4. Campos Vetoriais

4.1 Curvas Regulares

4.1A Esboce o gráfico de cada curva dada abaixo, indicando a orientação positiva.

(a) $\vec{r}(t) = t\vec{i} + (1-t)\,\vec{j},\ 0 \le t \le 1$ (b) $\vec{r}(t) = 2t\vec{i} + t^2\vec{j},\ -1 \le t \le 0$

(c) $\vec{r}(t) = (1/t)\vec{i} + t\vec{j},\ 1 \le t < \infty$ (d) $\vec{r}(t) = t\vec{i} + \sqrt{1-t^2}\vec{j},\ 0 \le t \le 1$

(e) $\vec{r}(t) = t\vec{i} + \ln t\vec{j},\ 1 \le t \le e$ (f) $\vec{r}(t) = \cos t\vec{i} + \operatorname{sen} t\vec{j} + t\vec{k},\ 0 \le t \le 2\pi$

4.1B *Duas parametrizações para o círculo*. Considere a circunferência $c : x^2 + y^2 = 2x$, percorrida no sentido positivo (anti-horário), como na figura ao lado. Parametrize a curva c de duas maneiras: primeiro utilize o parâmetro t e, depois, o parâmetro θ. Calcule a integral da função xy ao longo da curva c, usando as duas parametrizações encontradas. [resp. 3π].

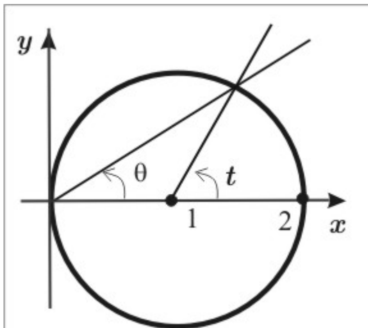

Fig. 4.1

4.1C *Um caminho não regular*. Seja γ o caminho dado por: $\vec{r}(t) = t\,\vec{i} + t^2 \operatorname{sen}(1/t)\,\vec{j}$, $0 < t \le 1$, e $\vec{r}(0) = \vec{0}$. Note que a coordenada y do caminho γ é:

$$y(t) = \begin{cases} t^2 \operatorname{sen}(1/t)\,, \text{ se } 0 < t \le 1 \\ 0, \text{ se } t = 0 \end{cases}$$

com derivada $y'(t) = 2t \operatorname{sen}(1/t) - \cos(1/t)$, para $0 < t \le 1$ e $y'(0) = 0$. Sendo esta derivada descontínua em $t = 0$, concluímos que o caminho não é regular.

4.1D Calcule o comprimento da hélice do Exercício 1.1(f). $\left[\text{resp. } 2\sqrt{2}\pi\right]$

4.1E Considere o caminho $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, sendo γ_1 descrito por $\vec{r}_1(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j},\ 0 \le t \le 1$ e γ_2 por $\vec{r}_2(t) = \vec{i} + \vec{j} + t\vec{k},\ 0 \le t \le 1$. Esboce o caminho c e verifique que o mesmo é simples e parcialmente regular Determine o vetor velocidade onde existir.

4.1F Considere o caminho $\gamma_1 : \vec{r}_1(t) = t\,\vec{i} + t^2\,\vec{j},\ 1 \le t \le 2$, e seja γ_2 o caminho definido por $\vec{r}_2(t) = \vec{r}_1(3-t),\ 1 \le t \le 2$. Esboce os gráficos de c_1 e c_2. Qual a relação entre esses dois caminhos?

4.2 Integral de Linha

2.2A Seja $f(x,y)$ uma função contínua sobre um caminho regular c de comprimento L. Se $|f(x,y)| \le M$, em todos os pontos (x,y) do caminho c, mostre que:

$$\left|\int_\gamma f(x,y)\,ds\right| \le ML.$$

4.2B Calcule as seguintes integrais de linha ao longo do caminho indicado:

(a) $\displaystyle\int_\gamma 2ydx - 3xdy\,;\ \gamma : x = 1-t,\ \ y = 5-t\,;\ 0 \le t \le 1$. [resp. $-15/2$]

(b) $\displaystyle\int_{(-1,1)}^{(1,1)} xydx - y^2dy\,;$ ao longo da parábola $y = x^2$.[resp. 0]

(c) $\displaystyle\int_{(3,-1)}^{(4,-2)} \frac{y}{x}dx - \frac{x}{y}dy\,;$ ao longo da reta $y = 2-x$. [resp. $\ln(4/9) - 2$]

(d) $\displaystyle\oint_{\partial D} ydx + 2xdy\,;\ D : x^2+y^2 \le 1,\ -y \le x \le y,\ y \ge 0$. [resp. $\pi/4$]

(e) $\displaystyle\int_\gamma xyds;\ \ c : x = t,\ \ y = t\,;\ 0 \le t \le 1$. [resp. $\sqrt{2}/3$]

(f) $\displaystyle\int_\gamma x^2ds;\ \ \gamma : x = \cos 2t,\ \ y = \operatorname{sen} 2t\,;\ 0 \le t \le 2\pi$. [resp. 2π]

(g) $\displaystyle\oint_c ydx + 2xdy\,;$ γ é o triângulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ e $(1,1)$. [resp.1/2]

(h) $\displaystyle\oint_\gamma \left(x^2 - y^2\right) ds;\ \ \gamma : x^2 + y^2 = 4$. [resp. 0]

(i) $\displaystyle\int_{(0,-1)}^{(0,1)} y^2dx + x^2dy\,;$ ao longo do semicírculo $x = \sqrt{1-y^2}$. [resp. 4/3]

(j) $\displaystyle\int_{(1,0)}^{(0,1)} \frac{ydx - xdy}{x^2+y^2}\,;$ ao longo da curva $x = \cos^3 t,\ \ y = \operatorname{sen}^3 t,\ 0 \le t \le \pi/2$. [resp. $-\pi/2$]

(k) $\displaystyle\oint_\gamma (ax+by)\,dx + (\alpha x + \beta y)\,dy\,;\ \ \gamma : x^2+y^2 = 4$. [resp. $4\pi(\alpha - b)$]

(l) $\displaystyle\oint_\gamma xy\,(3ydx + 7xdy)\,;\ \ \gamma : 9x^2 + 4y^2 = 36$. [resp. 0]

