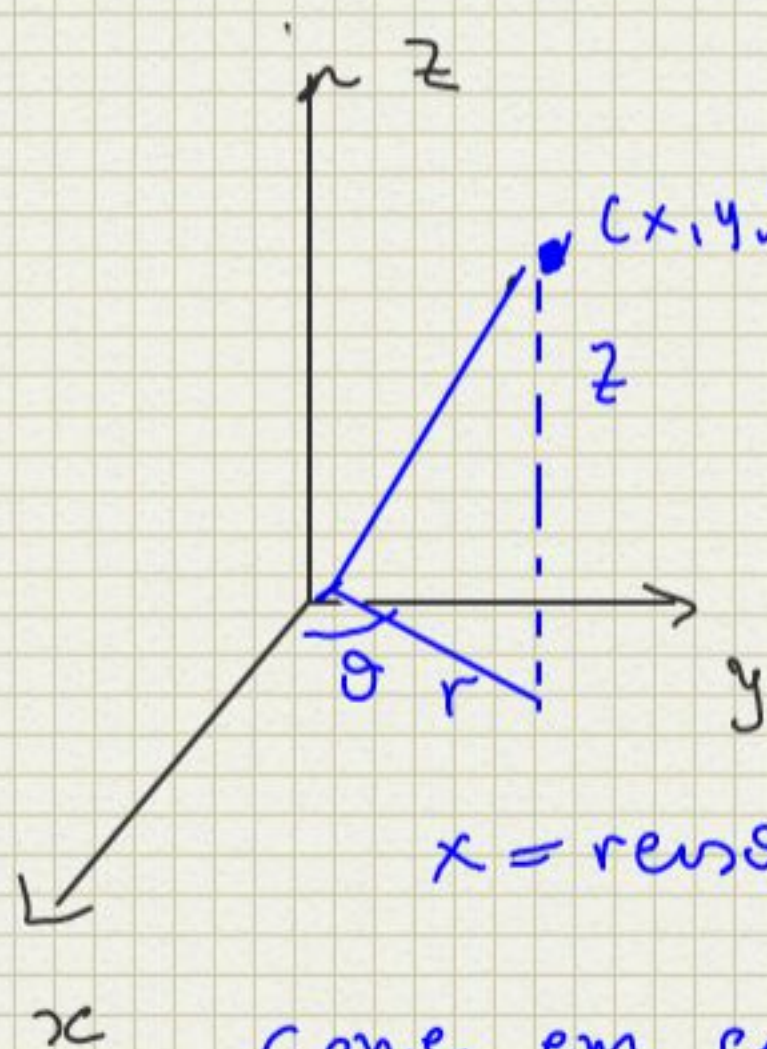
Solução: A projeção do sólido no plano- yz é:



Logo,

$$V = \int_0^4 \int_0^{4-z} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx dy dz.$$

Coordenadas Cilíndricas



$$(x, y, z) = (r, \theta, z)$$

$$E = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

$$D = \{(r, \theta)$$

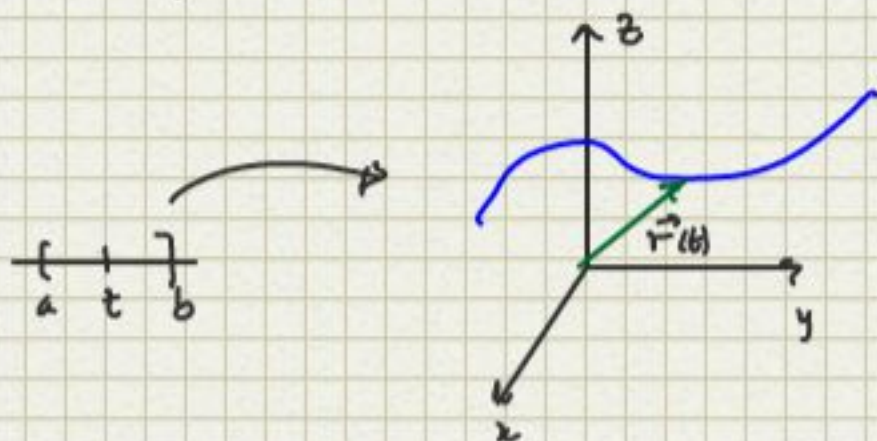
CURVAS NO ESPAÇO

1. Função vetorial

$$\vec{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$t \mapsto \vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$$

Quando t percorre $[a, b]$ o vetor $\vec{r}(t)$ descreve uma curva no espaço.



Exemplo: Seja $r(t) = (9-4t)\vec{i} + (-4+6t)\vec{j} + (3+3t)\vec{k}$, $t \in \mathbb{R}$. Descreva $\vec{r}(t)$.

