

Cálculo Diferencial e Integral 3

Prof. Milton de L Oliveira

10 de dezembro de 2023

1 Integrais Duplas

Considere a figura 1 abaixo que estabelece uma região R no plano.

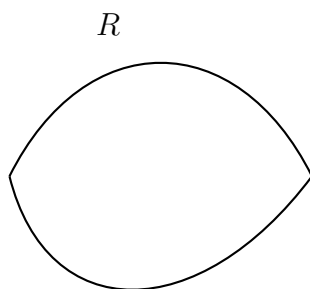


Figura 1: Região no Plano

Dividimos a região R em regiões retangulares conforme a figura 2 abaixo. A totalidade das subregiões retangulares fechadas inteiramente contidas em R constitui uma *partição interior de R* . Designando por $R_1, R_2, \dots, R_n$, essas subregiões retangulares, então a partição interior é $P = \{R_i, i = 1, \dots, n\}$. O comprimento da maior diagonal das R_i será denotada por $\|P\|$ e chamada *norma da partição P* . A área de R_i denotamos por ΔA_i . Veja a figura 3.

Definição 1. *Seja f uma função de duas variáveis definida numa região R e $P = \{R_i, i = 1, \dots, n\}$ uma partição de R . Uma soma de Riemann de f para P é qualquer soma da forma*

$$\sum_{i=1}^n f(u_i, v_i) \Delta A_i$$

onde (u_i, v_i) está em R_i .

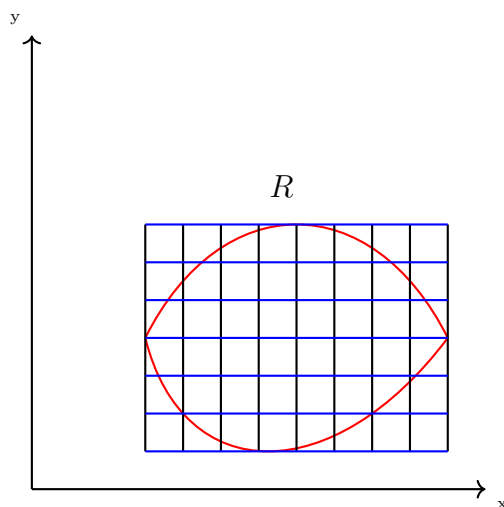


Figura 2: Região no Plano dividida em Retângulos

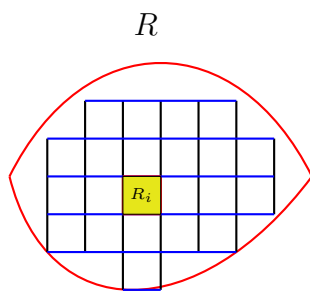


Figura 3: Região dividida por Retângulos menores inteiramente contidos nela

Definição 2. *Sejam f uma função de duas variáveis definida numa região R e L um número real. A afirmação*

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(u_i, v_i) \Delta A_i = L$$

significa que, dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, existe $\delta > 0$, tal que se $P = \{R_i\}$ é uma partição interior de R com $\|P\| < \delta$, então

$$\left| \sum_{i=1}^n f(u_i, v_i) \Delta A_i - L \right| < \varepsilon$$

para qualquer escolha de (u_i, v_i) em R_i .

Definição 3. *Seja f uma função de duas variáveis definida em R . A integral dupla de f sobre R , é dada por*

$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(u_i, v_i) \Delta A_i$$

desde que o limite exista.

Definição 4. *Seja f contínua com $f(x, y) \geq 0$, para todo $(x, y) \in D$ (região de definição de f). O volume do sólido compreendido entre o gráfico de $z = f(x, y)$ e acima de D é*

$$V = \iint_D f(x, y) dA.$$

Veja a figura 4.

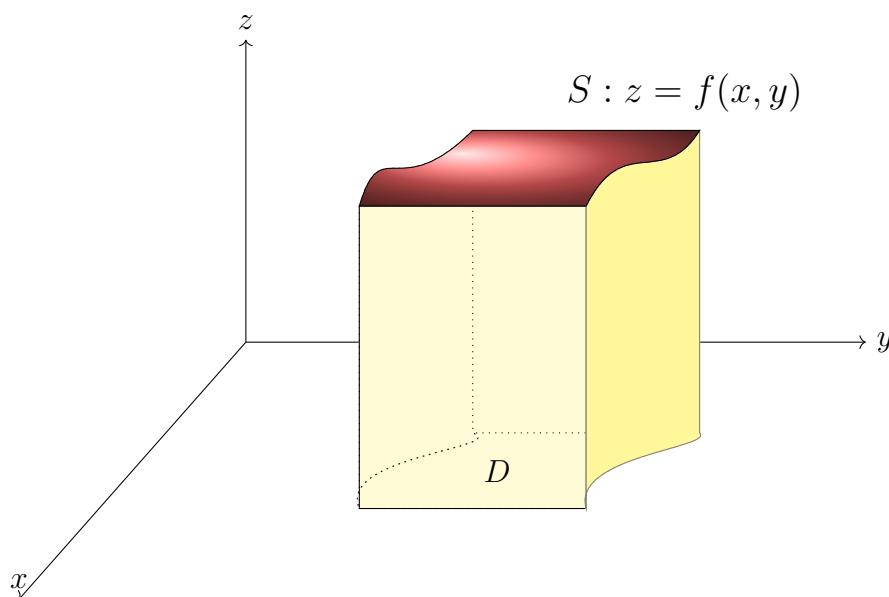


Figura 4: Sólido abaixo do gráfico de S e acima do domínio D

Se $f(x, y) < 0$ em R , a integral dupla de f sobre R é o negativo do volume sólido situado acima do gráfico de f e sob a região R .

