Universidade Federal da Paraiba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Disciplina: Cálculo Diferencial e Integral III
Prof. Milton

2^a Lista de Exercicios

1) Em cada um dos exercícios abaixo calcular a integral de linha do campo vetorial f ao longo do caminho indicado:

a) $\int_C (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$ sendo C o arco de parábola $y = x^2$ que une os pontos $(-2, 4)$ e $(1, 1)$.

b) $\int_C \dfrac{(x+y)dx - (x-y)\,dy}{x^2+y^2}$ onde C é a circunferência $x^2 + y^2 = a^2$, percorrida no sentido contrário aos ponteiros do relógio.

c) $\int_C \dfrac{dx + dy}{|x| + |y|}$ onde C é o contorno do quadrado de vértices $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ e $(0, -1)$, percorrido no sentido contrário aos ponteiros do relógio.

d) $f(x, y, z) = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + (xz - y)\overrightarrow{k}$ ao longo do caminho dado por $\alpha(t) = t^2\overrightarrow{i} + 2t\overrightarrow{j} + 4t^3\overrightarrow{k}$, $0 \leq t \leq 1$.

e) $\int_C ydx + zdy + xdz$, onde C é a curva de interseção das superfícies $x + y = 2$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y)$. A curva é percorrida de modo que mirando da origem o sentido é dos ponteiros do relógio.

2) Um campo de forças f do espaço tridimensional vem dado por $f(x, y, z) = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + (xz - y)\overrightarrow{k}$. Calcular o trabalho realizado por esta força ao mover uma partícula desde $(0, 0, 0)$ a $(1, 2, 4)$ ao longo do segmento de reta que une esses dois pontos.

3) Calcular o trabalho realizado pelo campo de forças $f(x, y, z) = y^2\overrightarrow{i} + z^2\overrightarrow{j} + x^2\overrightarrow{k}$ ao longo da curva de interseção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ e o cilindro $x^2 + y^2 = ax$, sendo $z \geq 0$ e $a > 0$. O caminho é percorrido de modo que, observado o plano xy desde o eixo z positivo o sentido seja dos ponteiros do relógio.

4) Considere um arame semicircular uniforme de raio a. a) Demonstrar que o centróide está situado no eixo de simetria a uma distância $2a/\pi$ do centro. b) Demonstrar que o momento de inércia do arame com respeito ao diâmetro que passa pelos extremos do arame é $\dfrac{1}{2}Ma^2$, sendo M a massa do arame.

5) Achar a massa de um arame cuja forma é a da curva de interseção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e o plano $x + y + z = 0$ se a densidade do arame em (x, y, z) é x^2.

6) Dado um campo vetorial bidimensional

$$f(x, y) = P(x, y)$$

em que as derivadas parciais $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ e $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ são contínuas num conjunto aberto S. Se f é um gradiente de um certo potencial ψ, demonstrar que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

em cada ponto de S.

7) Em cada um dos seguintes campos vetoriais, aplicar o resultado do exercicio 6 para demonstrar que f não é um gradiente. Achar seguidamente um caminho fechado C tal que $\displaystyle\oint_C f \neq 0$.

a) $f(x, y) = y\overrightarrow{i} - x\overrightarrow{j}$.
b) $f(x, y) = y\overrightarrow{i} + (xy - x)\overrightarrow{j}$.

8) Em cada um dos exercícios abaixo está definido um campo vetorial f. Em cada caso determinar se f é ou não o gradiente de um campo escalar. Quando for um gradiente encontrar a função potencial correspondente.

a) $f(x, y) = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$.
b) $f(x, y) = 3x^2y\overrightarrow{i} + x^3\overrightarrow{j}$.
c) $f(x, y, z) = (x + z)\overrightarrow{i} - (y + z)\overrightarrow{j} + (x - y)\overrightarrow{k}$.
d) $f(x, y, z) = 2xy^3\overrightarrow{i} + x^2z^3\overrightarrow{j} + 3x^2yz^2\overrightarrow{k}$.

1) Seja S um paralelogramo de lados não paralelos a nenhum eixo coordenado. Sejam S_1, S_2 e S_3 as áreas das projeções de S sobre os planos coordenados. Demonstrar que a área de S é $\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}$.

2) Calcular a área da região que no plano $x + y + z = a$ determina o cilindro $x^2 + y^2 = a^2$.

3) Calcular a área da porção da esfera $x^2+y^2+z^2 = a^2$ interior ao cilindro $x^2 + y^2 = ay$, sendo $a > 0$.