(m) $\oint_\gamma xydx + \left(y^2 - x^2\right) dy$; γ consiste dos arcos $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$, $0 \le x \le 1$. [resp. $-9/20$]

(n) $\int_\gamma (x + y + z)\, dx + (x - 2y + 3z)\, dy + (2x + y - z)\, dz$; γ é o caminho que liga a origem ao ponto $A\,(2, 3, 4)$, através de três segmentos retilíneos: o primeiro uma porção do eixo x, o segundo paralelo ao eixo y e o terceiro paralelo ao eixo z. [resp. 19]

4.2C Calcule $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\,\vec{r}$, nos seguintes casos:

(a) $\vec{F} = \left(x^2 + y^2\right) \vec{i} + 3xy^2\, \vec{j}$; γ é o círculo $x^2 + y^2 = 9$. [resp. $243\pi/4$]

(b) $\vec{F} = \left(3x^2 - 8y^2\right) \vec{i} + (4y - 6xy)\, \vec{j}$; γ é a fronteira da região $D : x + y \le 2,\ x \ge 0,\ y \ge 0$. [resp. 40/3]

(c) $\vec{F} = xy\,\vec{i} - y\,\vec{j} + \vec{k}$; γ é o segmento de reta ligando a origem ao ponto $A\,(1, 1, 1)$. [resp. 5/6]

(d) $\vec{F} = y^2\,\vec{i} + x^2\,\vec{j}$; γ é o arco da parábola $x = t,\ y = t^2,\ z = 0$; $1 \le t \le 2$. [resp. 137/10]

(e) $\vec{F} = z^2\,\vec{i} + x^2\,\vec{k}$; γ é o segmento de $(1, 0, 1)$ a $(2, 0, 1)$, seguido do segmento de $(2, 0, 1)$ a $(2, 0, 4)$. [resp. 13]

4.2D Considere as funções $P\,(x, y) = -\dfrac{y}{x^2 + y^2}$ e $Q\,(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$, definidas para $(x, y) \ne (0, 0)$ e seja D a região descrita por $0 < x^2 + y^2 \le R$.

(a) Mostre que $\oint_{\partial D} Pdx + Qdy = 2\pi$;

(b) Mostre que $\iint_D \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = 0$;

4.2E Calcule $\int_\gamma \dfrac{xdx + ydy}{x^2 + y^2}$, onde γ consiste do arco da parábola $y = x^2 - 1$, $-1 \le x \le 2$, seguido do segmento de reta que une os pontos $(2, 3)$ e $(-1, 0)$. [resp. 0]

4.2F Se $\vec{F} = P\,\vec{i} + Q\,\vec{j} + R\,\vec{k}$ e θ é o ângulo entre o campo $\vec{F}$ e $d\,\vec{r}$, mostre que:

$$\int_c \vec{F} \cdot d\,\vec{r} = \int_c \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2} \cos\theta ds.$$

4.2G Considere os caminhos $\gamma_1 : \vec{r}\,(t) = t\ \vec{i} + t^3\ \vec{j}$, $-1 \le t \le 1$ e $\gamma_2 : \vec{r}\,(\xi) = (1 - \xi)\ \vec{i} + (1 - \xi)^3\ \vec{j}$, $0 \le \xi \le 2$. Se $\vec{F}$ é um campo contínuo em uma região contendo esses caminhos, mostre que

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

De que forma pode-se generalizar esse fato?

4.3 O Teorema de Green no Plano

4.3A No Exercício 2.2 identifique as integrais de linha que podem ser calculadas diretamente com o Teorema de Green. O cálculo das integrais tornou-se mais simples? Qual dificuldade você enfrenta ao usar o Teorema de Green?

4.3B Com auxílio do Teorema de Green, calcule as seguintes integrais de linha:

(a) $\oint_\gamma (\operatorname{sen} x + 4xy)\, dx + \left(2x^2 - \cos y\right) dy = 0$; γ é um contorno simples fechado e regular [resp. 0];

(b) $\oint_\gamma \sqrt{x^2+y^2}dx + y\ln(x + \sqrt{x^2+y^2})dy$; γ é um contorno simples, regular e fechado, que não envolve a origem [resp. 0];

(c) $\oint_\gamma 2dx + \left(x^2 - y \operatorname{tg} y\right) dy$; $c : (x-1)^2 + y^2 = 1$. [resp. 2π] ;

(d) $\oint_\gamma P(x)\, dx + Q(y)\, dy$; γ é um círculo de raio r e $P(x)$ e $Q(y)$ são de funções classe C^1 na região delimitada pela curva c. [resp. 0];

(e) $\oint_\gamma e^x \operatorname{sen} y dx + e^x \cos y dy$; γ é a elipse $3x^2 + 8y^2 = 24$. [resp. 0]

(f) $\oint_\gamma x^2 dx + xydy$; γ é a cardióide $r = 1 + \cos\theta$, $0 \le \theta \le 2\pi$. [resp. 0]

4.3C Por que os resultados (a) e (b) do Exercício 2.4 não contradizem o Teorema de Green?

4.3D Seja D o anel descrito por $1 \le x^2 + y^2 \le 2$ e sejam $P(x,y)$ e $Q(x,y)$ funções de classe C^1, isto é, com derivadas parciais de primeira ordem contínuas, tais que $P_y = Q_x$ na região D. Quantos valores são possíveis para a integral de linha $\oint_\gamma Pdx + Qdy$, sendo γ uma curva simples fechada regular por partes contida em D? [resp. 3]

4.3E Considere uma curva c simples fechada e suave, orientada no sentido positivo, que não passa por $(0,0)$, e seja $\varphi(x,y) = \ln\left(x^2+y^2\right)$. Se $\vec{n}$ representa a normal exterior à curva c, mostre que a integral de linha $\oint_\gamma \nabla\varphi \cdot \vec{n} ds$ assume apenas os valores 0 e 4π, conforme a curva c envolva ou não a origem.