Solução: Note que: $\vec{r}(t) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ onde

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} x = 9-4t \\ y = -4+6t \\ z = 3+3t \end{cases} \quad \text{isto é uma reta$$

CURVAS NO PLANO

$$\vec{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto \vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j}$$

$$C: \vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j}, \quad a \leq t \leq b$$

ou

$$C: x = f(t), y = g(t), \quad a \leq t \leq b$$

Exemplo: O círculo

$$C: x^2 + y^2 = a^2 \quad \text{ou}$$

$$C: x = a \cos t, y = a \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

ou ainda

$$C: \vec{r}(t) = a \cos t \vec{i} + a \sin t \vec{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Exemplo 2: Parábola

$$C: x = 2t, y = t^2 - 1, \quad -1 \leq t \leq 2$$

ou

$$C: \vec{r}(t) = 2t\vec{i} + (t^2 - 1)\vec{j}, \quad -1 \leq t \leq 2$$

A cada curva C dada por

$$\vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}, \quad a \leq t \leq b$$

podemos tomar o vetor tangente

$$\vec{r}'(t) = f'(t$$

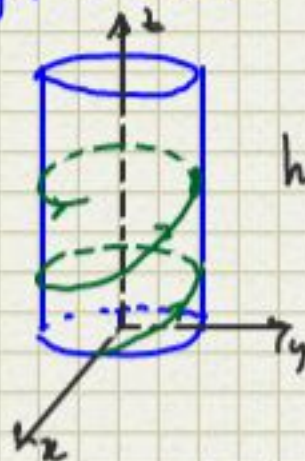
Exemplo 2: Seja $r(t) = a \cos t \vec{i} + a \sin t \vec{j} + bt \vec{k}$ $t \geq 0$ a, b constantes positivas.
 Trace essa curva.

Solução: Equações paramétricas da curva

$$x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt, t \geq 0$$

Observe que $x^2 + y^2 = a^2$

Logo, a curva faz num cilindro circular reto de raio a .



hélice circular

Podemos definir o comprimento de uma curva C

$$x = f(t), y = g(t), z =$$

A função comprimento de arco é definida por

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt$$

ou se C é a curva suave

$$C: x = f(t), y = g(t), z = h(t), a \leq t \leq b$$

então

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2 + (h'(t))^2} dt$$

assim

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2 + h'(t)^2}$$

ou

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

A diferencial de s é

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}.$$

Quando uma curva C é parametrizada pelo seu comprimento de arco então $\|s'(t)\| = 1$.

Exemplo 4: O campo $\vec{F} = -x\vec{i} + xy\vec{j}$ não é conservativo.

De fato, se existisse $f(x,y)$ tal que $\nabla f = \vec{F}$ então

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -x \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xy$$

assim

$$f(x,y) = -\frac{x^2}{2} + g(y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = g'(y) = xy \quad (\text{absurdo!})$$

pois $g'(y)$ depende só de y e não de x .

Seja $\vec{F} = M\vec{i} + N\vec{j} + P\vec{k}$ o campo escalar divergente de $\vec{F}$, denotado por $\text{div } \vec{F}$, é definido por

$$\text{div } \vec{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Exemplo: Se $\vec{F}(x,y,z) = x^2\vec{i} + 2xy\vec{j} + z^2\vec{k}$ então

Exercício: Seja $\vec{F}(x,y,z) = xy^2z^4\vec{i} + (2z^2y+z)\vec{j} + (3z^2x)\vec{k}$, ache o $\text{div } \vec{F}$.

Solução: $\text{div } \vec{F} = y^2z^4 + 2z^2 + 2y^3z$.

INTEGRAIS CURVILÍNEAS

Seja f uma função contínua numa região D do plano- xy que contenha a curva suave $C: x = \alpha(t), y = \beta(t), a \leq t \leq b$.

Particionando o intervalo $[a,b]$

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

Denotemos por $|P|$ a norma da partição. Se $P_k(x_k, y_k)$ é um ponto de C correspondente a t_k , então os pontos $P_0, P_1, \dots, P_n$ dividem C em n partes $\overline{P_{k-1}P_k}$. Seja

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \Delta y_k = y_k - y_{k-1}, \Delta s_k = \text{com$$

$$\int_C f(x,y) dx = \int_a^b f(\alpha(t), \beta(t)) \alpha'(t) dt$$

$$\int_C f(x,y) dy = \int_a^b f(\alpha(t), \beta(t)) \beta'(t) dt.$$

Observação: Tal resultado pode ser estendido para curvas parcialmente suaves, isto é,

$$C = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n$$

então

$$\int_C f(x,y) ds = \int_{C_1} f(x,y) ds + \int_{C_2} f(x,y) ds + \dots + \int_{C_n} f(x,y) ds.$$

Também

$$\int_C f(x,y) ds = - \int_{-C} f(x,y) ds$$

e

$$\int_C (f(x,y) + g(x,y)) ds = \int_C f(x,y) ds + \int_C g(x,y) ds$$

Exemplo 1: Calcule $\int_C xy^2 ds$ se C admite a parametrização

Podemos ter feito, $y = x^2$, $0 \leq x \leq 2$ assim $dx = dx$, $dy = 2x dx$

$$\int_C xy^2 dx = \int_0^2 x (x^2)^2 dx = \int_0^2 x^5 dx$$

$$\int_C xy^2 dy = \int_0^2 x (x^2)^2 (2x dx) = 2 \int_0^2 x^6 dx$$

Considere a função vetorial $\vec{F}$ com domínio D onde a curva $C: \vec{r}(t) = \alpha(t)\vec{i} + \beta(t)\vec{j}$, $a \leq t \leq b$, está incluída. Definimos