Teorema 5. *Seja f uma função integrável e c uma constante real qualquer. Temos que*

$$(i) \iint_R cf(x, y) dA = c \iint_R f(x, y) dA.$$

$$(ii) \iint_R (f(x, y) + g(x, y)) dA = \iint_R f(x, y) dA + \iint_R g(x, y) dA.$$

(iii) *Se R é a união de duas regiões não superpostas R_1 e R_2 então*

$$\iint_R f(x, y) dA = \iint_{R_1} f(x, y) dA + \iint_{R_2} f(x, y) dA.$$

(iv) *Se $f(x, y) \geq 0$ em R então $\iint_R f(x, y) dA \geq 0$.*

2 Integrais Iteradas

Se R é uma região retangular do tipo

$$R = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

então a integral de uma função f definida em R é dada por

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx,$$

ou

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy.$$

Exemplo 6. *Calcule $\int_1^4 \int_{-1}^2 (2x + 6x^2y) dy dx$.*

Solução: Por definição

$$\begin{aligned} \int_1^4 \int_{-1}^2 (2x + 6x^2y) dy dx &= \int_1^4 \left[2xy + 6x^2 \left(\frac{y^2}{2} \right) \right]_{-1}^2 dx \\ &= \int_1^4 [(4x + 12x^2) - (-2x + 3x^2)] dx \\ &= \int_1^4 (6x + 9x^2) dx \\ &= [3x^2 + 3x^3]_1^4 = 234. \end{aligned}$$

Exemplo 7. Calcule $\int_{-1}^2 \int_1^4 (2x + 6x^2y) dx dy$.

Solução: Temos que

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 \int_1^4 (2x + 6x^2y) dx dy &= \int_{-1}^2 \left[2\frac{x^2}{2} + 6\left(\frac{x^3}{3}\right)y \right]_1^4 dy \\ &= \int_{-1}^2 [(16 + 128y) - (1 + 2y)] dy \\ &= \int_{-1}^2 (126y + 15) dy \\ &= [63y^2 + 15y]_{-1}^2 = 234. \end{aligned}$$

Agora queremos integrar sobre regiões dos tipos R_x e R_y abaixo. Seja R uma região do tipo R_x , ou seja, uma região definida por

$$R_x = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g_1(x) \leq y \leq g_2(x), a \leq x \leq b\}$$

ou do tipo R_y , isto é, uma região definida por

$$R_y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : h_1(y) \leq x \leq h_2(y), c \leq y \leq d\}$$

então temos que

$$\iint_{R_x} f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx$$

ou

$$\iint_{R_y} f(x, y) dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy.$$

Conforme as figuras 5 e 6.

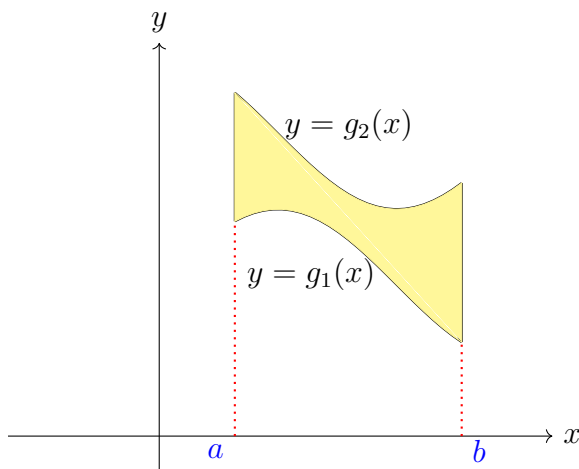


Figura 5: Região do tipo R_x

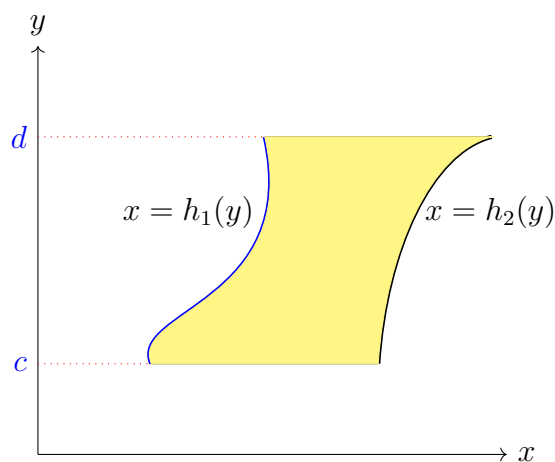


Figura 6: Região do tipo R_y

Exemplo 8. Calcule $\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^3 + 4y) dy dx$.

Solução: Por definição

$$\begin{aligned} \int_0^2 \left[\int_{x^2}^{2x} (x^3 + 4y) dy \right] dx &= \int_0^2 \left[x^3 y + 4 \frac{y^2}{2} \right]_{x^2}^{2x} dx \\ &= \int_0^2 \left[(x^3 (2x) + 2(2x)^2) - (x^3 x^2 + 2(x^2)^2) \right] dx \\ &= \int_0^2 [8x^2 - x^5] dx \\ &= \left[8 \frac{x^3}{3} - \frac{x^6}{6} \right]_0^2 = \frac{32}{3}. \end{aligned}$$

Exemplo 9. Calcule $\int_1^3 \int_{\frac{\pi}{6}}^{y^2} 2y \cos x dx dy$.