3.6 Considere o campo vetorial:

$$\vec{F}(x,y) = \frac{x^3+2}{x-1}\vec{i} + \frac{y}{(y-2)^3}\vec{j}$$

e sejam $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ e γ_4 os caminhos exibidos na figura ao lado. Sabendo que $\oint_{\gamma_3+\gamma_4} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 10$, calcule $\oint_{\gamma_1+\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

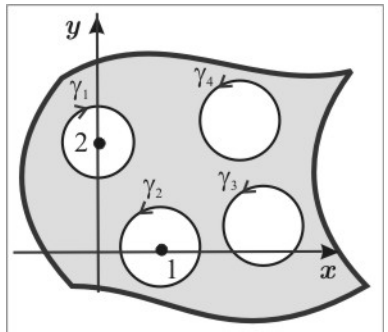

Fig. 4.2

Outras conseqüências do Teorema de Green

Nos exercícios 3.6 a 3.13, D representa uma região do plano xy com fronteira ∂D simples, fechada e regular por partes. A área da região D estamos representando por $A(D)$. Lembramos as fórmulas clássicas no caso bidimensional:

$$\text{Green Diferencial:} \quad \oint_{\partial D} Pdx + Qdy = \iint_D (Q_x - P_y)\, dA$$

$$\text{Green Vetorial:} \quad \oint_{\partial D} (\vec{F} \cdot \vec{T}) ds = \iint_D (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{k} dA$$

$$\text{Gauss:} \quad \oint_{\partial D} (\vec{F} \cdot \vec{n}) ds = \iint_D \nabla \cdot \vec{F} dA$$

onde $\nabla \cdot \vec{F} = P_x + Q_y$ é o *divergente*, $\nabla \times \vec{F} = (Q_x - P_y)\vec{k}$ é o *rotacional* do campo $\vec{F} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ e $\vec{\eta}$ é a normal exterior à fronteira ∂D.

4.3F Verifique o Teorema da Divergência no plano para os seguintes dados:

(a) $\vec{F}(x,y) = 3y\,\vec{i} - 2x\,\vec{j}$; D é a região delimitada por $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$

(b) $\vec{F}(x,y) = x^2\,\vec{i} + y^2\,\vec{j}$; D é a região delimitada por $4x^2 + 25y^2 = 100$.

4.3G Seja $f(x,y)$ uma função de classe C^2, isto é, com derivadas parciais de segunda ordem contínuas, em uma região D. Se $\Delta f = 0$ em D, use a Fórmula de Green e deduza que:

$$\int_{\partial D} f_y dx - f_x dy = 0.$$

4.3H Nas condições do exercício precedente e considerando v de classe C^1, mostre que:

$$\int_{\partial D} (f_x dy - f_y dx)\, v = \iint_D (v_x f_x + v_y f_y)\, dxdy.$$

4.3I Se x_0 e y_0 representam as coordenadas do centróide da região D, com densidade de massa $\rho \equiv 1$, mostre que:

$$2x_0 A(D) = \oint_{\partial D} x^2 dy \quad \text{e} \quad y_0 A(D) = \oint_{\partial D} xy dy\,.$$

4.3J Considerando $\vec{F} = \nabla u$ na Fórmula de Gauss, sendo u de classe C^2, deduza a relação:

$$\iint_D \Delta u \, dxdy = \oint_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \vec{\eta}} ds.$$

4.3K Com auxílio da Regra do Produto para derivação, obtenha a seguinte propriedade para o divergente:

$$\nabla \cdot (v \nabla u) = v \Delta u + \nabla u \cdot \nabla v.$$

Agora, considere na Fórmula de Gauss $\vec{F} = v\nabla u$ e deduza a identidade:

$$\text{Identidade de Green:} \quad \iint_D v\Delta u \, dxdy + \iint_D \nabla u \cdot \nabla v \, dxdy = \oint_{\partial D} v \frac{\partial u}{\partial \vec{\eta}} ds.$$

4.3L Se $\Delta u = 0$ na região D, usando $v = u$ na Identidade de Green, mostre que:

$$\iint_D |\nabla u|^2 \, dxdy = \oint_{\partial D} u \frac{\partial u}{\partial \vec{\eta}} ds.$$

4.3M Seja $f(x, y)$ um campo de classe C^1 na região D. Considerando na Fórmula de Gauss $\vec{F} = f(x, y)\vec{i}$, deduza que:

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial x} dxdy = \oint_{\partial D} f \eta_1 ds,$$

onde $\vec{\eta} = \eta_1 \vec{i} + \eta_2 \vec{j}$ é a normal exterior à fornteira ∂D.

4.3N Um fio tem o formato do círculo $x^2 + y^2 = a^2$. Determine sua massa e o momento de inércia em torno de um diâmetro, se a densidade no ponto (x, y) do fio é $\rho(x, y) = |x| + |y|$. $\left[\text{resp. } m = 8a^2,\ I_L = 4a^4\right]$

4.3O Seja $\vec{\eta} = \eta_1 \vec{i} + \eta_2 \vec{j}$ o campo de vetores normais exteriores a uma curva simples fechada e regular γ. Use a Fórmula de Gauss com $\vec{F} = \vec{i}$ e $\vec{F} = \vec{j}$ e deduza que:

$$\oint_\gamma \eta_1(x, y) \, ds = \oint_\gamma \eta_2(x, y) \, ds = 0$$

4.4 Campos Conservativos

4.4A Seja $\varphi(x,y,z)$ uma função de classe C^1 em uma região contendo uma curva regular γ com origem no ponto A e extremidade no ponto B. Mostre que:

$$\int_\gamma \nabla\varphi \cdot d\vec{r} = \varphi(B) - \varphi(A).$$

4.4B Se φ e ψ são duas funções potenciais de um mesmo campo vetorial $\vec{F}$, em uma região D, mostre que existe uma constante C tal que $\varphi(x,y,z) = \psi(x,y,z) + C$ em qualquer ponto (x,y,z) da região D.

4.4C Considere o campo de forças $\vec{F}(x,y,z) = y\,\vec{i} + z\,\vec{j} + yz\,\vec{k}$.