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt$$

em outras palavras, podemos dizer que se $\vec{F}(x,y) = M(x,y)\vec{i} + N(x,y)\vec{j}$ e $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ então

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C M(x,y) dx + N(x,y) dy$$

Se $\vec{r}$ e $\vec{s}$ representem dois caminhos equivalentes e regulares então

Denotemos

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \Delta y_k = y_k - y_{k-1}, \Delta z_k = z_k - z_{k-1}$$

$$\overrightarrow{P_{k-1}P_k} = \Delta x_k \vec{i} + \Delta y_k \vec{j} + \Delta z_k \vec{k}. \text{ Tomemos a soma de Riemann}$$

$$\begin{aligned} \sum_k \vec{F}_k \cdot \overrightarrow{P_{k-1}P_k} &= \sum_k (M_k \vec{i} + N_k \vec{j} + P_k \vec{k}) \cdot (\Delta x_k \vec{i} + \Delta y_k \vec{j} + \Delta z_k \vec{k}) \\ &= \sum_k M_k \Delta x_k + N_k \Delta y_k + P_k \Delta z_k \end{aligned}$$

daí

$$\lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_k M_k \Delta x_k + N_k \Delta y_k + P_k \Delta z_k = \int_C M dx + N dy + P dz$$

Se s é o parâmetro de comprimento de arco da curva C e $\vec{r}$ é o vetor posição do ponto na curva

$$\vec{r}(s) = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$$

onde $x = g(s)$, $y = h(s)$, $z = k(s)$ então o vetor tangente à curva C

Como a energia potencial é o negativo do potencial até

$$\vec{F} = -\nabla p$$

Logo, $W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = [-p(x, y, z)]_A^B = p(A) - p(B).$

Se uma partícula tem massa m e velocidade v , então sua energia cinética é $\frac{1}{2}mv^2$.

Lei de conservação de energia: Se uma partícula move-se de um ponto para outro num campo vetorial de forças conservativas, então a soma das energias cinética e potencial permanece constante, isto é, a energia total não varia.

Exemplo: considere o campo de forças

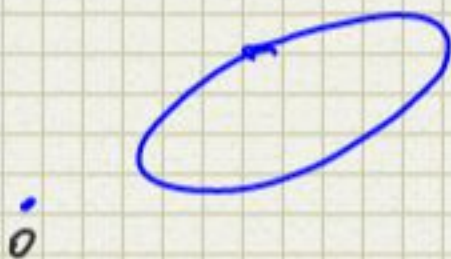
$$\vec{F} = -\frac{y}{x^2+y^2} \vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2} \vec{j}$$

Note que se $M(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$, $N(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ então

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Mas se considerarmos uma região que contenha a origem então

$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \neq 0$ para toda curva C fechada simples que envolva a origem. Logo, a integral depende do caminho C , portanto, o campo $\vec{F}$ não é conservativo. Mas, $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$, para toda curva C que não envolva a origem, logo, $\vec{F}$ é conservativo, nesse caso.



cont.

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \iint_R (5x^2 + 5y^2 + 9) dA = \int_0^{2\pi} \int_0^3 (5r^2 + 9) r dr d\theta = \frac{567}{2} \pi.$$

Se C é parametrizada por

$$x = f(t), y = g(t), z = h(t), a \leq t \leq b$$

então

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C Mdz + Ndy + Pdx = \int_a^b M(f(t), g(t), h(t)) f'(t) dt + \int_a^b N(f(t), g(t), h(t)) g'(t) dt + \int_a^b P(f(t), g(t), h(t)) h'(t) dt.$$

TEOREMA DE GREEN

Teorema (Green) Seja γ uma curva simples, fechada e parcialmente regular, que delimita uma região D do plano xy . Se $L(x, y)$ e $M(x, y)$ são funções de classe C^1 na região $D \cup \partial D$ então

$$\oint_{\gamma} Ldx + Mdy = \iint_D \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} \right) dx dy.$$

onde $\gamma = \partial D$ é orientada positivamente (anti-horário).

Prova: Suponha que <

Note que se $\vec{F}(x,y) = M(x,y)\vec{i} + N(x,y)\vec{j}$ então podemos representar $\vec{F}$ por:

$$\vec{F}(x,y) = M(x,y)\vec{i} + N(x,y)\vec{j} + 0\vec{k}$$

o rotacional de $\vec{F}$ é

$$\text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & 0 \end{vmatrix} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\vec{k}$$

seja s o parâmetro comprimento de arco para C , e consideremos o vetor tangente unitário

$$\vec{T} = \frac{dx}{ds}\vec{i} + \frac{dy}{ds}\vec{j} + \frac{dz}{ds}\vec{k}$$

Desse modo,

$$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds = \iint_R (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{k} dA. \quad (\text{Forma vetorial do Teorema de Green})$$

Dado, $d\vec{r} = dx\vec{i} +$