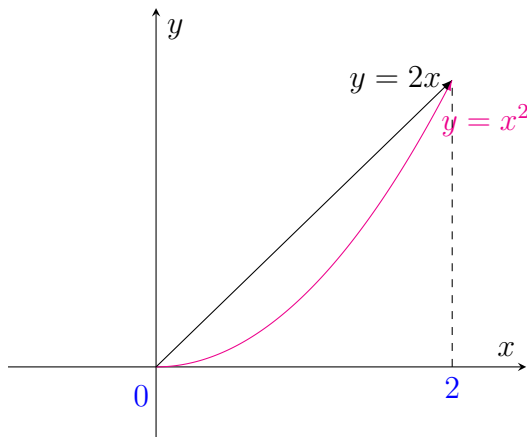


Figura 7: Região do exemplo 8

Solução: Temos que

$$\begin{aligned}
 \int_1^3 \int_{\frac{\pi}{6}}^{y^2} 2y \cos x dx dy &= \int_1^3 2y [\sin x]_{\frac{\pi}{6}}^{y^2} dy \\
 &= \int_1^3 2y \left[\sin y^2 - \sin \frac{\pi}{6} \right] dy \\
 &= \int_1^3 (2y \sin y^2 - y) dy \\
 &= \left[-\cos y^2 - \frac{y^2}{2} \right]_1^3 \\
 &= -4 - \cos 9 + \cos 1.
 \end{aligned}$$

Exemplo 10. Seja R a região do plano- xy delimitada pelos gráficos de $y = \sin x$ e $y = \cos x$ com x variando de 0 a $\frac{\pi}{4}$. Calcule $\iint_R (y+1) dA$.

Solução: Temos que

$$\begin{aligned}
 \iint_R (y+1) dA &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\sin x}^{\cos x} (y+1) dy dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{y^2}{2} + y \right]_{\sin x}^{\cos x} dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{\cos^2 x}{2} + \cos x - \frac{\sin^2 x}{2} - \sin x \right] dx \\
 &= \left[\frac{1}{4} \sin 2x + \sin x + \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} - \frac{3}{4}.
 \end{aligned}$$

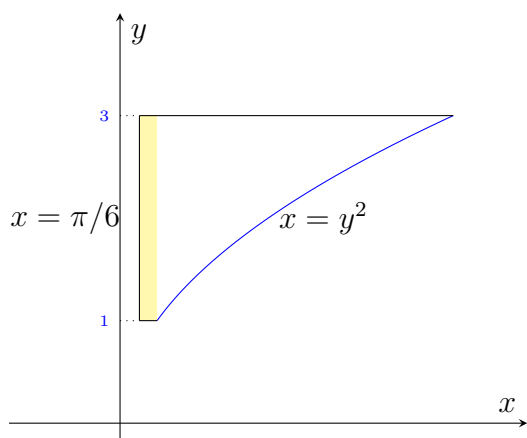


Figura 8: Região do exemplo 9

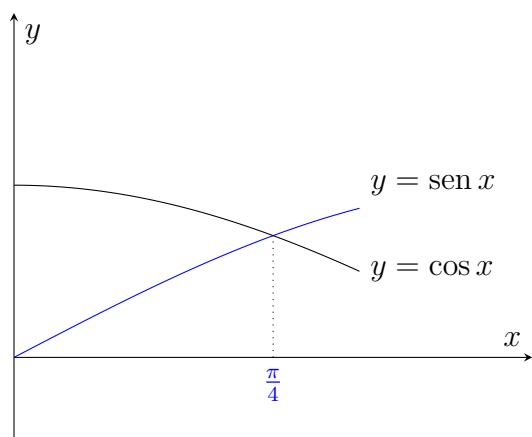


Figura 9: Região do exemplo 10

2.1 Área e Volume

Já vimos que se $f(x, y) \geq 0$ e f é contínua, então o volume V do sólido compreendido entre o gráfico de $z = f(x, y)$ e sobre uma região R_x do plano xy é:

$$V = \iint_{R_x} f(x, y) dA$$

Deduz-se portanto, que

$$V = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx.$$

A área da região R_x é dada por:

$$A = \iint_{R_x} dA$$

neste caso,

$$A = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy dx = \int_a^b [y]_{g_1(x)}^{g_2(x)} dx = \int_a^b [g_2(x) - g_1(x)] dx.$$

De modo análogo, temos que para regiões do tipo R_y vale resultado semelhante, isto é,

$$V = \iint_{R_y} f(x, y) dA$$

e portanto, que

$$V = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy.$$

e a área da região R_y vem dada por

$$A = \iint_{R_y} dA$$

o que nos dá

$$A = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} dx dy = \int_c^d [x]_{h_1(y)}^{h_2(y)} dy = \int_c^d [h_2(y) - h_1(y)] dy.$$

Exemplo 11. Ache a área A da região do plano- xy delimitada pelos gráficos de $2y = 16 - x^2$ e $x + 2y = 4$.