(a) Verifique que $\vec{F}$ não é conservativo;

(b) Qual o trabalho realizado pelo campo $\vec{F}$ para mover uma partícula do ponto $A(1,0,1)$ ao ponto $B(-1,0,e^\pi)$ ao longo da curva $\vec{r}(t) = \cos t\,\vec{i} + \operatorname{sen} t\,\vec{j} + e^t\vec{k}$? [resp. $\left(2e^{2\pi} - 5e^\pi - 5\pi - 3\right)/10$]

4.4D Um *campo radial* de forças no plano é descrito por $\vec{F}(x,y) = f(r)\,\vec{r}$, onde $\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ e $r = \|\vec{r}\|$. Admitindo f de classe C^1, verifique que um tal campo é conservativo e calcule a integral $\int_\gamma f(r)\,\vec{r}\cdot d\vec{r}$ sobre o semicírculo $\gamma : x^2 + y^2 = 1,\ \ y \geq 0$. [resp. 0. Note que ao longo do semicírculo tem-se: $\vec{r}\cdot d\vec{r} = 0$]

4.4E Encontre uma função potencial para o campo $\vec{F}$ definido em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$ por $\vec{F}(\vec{r}) = r^p\,\vec{r}$. $\Big[$resp. $\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{p+2} r^{p+2}$, se $p \neq -2$ e $\varphi(\vec{r}) = \ln r + C$, se $p = -2\Big]$

4.4F Mostre que as funções $P(x,y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$ e $Q(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ satisfazem a relação $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, para $(x,y) \neq (0,0)$, mas o campo $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\,\vec{i} + Q(x,y)\,\vec{j}$ não é conservativo em região alguma contendo a origem. (veja o Exercício 4.2D)

4.4G Verifique se o campo (respectivamente a forma) é conservativo (respectivamente exata) e determine uma função potencial em caso afirmativo.

(a) $\vec{F}(x,y) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$. $\left[\text{resp. } \varphi(x,y) = \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right) + C\right]$

(b) $\vec{F}(x,y) = 3x^2y\,\vec{i} + x^3\,\vec{j}$. $\left[\text{resp. } \varphi(x,y) = x^3y + C\right]$

(c) $\vec{F}(x,y) = (2xe^y + y)\,\vec{i} + \left(x^2e^y + x - 2y\right)\vec{j}$. $\left[\text{resp. } \varphi(x,y) = x^2e^y + xy - y^2 + C\right]$

(d) $\vec{F}(x,y,z) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$. $\left[\text{resp. } \varphi(x,y) = \frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right) + C\right]$

(e) $\vec{F}(x,y) = \left(y^2 - 3x\right)\vec{i} + (2xy + \cos y)\,\vec{j}$. $\left[\text{resp. } \varphi(x,y) = xy^2 - \frac{3}{2}x^2 + \operatorname{sen} y + C\right]$.

(f) $(\operatorname{sen} y - y\operatorname{sen} x + x)\,dx + (\cos x + x\cos y + y)\,dy$.

$\left[\text{resp. } \varphi(x,y) = x\operatorname{sen} y + y\cos x + \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right) + C\right]$

(g) $[\operatorname{sen}(yx) + xy\cos(xy)]\,dx + \left[x^2\cos(xy)\right]dy$. $[\text{resp.}\varphi(x,y) = x\operatorname{sen} xy + C]$

(h) $(x+z)\,dx - (y+z)\,dy + (x-y)\,dz$. $\left[\text{resp. } \varphi(x,y,z) = (x-y)\,z + \frac{1}{2}\left(x^2-y^2\right) + C\right]$

(i) $2xy^3dx + x^2y^3dy + 3x^2yz^2dz$. [resp. não conservativo]

(j) $3y^4z^2dx + 4x^3y^2dy - 3x^2y^2dz$. [resp. não conservativo]

(k) $\left(2x^2+8xy^2\right)dx + \left(3x^3y - 3xy\right)dy - \left(4y^2z^2 + 2x^3z\right)dz$. [resp. não conservativo]

(l) $\left(y^2\cos x + z^3\right)dx - (4 - 2y\operatorname{sen} x)\,dy + \left(3xz^2+2\right)dz$.

$\left[\text{resp. } \varphi(x,y,z) = y^2\operatorname{sen} x + xz^3 - 4y + 2z + C\right]$

(m) $\left(4xy - 3x^2z^2 + 1\right)dx + \left(2x^2+2\right)dy - \left(2x^3z + 3z^2\right)dz$.

$\left[\text{resp. } \varphi(x,y,z) = x + 2x^2y - x^3z^2 + 2y - z^3 + C\right]$

(n) $(e^x\operatorname{sen} z + 2yz)\,dx + (2xz+2y)\,dy + \left(e^x\cos z + 2xy + 3z^2\right)dz$.

$\left[\text{resp. } \varphi(x,y,z) = e^x\operatorname{sen} z + 2xyz + y^2 + z^3 + C\right]$

4.4H Em cada caso abaixo calcule a integral de linha indicada, observando que a mesma independe do caminho.

(a) $\displaystyle\int_{(0,-1)}^{(1,2)} (2y - x)\,dx + \left(2x + y^2\right)dy$. [resp. 13/2]

(b) $\displaystyle\int_{(-2,0)}^{(4,\pi/4)} \operatorname{tg} y\,dx + x\sec^2 y\,dy$. [resp. 4]

(c) $\displaystyle\int_{(0,2)}^{(1,0)} \frac{2ydx + 2xdy}{(xy+1)^2}$. [resp. 0]

(d) $\displaystyle\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} (y+z)\,dx + (x+z)\,dy + (x+y)\,dz$. [resp. 3]

(e) $\displaystyle\int_{(2,0,1)}^{(0,\pi,3)} (e^x\operatorname{sen} y + yz)\,dx + (e^x\cos y + z\operatorname{sen} y + xz)\,dy + (xy - \cos y)\,dz$. [resp. 4]

(f) $\displaystyle\int_\gamma e^x\operatorname{sen} y\,dx + e^x\cos y\,dy$; γ é uma curva suave da origem ao ponto $(1, \frac{\pi}{2})$. [resp. e]

4.4I Se $f(t)$ é uma função de classe C^1 no intervalo $a \le t \le b$, verifique em que região do plano xy o campo vetorial $\vec{F}(x,y) = yf(xy)\,\vec{i} + xf(xy)\,\vec{j}$ é conservativo. [resp. em qualquer região contida em $D : a \le xy \le b$]

4.4J Supondo que α e β são constantes, u e v são campos escalares e $\vec{F}$ e $\vec{G}$ são campos vetoriais, deduza as seguintes relações do cálculo diferencial:

(a) $\nabla(\alpha u + \beta v) = \alpha \nabla u + \beta \nabla v$ (b) $\nabla(uv) = v\nabla u + u\nabla v$

(c) $\nabla(u/v) = \left(1/v^2\right)[v\nabla u - u\nabla v]$ (d) $\operatorname{div}(\alpha \vec{F} + \beta \vec{G}) = \alpha \operatorname{div} \vec{F} + \beta \operatorname{div} \vec{G}$

(e) $\operatorname{div}(\operatorname{rot}(\vec{F})) = 0$ (f) $\operatorname{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot \operatorname{rot}(\vec{F}) - \vec{F} \cdot \operatorname{rot}(\vec{G})$

(g) $\operatorname{rot}(u\vec{F}) = u \operatorname{rot}(\vec{F}) + \nabla u \times \vec{F}$ (h) $\operatorname{rot}(\alpha \vec{F} + \beta \vec{G}) = \alpha \operatorname{rot}(\vec{F}) + \beta \operatorname{rot}(\vec{G})$

(i) $\operatorname{div}(v\nabla u) = v\Delta u + \nabla u \cdot \nabla v$ (j) $\operatorname{div}(u\vec{F}) = \nabla u \cdot \vec{F} + u \operatorname{div}(\vec{F})$.