4) Calcular a área da porção da superfície $z^2 = 2xy$ que se projeta no primeiro quadrante do plano-xy e limitada pelos planos $x = 2$ e $y = 1$.

5) Calcular a área da porção de superfície cônica $x^2+y^2 = z^2$ situada por cima do plano-xy e limitada pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2ax$.

6) Calcular a área da porção de superfície cônica $x^2 + y^2 = z^2$ situada entre os planos $z = 0$ e $x + 2z = 3$.

7) Calcular a área do toro de equação vetorial

$$\vec{r}(u, v) = (a + v \cos u) \sin v \,\vec{i} + (a + b \cos u) \cos v \,\vec{j} + b\,\mathrm{Si}\, u \,\vec{k}$$

onde $0 < b < a$ e $0 \leq u \leq 2\pi$, $0 \leq v \leq 2\pi$.

8) Seja T o disco unitário no plano uv, $T = \{(u, v) : u^2 + v^2 \leq 1\}$, e ponhamos

$$\vec{r}(u, v) = \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}\vec{i} + \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}\vec{j} + \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1}\vec{k}.$$

a) Determinar a imagem por r de cada um dos seguintes conjuntos: a circunferência unitária $u^2 + v^2 = 1$; o intervalo $-1 \leq u \leq 1$; a parte da reta $u = v$ situada em T.

b) A superfície $S = r(T)$ é muito conhecida, diga qual é.

9) Seja a semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 1$, $z \geq 0$, e $\vec{F}(x, y, z) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$. Seja $\vec{n}$ o vetor normal unitário exterior de S. Calcular o valor da integral de superfície $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$, empregando:

a) a representação vetorial $\vec{r}(u, v) = \sin u \cos v\,\vec{i} + \sin u \sin v\,\vec{j} + \cos u\,\vec{k}$,

b) a representação explicita $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

10) Demonstrar que o momento de inercia de um recipiente esférico ao redor de um diâmetro é igual a $\frac{2}{3}ma^2$, sendo m a massa do recipiente e a o seu raio.

11) Seja S a porção do plano limitada por um triângulo de vértices $(1,0,0),(0,1,0)$ e $(0,0,1)$ e seja $\overrightarrow{F}(x,y,z) = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$. Representamos com $\overrightarrow{n}$ a normal unitária a S que tem componente z não negativa. Calcular a integral de superfície $\displaystyle\iint_S \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}\,dS$ utilizando:

a) a representação vetorial $r(u,v) = (u+v)\,\overrightarrow{i} + (u-v)\,\overrightarrow{j} + (1-2u)\,\overrightarrow{k}$,

b) uma representação explícita da forma $z = f(x,y)$.

12) Seja S uma superfície paramétrica dada na forma explícita $z = f(x,y)$, onde (x,y) varia numa região T, projeção de S no plano xy. Sejam $\overrightarrow{F} = P\,\overrightarrow{i} + Q\,\overrightarrow{j} + R\,\overrightarrow{k}$ e $\overrightarrow{n}$ a normal unitária a S de componente z não negativa. Empregar a representação paramétrica $r(x,y) = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + f(x,y)\,\overrightarrow{k}$ e demonstrar que

$$\iint_S \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}\,dS = \iint_T \left(-P\frac{\partial f}{\partial x} - Q\frac{\partial f}{\partial y} + R\right)dxdy,$$

onde P, Q e R estão calculadas em $(x,y,f(x,y))$.

13) Seja S a mesma superfície do exercicio 12), e seja ϕ um campo escalar. Demonstrar que

a) $\displaystyle\iint_S \phi(x,y,z)dS = \iint_S \phi(x,y,f(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dxdy.$

b) $\displaystyle\iint_S \phi(x,y,z)dy\wedge dz = -\iint_T \phi(x,y,f(x,y))\frac{\partial f}{\partial x}dxdy.$

c) $\displaystyle\iint_S \phi(x,y,z)dz\wedge dx = -\iint_T \phi(x,y,f(x,y))\frac{\partial f}{\partial y}dxdy.$

14) Se S é a superfície da esfera $x^2+y^2+z^2 = a^2$, calcular o valor da integral de superfície

$$\iint_S xzdy\wedge dz + yzdz\wedge dx + x^2dx\wedge dy.$$

Eleger uma representação para que o produto vetorial fundamental tenha a direção da normal exterior.