Sol.: Temos que

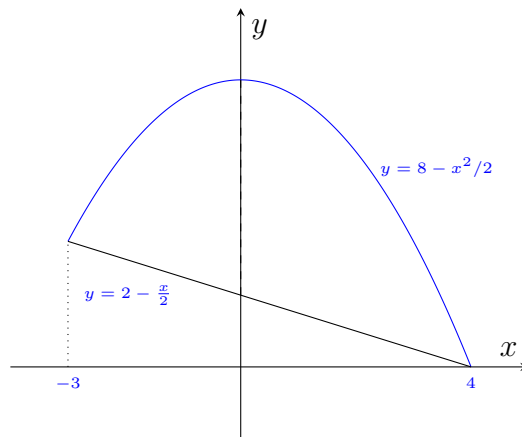
$$y = 8 - \frac{x^2}{2} \text{ e } y = 2 - \frac{x}{2}.$$

Interceptando as duas equações acima obtemos

$$2 - \frac{x}{2} = 8 - \frac{x^2}{2} \quad \text{ou} \quad 2 - \frac{x}{2} = 2(4 - \frac{x^2}{4})$$

ou ainda

$$2 - \frac{x}{2} = 2(2 - \frac{x}{2})(2 + \frac{x}{2}) \quad \text{ou} \quad (2 - \frac{x}{2})[1 - 2(2 + \frac{x}{2})] = 0$$



o que implica

$$(2 - \frac{x}{2})(-3 - x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -3, \text{ ou} \\ x = 4 \end{cases}.$$

Logo:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-3}^4 \int_{2-\frac{x}{2}}^{8-\frac{x^2}{2}} dy dx = \int_{-3}^4 [8 - \frac{x^2}{2} - (2 - \frac{x}{2})] dx = \int_{-3}^4 [6 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2}] dx \\ &= [6x + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{6}]_{-3}^4 = \frac{343}{12}. \end{aligned}$$

Exemplo 12. Ache a área A da região do plano- xy delimitada pelos gráficos de $x = y^3$, $x + y = 2$ e $y = 0$.

Sol.: Interceptando $x = y^3$ com $x + y = 2$, obtemos:

$$y^3 + y - 2 = 0$$

cuja raiz é $y = 1$. Logo, temos:

$$A = \int_0^1 \int_{y^3}^{2-y} dx dy = \int_0^1 [x]_{y^3}^{2-y} dy = \int_0^1 (2 - y - y^3) dy = [2y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4}]_0^1 = \frac{5}{4}.$$

Ou:

$$A = \int_0^1 \int_0^{\sqrt[3]{x}} dy dx + \int_1^2 \int_0^{2-x} dy dx.$$

Exemplo 13. Ache o volume do sólido do primeiro octante delimitado pelos planos coordenados, pelo parabolóide $z = x^2 + y^2 + 1$ e pelo plano $2x + y = 2$.

Sol.: Temos que

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \int_0^{2-2x} (x^2 + y^2 + 1) dy dx \\ &= \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} + y \right]_0^{2-2x} dx \\ &= \int_0^1 \left[x^2(2-2x) + \frac{(2-2x)^3}{3} + (2-2x) \right] dx \\ &= \int_0^1 \left[-\frac{14}{3}x^3 + 10x^2 - 10x + \frac{14}{3} \right] dx \\ &= \left[-\frac{7}{6}x^4 + \frac{10}{3}x^3 - 5x^2 + \frac{14}{3}x \right]_0^1 = \frac{11}{6}. \end{aligned}$$

Exemplo 14. Ache o volume V do sólido que está no primeiro octante e é delimitado pelos três planos coordenados e pelos cilindros $x^2 + y^2 = 9$ e $y^2 + z^2 = 9$.

Sol.: O sólido está situado abaixo do gráfico de $z = \sqrt{9 - y^2}$ e acima da região R (que equivale a um quarto do círculo $x^2 + y^2 = 9$, junto com os pontos interiores ao círculo). Assim:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} \sqrt{9-y^2} dx dy \\ &= \int_0^3 \sqrt{9-y^2} [x]_0^{\sqrt{9-y^2}} dy \\ &= \int_0^3 (9-y^2) dy \\ &= \left[9y - \frac{y^3}{3} \right]_0^3 = 18. \end{aligned}$$

2.2 Integrais duplas em Coordenadas polares

Considere a região R como na figura 11, delimitada por arcos de círculos de raios r_1 e r_2 e por dois raios que saem da origem. Se $\Delta\theta$ é a medida em radianos do ângulo entre os raios e se $\Delta r = r_2 - r_1$ então a área ΔA de R é

$$\Delta A = \frac{1}{2}r_2^2\Delta\theta - \frac{1}{2}r_1^2\Delta\theta$$

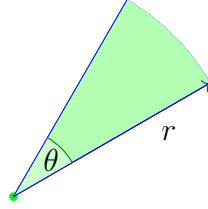


Figura 10: A área de um setor circular de raio r e ângulo θ é $A = \frac{r^2\theta}{2}$.

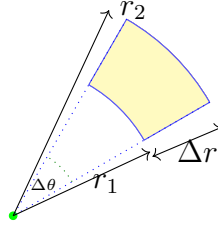


Figura 11: Setor Polar

ou

$$\Delta A = \frac{1}{2}(r_2^2 - r_1^2)\Delta\theta = \frac{1}{2}(r_2 + r_1)(r_2 - r_1)\Delta\theta$$

chamando $\bar{r} = \frac{1}{2}(r_2 + r_1)$ então

$$\Delta A = \bar{r}\Delta r\Delta\theta.$$

Agora consideremos a região R como na figura 12, delimitada por dois raios que fazem ângulos α e β com o eixo polar, e pelos gráficos de suas equações polares $r = g_1(\theta)$ e $r = g_2(\theta)$, em que g_1 e g_2 são funções contínuas e $g_1(\theta) \leq g_2(\theta)$ para $\alpha \leq \theta \leq \beta$.