Usando (e) conclua que não existe um campo vetorial $\vec{F}$ com rotacional $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

4.5 Trabalho, Massa, Centro de Massa, ...

4.5A Utilizando a fórmula $A(D) = \oint_{\partial D} xdy$, calcule a área das seguintes regiões:

(a) D é a região limitada pelo eixo y, pelas retas $y = 1$ e $y = 3$ e pela parábola $y^2 = x$. [resp. 26/3]

(b) D é a região limitada pela elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. [resp. πab]

(c) D é o triangulo com vértices nos pontos $(2,0)$, $(1,3)$ e $(-1,1)$. [resp. 4]

4.5B Encontre a massa de um fio cujo formato é aquele da curva interseção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ com o plano $x + y + z = 0$, se a densidade no ponto (x,y,z) do fio é $\rho(x,y,z) = x^2$. [resp. $2\pi/3$]

4.5C Qual o trabalho realizado pelo campo de forças $\vec{F} = (2x + 3y)\,\vec{i} + xy\,\vec{j}$, para levar uma partícula da origem até o ponto $A(1,1)$, ao longo do círculo $x^2 + (y-1)^2 = 1$? [resp. $(22 - 3\pi)/6$]

4.5D A força gravitacional $\vec{F}$ atuando em uma partícula de massa m, próxima da superfície da terra, é dada por $\vec{F} = -mg\,\vec{k}$. Mostre que o trabalho W realizado pela força $\vec{F}$ sobre a partícula, quando essa se move verticalmente de uma altura H a uma altura h, é $W = mg(H - h)$.

4.5E Um fio uniforme com densidade constante $\rho = 1$ tem o formato da hélice do Exercício 1.1(f). Determine seu centro de massa e seu momento de inércia com relação ao eixo $L : x = z,\ y = 1$. [resp. $C_M(0,0,\pi)$; $I_L = \frac{\sqrt{2}}{2}(7\pi + 8\pi^3/3)$]

4.5F Calcule a massa m e o momento de inércia I_z da hélice do Exercício 1.1(f), se a densidade no ponto (x, y, z) da mola é $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. [resp. $m = \sqrt{2}\left(2\pi + 8\pi^3/3\right)$; $I_z = m$]

4.5G Para o campo $\vec{F}(x, y) = -\dfrac{y}{x^2 + y^2}\,\vec{i} + \dfrac{x}{x^2 + y^2}\,\vec{j}$, mostre que $\operatorname{div}(\vec{F}) = 0$ e $\operatorname{rot}(\vec{F}) = \vec{0}$ em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Dê exemplo de um campo vetorial $\vec{F}$ para o qual $\operatorname{rot}(\vec{F}) = \vec{0}$ e $\operatorname{div}(\vec{F}) = 5$. [resp. $\vec{F} = 5x\,\vec{i}$]

4.5H Se $\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$, $r = \|\vec{r}\|$ e $f(t)$ é uma função real derivável, mostre que $\nabla f(r) = f'(r)\,\dfrac{\vec{r}}{r}$ e $\operatorname{rot}(f(r)\,\vec{r}) = \vec{0}$. Encontre os inteiros k de modo que $\operatorname{div}(r^k\,\vec{r}) = 0$. [resp. $k = -3$]

4.5I Use o exercício precedente e calcule $\nabla(r)$, $\nabla(1/r)$ e $\nabla(\ln r)$ [resp. $\dfrac{\vec{r}}{r}, -\dfrac{\vec{r}}{r^3}, \dfrac{\vec{r}}{r^2}$]

4.5J Um fio uniforme de massa m tem o formato de um semicírculo de raio a. Mostre que o momento de inércia em torno do diâmetro é $ma^2/2$ e que o centróide jaz no eixo de simetria a uma distância $2a/\pi$ do centro.

4.5K Calcule a massa e o momento de inércia I_z do fio descrito $\vec{r}(t) = t\,\vec{i} + 2t\,\vec{j} + 3t\,\vec{k}$, $0 \le t \le 1$, cuja densidade linear é $\delta(x, y, z) = x + y + z$. [resp.]

4.6 Área de uma Superfície

4.6A Calcule a área da superfície S em cada caso:

(a) S é uma esfera de raio R. $\left[\text{resp. } 4\pi R^2\right]$

(b) S é a porção do plano $x + y + z = a$, $a > 0$, interna ao cilindro $x^2 + y^2 = a^2$. $\left[\text{resp. } \pi a^2\sqrt{3}\right]$

(c) S é a porção do parabolóide $x^2 + y^2 + z = a^2$, delimitada pelo cilindro vazado $1 \le x^2 + y^2 \le 9$, $x \ge 0$, $y \ge 0$. $\left[\text{resp. } \left(37\sqrt{37} - 5\sqrt{5}\right)\pi/24 \simeq 30.71\right]$

(d) S é a porção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, interna ao cilindro $x^2 + y^2 = ay$. [resp. $(2\pi - 4)\,a^2$]

(e) S é a porção do cilindro $x^2 + z^2 = a^2$, delimitada por $y^2 = a(x + a)$. $\left[\text{resp. } 8a^2\sqrt{2}\right]$

(f) S é a porção do cone $z^2 = x^2 + y^2$, $z \ge 0$, interna ao cilindro $x^2 + y^2 = 2ax$. $\left[\text{resp. } \pi a^2\sqrt{2}\right]$

(g) S é a porção do parabolóide $x^2 + z^2 = 2ay$, $a > 0$, abaixo do plano $y = a$. [resp. $(3\sqrt{3} - 1)2\pi a^2/3$]

(h) S é a porção do cilindro $y^2 + z^2 = 16$, compreendida acima da região triangular $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 2 - x$. $\left[\text{resp. } 8\sqrt{3} + 4\pi/3 - 16\right]$

(i) S é a porção do plano $3x+2y+z=7$ no primeiro octante. [resp. $49\sqrt{14}/12$]

(j) S é a porção do cilindro parabólico $z^2=8x$, compreendida acima da região $0\leq x\leq 1$, $0\leq y\leq \sqrt{x}$. [resp. $\frac{2}{3}(3\sqrt{3}-2\sqrt{2})$]

(k) S é a porção do cilindro $y^2+z^2=4$, interna ao cilindro parabólico $x^2=2y+4$ e acima do plano $z=0$. $\left[\text{resp. } 16\sqrt{2}\right]$

(l) S é o triângulo com vértices $A(2,0,0)$, $B(0,3,0)$ e $C(0,0,2)$. [resp. $\sqrt{22}$]

(m) S é a porção do cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$ interna ao cilindro $x^2+y^2=2x$ e externa a $x^2+y^2=1$. [resp. $\pi\sqrt{2}/3+\sqrt{6}/2$]

4.6B Seja S a superfície de um paralelogramo do $\mathbb{R}^3$ e sejam S_1, S_2 e S_3 suas projeções nos planos coordenados. Verifique que $A(S)=\sqrt{A(S_1)^2+A(S_2)^2+A(S_3)^2}$.

6.4 Uma edificação é erguidano formato da figura ao lado, onde a fachada é descrita pela superfície cilíndrica $xy=1$. Usando as aproximações: $\ln 2=0.7$ e $\int_{0.5}^{2}\sqrt{1+t^{-4}}dt=2.26$, calcule a área total da edificação. [resp. 19.32]

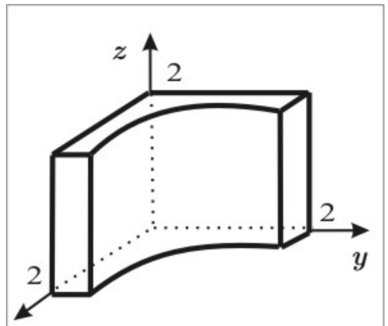

Fig. 4.3

4.6C Deduza as fórmulas para as áreas de um cone e de um cilindro (circular reto) de raio a e altura h. $\left[\text{resp. } \pi a\sqrt{a^2+h^2} \text{ e } 2\pi ah\right]$.

4.7 Cálculo de Integrais de Superfície

4.7A Calcule as seguintes integrais de superfícies:

(a) $\displaystyle\iint_S x\,dS$; $S: x^2+y^2=R^2$, $-1\leq z\leq 1$. [resp. 0]

(b) $\displaystyle\iint_S z\sqrt{x^2+y^2}\,dS$; S é a porção da esfera $x^2+y^2+z^2=9$, compreendida entre os planos $z=1$ e $z=2$. $\left[\text{resp. } 2\pi(16\sqrt{2}-5\sqrt{5})\right]$

(c) $\displaystyle\iint_S \vec{F}\cdot\vec{\eta}\,dS$; $S: x^2+y^2+z^2=R^2$, $x\geq 0$ e $\vec{F}=y\,\vec{j}+z\,\vec{k}$. $\left[\text{resp. } 4\pi R^3/3\right]$

(d) $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{\eta} dS$; $S : x^2 + y^2 = R^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $0 \leq z \leq a$ e $\vec{F} = \operatorname{sen} z\, \vec{i} + xy\, \vec{j} - \cos z\, \vec{k}$. [resp. $(1 - \cos a)\, R + aR^3/3$]

(e) $\iint_S xy dS$; $S : x^2 + y^2 = 2z$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. $\left[\text{resp. } (9\sqrt{3} - 8\sqrt{2} + 1)/15\right]$

(f) $\iint_S \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dS$; $S : x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. $\left[\text{resp. } 4\pi R^4\right]$

(g) $\iint_S z^2 dS$; S é a porção do cilindro $x^2 + y^2 = 4$, compreendida entre os planos $z = 0$ e $z = x + 3$. [resp. 60π]

(h) $\iint_S x dS$; S é a porção do plano $x + y + z = 1$ no primeiro octante. $\left[\text{resp. } \sqrt{3}/6\right]$

(i) $\iint_S x dS$; S é a fronteira da região delimitada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e pelos planos $z = 0$ e $z = x + 2$. [resp. π]

(j) $\iint_S x^2 dS$; S é a porção do plano $z = x$, interna ao cilindro $x^2 + y^2 = 1$. $\left[\text{resp. } \pi\sqrt{2}/4\right]$

(k) $\iint_S x^2 dS$; $S : x^2 + y^2 = z^2$, $1 \leq z \leq 2$. $\left[\text{resp. } 15\pi\sqrt{2}/4\right]$

(l) $\iint_S (x + y)\, dS$; S é a porção do plano $2x + 3y + z = 6$ no primeiro octante. [resp. $5\sqrt{14}$]

(m) $\iint_S \frac{xz}{y} dS$; S é a porção do cilindro $x = y^2$, situada no primeiro octante, entre os planos $z = 0$, $z = 5$, $y = 1$ e $y = 4$. $\left[\text{resp. } \frac{125}{24}\left(13\sqrt{65} - \sqrt{5}\right)\right]$

4.7B Considere o campo $\vec{F} = x^2\, \vec{i} + y^2\, \vec{j} + z^2\, \vec{k}$ e compare os valores das integrais: $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}_S dS$ e $\iiint_\Omega \operatorname{div}(\vec{F}) dV$, onde S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ e Ω é a *bola* do $\mathbb{R}^3$ $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ (resp. 0).