Subdividimos R por meio de arcos circulares e raios conforme a figura 13. Então a coleção de setores polares elementares $R_1, \dots, R_n$ que estão completamente dentro de R é chamada a *partição polar interior* P de R . A $\|P\|$ é o comprimento da maior diagonal dos R_k . Escolhido um ponto (r_k, θ_k) em R_k talque r_k seja o raio médio, então

$$\Delta A_k = r_k \Delta r_k \Delta \theta_k.$$

Se f é uma função contínua das variáveis polares r e θ então temos o seguinte resultado.

Teorema 15.

$$\iint_R f(r, \theta) dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r, \theta) r dr d\theta$$

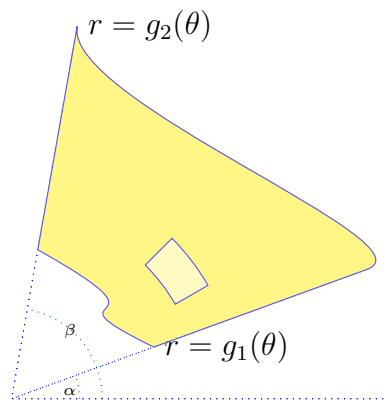


Figura 12: Região Polar

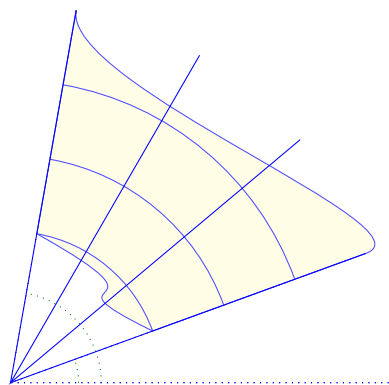


Figura 13: Partição da Região Polar

$$= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_k f(r_k, \theta_k) r_k \Delta r_k \Delta \theta_k.$$

Se $f(r, \theta) = 1$ em toda R , então a integral acima é igual a área de R .

Exemplo 16. Ache a área da região R exterior ao círculo $r = a$ e interior ao círculo $r = 2a \sin \theta$.

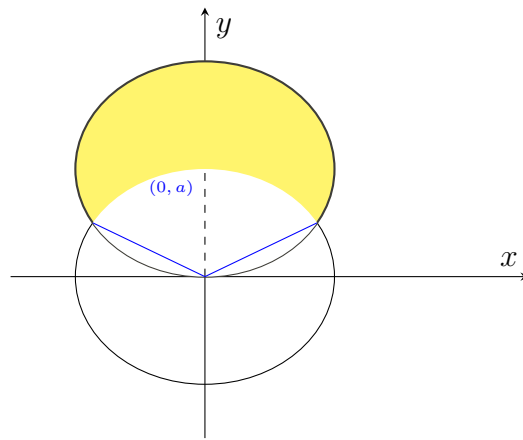


Figura 14: Região Circular

Sol.: Os pontos de interseção destes círculos são:

$$a = 2a \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{6} \text{ e } \theta_2 = \frac{5\pi}{6}.$$

Logo:

$$\begin{aligned} A &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \int_a^{2a \sin \theta} r dr d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \left[\frac{r^2}{2} \right]_a^{2a \sin \theta} d\theta = \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \left(2a^2 \sin^2 \theta - \frac{a^2}{2} \right) d\theta = a^2 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \left(2 \sin^2 \theta - \frac{1}{2} \right) d\theta \\ &= a^2 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \left(1 - \cos 2\theta - \frac{1}{2} \right) d\theta = a^2 \left[\frac{1}{2} \theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \\ &= a^2 \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right). \end{aligned}$$

Note que $x = a \cos \theta$, $y = a \sin \theta$, nos faz deduzir que

$$r = 2a \sin \theta$$

implica em

$$x^2 + y^2 = 2ay \Rightarrow x^2 + y^2 - 2ay + a^2 = a^2 \Rightarrow x^2 + (y - a)^2 = a^2.$$

Exemplo 17. Ache a área da região R delimitada pelo laço da lemniscata $r^2 = a^2 \sin 2\theta$, $a > 0$.

Sol.: Quando θ variar de 0 a $\frac{\pi}{2}$, varremos um laço da lemniscata. Segue que:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{a^2 \sin 2\theta}} r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{\sqrt{a^2 \sin 2\theta}} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \sin 2\theta d\theta = -\frac{1}{4} a^2 [\cos 2\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\frac{1}{4} a^2 (-1 - 1) = \frac{1}{2} a^2. \end{aligned}$$

Fórmula de mudança de variável:

$$\iint_R f(x, y) dy dx = \iint f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$

Exemplo 18. Utilize coordenadas polares para calcular

$$\int_{-a}^a \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} dy dx.$$

3 Integrais Triplas

Consideremos um sólido Q no espaço tridimensional, dividimos esse sólido em regiões cúbicas, ou seja, dividimos o sólido Q em uma partição P que é a união de n cubos $Q_1, \dots, Q_n$ que estão inteiramente contidos em Q , veja a figura 15. Considere um cubo Q_k que está contido no sólido, e tome um ponto $P_k(x_k, y_k, z_k)$ dentro do cubo Q_k .