4.8 Fórmulas de Gauss e Stokes. Aplicações

4.8A Com auxílio do Teorema de Stokes calcule $\oint_c \vec{F} \cdot d\vec{r}$, sendo c o bordo da superfície S :

(a) $\vec{F} = y^2\, \vec{i} + z^2\, \vec{j} + x^2\, \vec{k}$; S é a porção do plano $x + y + z = 1$, situada no primeiro octante. [resp. -1]

(b) $\vec{F} = 3y\, \vec{i} - xz\, \vec{j} + yz^2\, \vec{k}$; S é a superfície do parabolóide $2z = x^2 + y^2$, situada abaixo do plano $z = 2$. [resp. 20π]

(c) $\vec{F} = 2y\,\vec{i} + z\,\vec{j} + 3\,\vec{k}$; S é a parte do parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$, interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 1$. [resp. -2π]

(d) $\vec{F} = z\,\vec{i} + x\,\vec{j} + y\,\vec{k}$; S é o hemisfério $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. [resp. π]

(e) $\vec{F} = x^2\,\vec{i} + y^2\,\vec{j} + z^2\,\vec{k}$; S é o cone $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \le z \le 1$. [resp. 0]

4.8B Com auxílio do Teorema de Stokes calcule $\displaystyle\int_c P dx + Q dy + R dz$:

(a) $\displaystyle\int_\gamma y dx + z dy + x dz$; $\gamma : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \ x + y + z = 0$. $\big[$resp. $-\sqrt{3}\pi R^2\big]$

(b) $\displaystyle\int_\gamma (y + z)\, dx + (x + z)\, dy + (x + y)\, dz$; $\gamma : x^2 + y^2 = 2y, \ y = z$. [resp. 0]

(c) $\displaystyle\int_\gamma \left(y^2 - z^2\right) dx + \left(z^2 - x^2\right) dy + \left(x^2 - y^2\right) dz$; γ é a curva interseção da fronteira do cubo $0 \le x \le a$, $0 \le y \le a$, $0 \le z \le a$, com plano $x + y + z = 3a/2$. $\big[$resp. $-9a^3/2\big]$

(d) $\displaystyle\int_\gamma x^3 dz$; γ é o bordo da superfície $S : z = y + 4$; $1 \le x^2 + y^2 \le 4$. [resp. $45\pi/4$]

(e) $\displaystyle\int_\gamma y dx - x^2 dy + 5 dz$; γ é o bordo da superfície $S : \vec{r}\,(u, v) = u\ \vec{i} + v\ \vec{j} + \left(1 - u^2\right)\ \vec{k}, \ u \ge 0, \ v \ge 0, \ u + v \le 1$. [resp. $-5/6$]

4.8C Calcule o fluxo do campo $\vec{F}$ através da superfície S e, quando possível, use o Teorema da Divergência de Gauss para comprovar o resultado:

(a) $\vec{F} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$; S é a superfície do sólido limitado pelo hemisfério $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ e pelo plano $z = 0$. $\big[$resp. $2\pi a^3\big]$

(b) $\vec{F} = 2\,\vec{i} + 5\,\vec{j} + 3\,\vec{k}$; S é a porção do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ interna ao cilindro $x^2 + y^2 = 1$. [resp. -3π]

(c) $\vec{F} = x\,\vec{i} - y\,\vec{j}$; S é a parte do primeiro octante, limitada pelos três planos coordenados e pela esfera de equação $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. [resp. 0]

(d) $\vec{F} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$; S é a fronteira do sólido no primeiro octante limitado pelos planos $x = 1, \ y = 2$, e $3x + 2y + z = 12$. [resp. 51]

4.8D Seja S a superfície descrita por: $\vec{X}\,(u, v) = u\vec{i} + v\vec{j} + \left(2 - u^2 + v^2\right)\vec{k}, \ u^2 + v^2 \le 1$, e considere o campo $\vec{F} = y\vec{i} + (x + y)\,\vec{k}$. Calcule o fluxo de rot$(\vec{F})$ através de S de duas maneiras: primeiro por um cálculo direto e, depois, usando a Fórmula de Stokes. [resp. $-\pi$]

4.8E Seja $\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ o vetor posição do ponto $P(x,y,z)$ e seja $r = \|\vec{r}\|$. Verifique que o fluxo do campo $\vec{F} = \dfrac{\vec{r}}{r^3}$ através de uma superfície simples fechada regular S que não contenha a origem é igual a zero. Qual seria o fluxo do campo $\vec{F}$, se a superfície S contivesse a origem no seu interior? [resp. 4π]

4.8F Com a notação do exercício precedente e admitindo que Ω representa uma região compacta do $\mathbb{R}^3$ delimitada por uma superfície simples fechada e regular S (por exemplo uma esfera), use o Teorema da Divergência de Gauss e verifique a relação:

$$\iint_S r\,\vec{r}\cdot\vec{n}_S\,dS = 4\iiint_\Omega r\,dV.$$

4.8G Use a Fórmula de Gauss e estabeleça as seguintes identidades:

(a) $\displaystyle\iiint_\Omega (v\Delta u + \nabla u\cdot\nabla v)\;dV = \iint_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial\vec{n}_S}\,dS.$

(b) $\displaystyle\iiint_\Omega (v\Delta u - u\Delta v)\;dV = \iint_{\partial\Omega} (v\frac{\partial u}{\partial\vec{n}_S} - u\frac{\partial v}{\partial\vec{n}_S})dS.$

(c) $\displaystyle vol\,(\Omega) = \tfrac{1}{3}\iint_{\partial\Omega} \|\vec{r}\|\cos(\vec{r},\vec{n}_S)\;dS.$

4.8H Se $\cos\alpha, \cos\beta$ e $\cos\gamma$ representam os co-senos diretores da normal exterior à superfície S, use o Teorema de Gauss e calcule as seguintes integrais de superfícies:

(a) $\displaystyle\iint_S (xy\cos\alpha + yz\cos\beta + xz\cos\gamma)\,dS\,;$ S é a esfera $x^2+y^2+z^2 = R^2$. [resp. 0]

(b) $\displaystyle\iint_S x^2y^2z^2(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)\,dS\,;$ S é a fronteira do cubo $0 \le x \le a$, $0 \le y \le a$, $0 \le z \le a$. [resp. $a^8/3$]

4.8I Uma curva regular c no plano xz, de equação cartesiana $z = f(x)$, $a \le x \le b$, gira em torno do eixo z descrevendo uma superfície S. Deduza a *Fórmula de Pappus*: $A(S) = 2\pi Lh$, onde L é o comprimento da curva c e h é a distância do centróide de c ao eixo de rotação.