Q

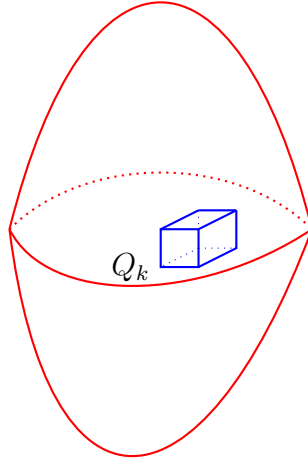


Figura 15: Sólido Q no espaço

Seja f uma função de três variáveis x, y, z definida no sólido Q , aplicamos f no ponto P_k e multiplicamos pelo volume desse cubo ΔV_k formamos então a soma de Riemann

$$\sum_k f(x_k, y_k, z_k) \Delta V_k$$

a norma da partição $P = Q_1 \cup \dots \cup Q_n$ é dada pela maior diagonal dos Q_k , $|P| = \max_{1 \leq k \leq n} \text{diagonal}\{Q_k\}$. Daí tomamos o limite quando a norma da partição P tende a zero, se esse limite existir então teremos a integral tripla de f sobre Q , ou seja, integral tripla de f é

$$\iiint_Q f(x, y, z) dv = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_k f(x_k, y_k, z_k) \Delta V_k.$$

No caso em que Q é um paralelepípedo dado por

$$Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, m \leq z \leq n\}$$

então

$$\iiint_Q f(x, y, z) dv = \int_a^b \int_c^d \int_m^n f(x, y, z) dz dy dx.$$

Exemplo 19. Calcule $\iiint_Q (xy^2 + yz^3)dv$ se

$$Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x \leq 1, 3 \leq y \leq 4, 0 \leq z \leq 2\}.$$

Solução:

$$\int_3^4 \int_{-1}^1 \int_0^2 (xy^2 + yz^3) dz dx dy = 28.$$

Suponha agora que Q seja uma região do tipo

$$Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in R \text{ e } k_1(x, y) \leq z \leq k_2(x, y)\}$$

onde k_1 e k_2 são funções com derivadas parciais primeiras contínuas em toda região R . A região Q está entre os gráficos de $z = k_1(x, y)$ e $z = k_2(x, y)$ e sob ou sobre a região R . Segue que se f é contínua em Q então

$$\iiint_Q f(x, y, z)dv = \iint_R \left[\int_{k_1(x, y)}^{k_2(x, y)} f(x, y, z)dz \right] dA.$$

Se a região R é do tipo R_x então

$$\iiint_Q f(x, y, z)dv = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{k_1(x, y)}^{k_2(x, y)} f(x, y, z)dz dy dx..$$

Analogamente se a região R é do tipo R_y então

$$\iiint_Q f(x, y, z)dv = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \int_{k_1(x, y)}^{k_2(x, y)} f(x, y, z)dz dx dy.$$

Exemplo 20. Expresse $\iiint_Q f(x, y, z)dv$ como uma integral iterada se Q é

a região do primeiro octante delimitada pelos planos coordenados, pelo parabolóide $z = 2 + x^2 + \frac{1}{4}y^2$ e pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

Solução: Segue daí que

$$\iiint_Q f(x, y, z)dv = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{2+x^2+\frac{1}{4}y^2} f(x, y, z)dz dy dx.$$

Se $f(x, y, z) = 1$ em toda região Q , então a integral tripla de f sobre Q se escreve como $\iiint_Q dV$ e seu valor é volume do sólido determinado por Q .
para o exemplo acima o volume de Q é

$$V = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{2+x^2+\frac{1}{4}y^2} dz dy dx..$$

Exemplo 21. Ache o volume do sólido S delimitado pelo cilindro $x^2 = y$ e pelos planos $y + z = 4$ e $z = 0$.

Solução:

$$V = \int_{-2}^2 \int_{x^2}^4 \int_0^{4-y} dz dy dx = \frac{256}{15}.$$

Se Q for da forma

$$Q = \{(x, y, z) : a \leq x \leq b, h_1(x) \leq z \leq h_2(x), k_1(x, z) \leq y \leq k_2(x, z)\}$$

então

$$\iiint_Q f(x, y, z) dv = \int_a^b \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \int_{k_1(x, z)}^{k_2(x, z)} f(x, y, z) dy dz dx$$

Exemplo 22. Ache o volume da região Q delimitada pelos gráficos de $z = 3x^2$, $z = 4 - x^2$, $y = 0$ e $z + y = 6$.

Solução:

$$V = \int_{-1}^1 \int_{3x^2}^{4-x^2} \int_0^{6-z} dy dz dx = \frac{304}{15}$$

Se Q é uma região do tipo

$$Q = \{(x, y, z) : (y, z) \in R, k_1(y, z) \leq x \leq k_2(y, z)\}$$

então

$$\iiint_Q f(x, y, z) dv = \iint_R \int_{k_1(y, z)}^{k_2(y, z)} f(x, y, z) dA..$$

4 Momentos e centro de massa

Suponha que temos uma lâmina não-homogênea L que tenha a forma de uma região R do plano-xy. Se a densidade de massa por área no ponto (x, y) é $\delta(x, y)$ e δ é contínua em R , então

$$m = \iint_R \delta(x, y) dA$$

Seja $P = \{R_k\}$ uma partição de R e, para cada k , seja (x_k, y_k) um ponto arbitrário de R_k . Como δ é contínua, podemos pensar que δ é quase constante em R_k . Logo, se $\|P\| \approx 0$, a massa Δm_k que corresponde a R_k pode ser aproximada por $\delta(x_k, y_k) \Delta A_k$, em que ΔA_k é a área de R_k . Admitindo a massa Δm_k concentrada em (x_k, y_k) , então o momento deste elemento de L em relação ao eixo-x é o produto de $y_k \delta(x_k, y_k) \Delta A_k$. Como a soma dos momentos deve aproximar o momento da lâmina, definimos o *momento* M_x de L em relação ao eixo-x como segue:

$$M_x = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_k y_k \delta(x_k, y_k) \Delta A_k = \iint_R y \delta(x, y) dA$$

Da mesma forma o *momento* M_y de L em relação ao eixo-y é

$$M_y = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_k x_k \delta(x_k, y_k) \Delta A_k = \iint_R x \delta(x, y) dA$$

Definimos o *centro de massa* (ou *centro de gravidade*) da lâmina como o ponto $(\bar{x}, \bar{y})$ tal que $\bar{x} = M_y/m$, $\bar{y} = M_x/m$.

Se L é homogênea, então a densidade de massa por área $\delta(x, y)$ é constante e pode ser cancelada nas equações acima.

Exemplo 23. Uma lâmina tem a forma de um triângulo retângulo isósceles com lados iguais de comprimento a . A densidade de massa por área no ponto P é diretamente proporcional ao quadrado da distância de P ao vértice oposto à hipotenusa. Ache o centro de massa.

Sol.:

A lâmina é a mesma do exemplo anterior. Temos que $\delta(x, y) = k(x^2 + y^2)$, e já sabemos que $m = \frac{1}{6}ka^4$. Por definição:

$$M_y = \iint_R xk(x^2 + y^2) dA = \int_0^a \int_0^{a-x} xk(x^2 + y^2) dy dx = \frac{1}{15}ka^5.$$

Logo,

$$\bar{x} = \frac{\frac{1}{15}ka^5}{\frac{1}{6}ka^4} = \frac{2}{5}a.$$

Analogamente, $M_x = \frac{1}{15}ka^5$ e $\bar{y} = \frac{2}{5}a$. Assim, o centro de massa da lâmina é $(\frac{2}{5}a, \frac{2}{5}a)$.

Exemplo 24. Uma lâmina tem a forma da região R do plano- xy delimitada pela parábola $x = y^2$ e a reta $x = 4$. A densidade de massa por área no ponto $P(x, y)$ é diretamente proporcional à distância do eixo- y a P . Ache o centro de massa.

Sol.:

A densidade de massa por área em (x, y) é $\delta(x, y) = kx$ para uma constante k . Segue-se da forma de δ e da simetria da região, que o centro de massa está sobre o eixo- x , isto é, $\bar{y} = 0$.

Por definição, temos que

$$\begin{aligned} m &= \iint_R kx dA = k \int_{-2}^2 \int_{y^2}^4 x dx dy \\ &= k \int_{-2}^2 \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_{y^2}^4 dy = \frac{1}{2}k \int_{-2}^2 (16 - y^4) dy = \frac{128}{5}k. \end{aligned}$$

Temos também que

$$\begin{aligned} M_y &= \iint_R x(kx) dA = k \int_{-2}^2 \int_{y^2}^4 x^2 dx dy \\ &= k \int_{-2}^2 \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_{y^2}^4 dy = \frac{1}{3}k \int_{-2}^2 (64 - y^6) dy = \frac{512}{7}k. \end{aligned}$$

Consequentemente:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{512k}{7} \cdot \frac{5}{128k} = \frac{20}{7},$$

logo o centro de massa é $(\frac{20}{7}, 0)$.

Momentos de Inércia de uma lâmina:

$$I_x = \iint_R y^2 \delta(x, y) dA \quad (\text{Momento de Inércia em relação ao eixo-}x)$$

$$I_y = \iint_R x^2 \delta(x, y) dA \quad (\text{Momento de Inércia em relação ao eixo-}y)$$

$$I_0 = \iint_R (x^2 + y^2) \delta(x, y) dA \quad (\text{Momento polar de Inércia, em relação à origem}).$$

Exemplo 25. Uma lâmina tem a forma semicircular da figura *. A densidade de massa por área é diretamente proporcional à distância do eixo- x . Ache o momento de inércia em relação ao eixo- x .

Sol.:

Por hipótese, a densidade de massa por área em (x, y) é $\delta(x, y) = ky$. Temos que o momento de inércia em relação ao eixo- x é

$$\begin{aligned} I_x &= \int_{-a}^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} y^2(ky) dy dx = k \int_{-a}^a \left[\frac{1}{4} y^4 \right]_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dx \\ &= \frac{1}{4} k \int_{-a}^a (a^4 - 2a^2 x^2 + x^4) dx = \frac{4}{15} k a^5. \end{aligned}$$

Os momentos de inércia são úteis em problemas que envolvem a rotação de um objeto em torno de um eixo fixo. Por exemplo, a rotação de uma roda (ou um disco) em torno de um eixo. Se uma partícula P da roda tem massa m e está a uma distância k do eixo de rotação, então o momento de inércia I de P em relação ao eixo é mk^2 . Se a velocidade angular $\frac{d\theta}{dt}$ é uma constante ω , então a velocidade v da partícula é $k\omega$. Sabemos que

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2.$$

Como $v = k\omega$,

$$E_c = \frac{1}{2}mk^2\omega^2 = \frac{1}{2}I\omega^2.$$

Como $E_c = \frac{1}{2}I\omega^2$, a energia cinética é diretamente proporcional ao momento de inércia.