4.8J Em coordenadas cilíndricas uma superfície S é descrita pela equação $z = G(r,\theta)$, $(r,\theta) \in D$. Mostre que:

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + G_r^2 + \frac{1}{r^2}G_\theta^2}\;r dr d\theta.$$

4.8K Mostre que em coordenadas cilíndricas, a equação $z = G(r)$, $a \le r \le b$, $0 \le \theta \le 2\pi$, representa uma superfície de revolução cuja área é:

$$A = 2\pi \int_a^b \sqrt{1 + G_r^2}\ r dr.$$

4.8L Calcule a área do cone obtido por rotação da reta $y = 3x + 2$, $0 \le x \le 3$, $z = 0$, em torno do eixo x. $\left[\text{resp. } 39\pi\sqrt{10}\right]$

4.8M Calcule o momento de inércia da superfície homogênea S em torno do eixo indicado. Em cada caso admita que a densidade superficial de massa é $\rho \equiv 1$.

(a) S é a porção do cilindro $x^2 + y^2 = 2x$, que jaz entre as folhas do cone $x^2 + y^2 = z^2$; Eixo x. [resp. 1024/45]

(b) S é a superfície do tetraedro com vértices $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$ e $D(0,0,0)$; Eixo y. $\left[\text{resp. } (2+\sqrt{3})/6\right]$

(c) S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$; Eixo z. $\left[\text{resp. } 8\pi R^4/3\right]$

(d) S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$; Eixo é a reta $x = y$, $z = 0$. $\left[\text{resp. } 8\pi R^4/3\right]$

4.8N Encontre o centróide de cada superfície S dada abaixo. Como no exercício precedente, admita que a densidade superficial de massa é $\rho \equiv 1$.

(a) S é o hemisfério $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. [resp. $C(0,0,R/2)$]

(b) S é a porção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ que jaz no interior do cone $z^2 = x^2 + y^2$, $z \ge 0$. [resp. $C(0,0,\dfrac{2+\sqrt{2}}{4})$]

(c) S é a porção do hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $y \ge 0$, externa ao cilindro $x^2 + y^2 = 2$. [resp. $C_M(0, \frac{2+\sqrt{2}}{2}, 0)$]

4.8O Uma concha esférica homogênea de raio a é cortada pela folha de um cone circular reto cujo vértice está no centro da esfera. Se o ângulo do vértice do cone é α, $0 < \alpha < \pi$, qual o centro de massa da porção da concha que jaz no interior do cone? [resp. sobre o eixo do cone, distante $\dfrac{a(1-\cos\alpha)}{4[1-\cos(\alpha/2)]}$ do centro da esfera]

4.8P Calcule o potencial eletrostático $\varphi(x,y,z)$ no ponto $A(0,0,z)$ devido a uma distribuição uniforme de carga elétrica, com densidade ρ, no disco $x^2 + y^2 \le a^2$. Qual o campo elétrico $\vec{E}$ no ponto A? [resp. $\varphi = 2\pi\rho\left(\sqrt{a^2+z^2}-|z|\right)$; $\vec{E} = -\nabla\varphi = 2\pi\rho z\left(\dfrac{1}{|z|}-\dfrac{1}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)\vec{k}$]

4.8Q No exercício precedente qual seria o potencial eletrostático e o campo elétrico no ponto A, se a densidade no ponto (x,y) do disco fosse $\rho(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$? Use os resultados:

$$\int \frac{dr}{\sqrt{r^2+z^2}} = \ln\left|r+\sqrt{r^2+z^2}\right|; \quad \int \sqrt{r^2+z^2}\,dr = \tfrac{r}{2}\sqrt{r^2+z^2} + \tfrac{z^2}{2}\ln\left|r+\sqrt{r^2+z^2}\right|,$$

e encontre as seguintes expressões para o potencial e o campo elétrico:

$$\varphi = \pi z^2\left[\frac{a}{z}\sqrt{1+(a/z)^2} - \ln\left(\frac{a}{z}+\sqrt{1+(a/z)^2}\right)\right]$$

$$\vec{E} = 2\pi z\left[\ln\left(\frac{a}{z}+\sqrt{1+(a/z)^2}\right) - \frac{a}{z}\sqrt{1+(a/z)^2}\right]\vec{k}$$

4.8R Calcule o campo eletrostático na origem devido a uma distribuição uniforme de carga sobre o cilindro $x^2+y^2=R^2$, $0 \le z \le a$. [resp. $\vec{E} = 2\pi\rho\dfrac{\sqrt{R^2+a^2}-R}{\sqrt{R^2+a^2}}\vec{k}$]

4.8S Qual o potencial eletrostático no ponto $(0,0,z)$, devido a uma distribuição uniforme de carga sobre o hemisfério $z = \sqrt{R^2-x^2-y^2}$? [resp. $\frac{2\pi\rho R}{z}(\sqrt{R^2+z^2}-R+z)$]

4.8T Considere uma distribuição uniforme de carga elétrica sobre uma esfera S de raio a. Mostre que o campo elétrico num ponto do eixo z interior a S é zero. Qual o campo elétrico nos pontos do eixo z exteriores à esfera S ? [resp. $\vec{E}(0,0,z) = \dfrac{4\pi a^2\rho}{z^2}\vec{k}$. Note que o fenômeno ocorre como se toda carga estivesse concentrada no centro da esfera]

4.8U Mostre que $\iint_S \left(x^2+y^2\right)(x\,\vec{i}+y\,\vec{j})\cdot\vec{\eta}\,dS = 4I_z$, onde I_z representa o momento de inércia, com relação ao eixo z, do sólido com densidade de massa $\rho \equiv 1$, delimitado por S.

4.8V Seja S a porção do cilindro $x^2+y^2 = 2ax,\ a>0,\ 0\le z\le 1$, que jaz entre os planos $x=2a$ e $x=b,\ 0<b<2a$. Admita a densidade constante ρ_0 e calcule: (a) a massa de S; e (b) o momento de inércia I_z de S. [resp. (a) $2a\rho_0\,\text{arcsen}(\frac{1}{a}\sqrt{2ab-b^2})$; (b) $4a^2\rho_0(a+\sqrt{2ab-b^2})$.]

4.8W Dada uma superfície S de equação cartesiana $\varphi(x,y,z)=0,\ (y,z)\in D$, φ de classe C^1, com $\varphi_x \neq 0$, mostre que:

(a) $\iint_S f(x,y,z)\,dS = \iint_D \sqrt{\varphi_x^2+\varphi_y^2+\varphi_z^2}\;\dfrac{f(x,y,z)}{|\varphi_x|}dydz$;

(b) $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}_S\,dS = \iint_D (\vec{F}\cdot\nabla\varphi)\dfrac{1}{|\varphi_x|}dydz$.