Consideremos agora um sólido com a forma de uma região tridimensional Q . Suponha que a densidade de massa em (x, y, z) seja $\delta(x, y, z)$ e que δ seja contínua em toda Q . Seja $\{Q_k\}$ uma partição interior de Q , e seja ΔV_k o volume de Q_k . Se (x_k, y_k, z_k) é um ponto de Q_k então a massa correspondente é aproximadamente igual a $\delta(x_k, y_k, z_k)\Delta V_k$. A massa do sólido é o limite de tais somas, isto é, $\iiint_Q \delta(x, y, z) dV$.

O momento em relação ao plano- xy da parte do sólido que corresponde a Q_k é aproximado por $z_k\delta(x_k, y_k, z_k)\Delta V_k$. Somando e tomando o limite, obtemos o momento do sólido M_{xy} em relação ao plano- xy . Analogamente, obtemos os momentos M_{yz} e M_{xz} do sólido em relação aos planos yz e xz , respectivamente. Ou seja, temos

Momentos e centros de massa em três dimensões:

$$m = \iiint_Q \delta(x, y, z) dV.$$

$$M_{xy} = \iiint_Q z \delta(x, y, z) dV$$

$$M_{xz} = \iiint_Q y \delta(x, y, z) dV$$

$$M_{yz} = \iiint_Q x \delta(x, y, z) dV$$

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m}; \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m}; \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} \quad (\text{centro de massa})$$

Centróide: $\delta(x, y, z) = 1$, obtemos o centróide $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$.

Exemplo 26. Um sólido tem a forma de um cilindro circular reto de raio da base a e altura h . A densidade num ponto P é diretamente proporcional à distância de uma das bases a P . Ache o centro de massa.

Sol.: No exemplo anterior, vimos que $\delta(x, y, z) = kz$, e obtivemos $m = \frac{1}{2}\pi k h^2 a^2$.

O centro de massa está no eixo- z , de modo que basta achar $\bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}$. Além disso, pela simetria do sólido e pela forma de δ , podemos calcular M_{xy} da seguinte forma:

$$\begin{aligned} M_{xy} &= 4 \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^h z(kz) dz dy dx \\ &= 4k \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^h dy dx \\ &= \frac{4}{3} k h^3 \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy dx \\ &= \frac{4}{3} k h^3 \int_0^a [y]_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dx \\ &= \frac{4}{3} k h^3 \int_0^a \sqrt{a^2-x^2} dx \\ &= \frac{4}{3} k h^3 \frac{1}{4} \pi a^2 = \frac{1}{3} \pi k h^3 a^2. \end{aligned}$$

Dai

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{\frac{1}{3} \pi k h^3 a^2}{\frac{1}{2} \pi k h^2 a^2} = \frac{2}{3} h.$$

logo, o centro de massa é $(0, 0, \frac{2}{3}h)$.

Exemplo 27. Um sólido tem a forma da região do primeiro octante delimitada pelo parabolóide $z = 4 - 9x^2 - y^2$ e os planos $y = 4x$, $z = 0$ e $y = 0$. A densidade em $P(x, y, z)$ é proporcional à distância da origem a P . Estabeleça integrais iteradas para calcular $\bar{x}$.

Sol.: A densidade em (x, y, z) é $\delta(x, y, z) = k(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ para algum k . Temos que

$$m = \int_0^{\frac{8}{5}} \int_{y/4}^{\sqrt{4-y^3}/3} \int_0^{4-9x^2-y^2} k(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} dz dx dy$$

$$M_{yz} = \int_0^{\frac{8}{5}} \int_{y/4}^{\sqrt{4-y^3}/3} \int_0^{4-9x^2-y^2} xk(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} dz dx dy$$

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m}.$$

Se uma partícula de massa m está no ponto (x, y, z) , então sua distância ao eixo- z é $(x^2 + y^2)^{1/2}$ e seu momento de inércia I_z em relação ao eixo- z define-se como $(x^2 + y^2)m$. Da mesma forma, os momentos de inércia I_x e I_y em relação aos eixos x e y são $(y^2 + z^2)m$ e $(x^2 + z^2)m$, respectivamente. Para sólidos Q obtemos o seguinte.

Momento de inércia de sólidos

$$I_z = \iiint_Q (x^2 + y^2) \delta(x, y, z) dV$$

$$I_x = \iiint_Q (z^2 + y^2) \delta(x, y, z) dV$$

$$I_y = \iiint_Q (x^2 + z^2) \delta(x, y, z) dV$$

Exemplo 28. Ache o momento de inércia, em relação ao eixo de simetria, do sólido cilíndrico descrito no exemplo anterior.

Sol.: Como $\delta(x, y, z) = kz$, temos

$$\begin{aligned}
 I_z &= 4 \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^h (x^2 + y^2) kz dz dy dx \\
 &= 4k \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (x^2 + y^2) \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^h dy dx \\
 &= 4kh^2 \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (x^2 + y^2) dy dx \\
 &= 2kh^2 \int_0^a \left[x^2 y + \frac{1}{3} y^3 \right]_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dx \\
 &= 2kh^2 \int_0^a \left[x^2 \sqrt{a^2-x^2} + \frac{1}{3} \sqrt{(a^2-x^2)^3} \right] dx \\
 &= \frac{1}{4} \pi k h^2 a^4.
 \end{aligned}$$

Exemplo 29. Um sólido homogêneo tem a forma da região Q delimitada pelo cone $x^2 - y^2 + z^2 = 0$ e o plano $y = 3$. Estabeleça uma integral tripla para calcular seu momento de inércia em relação ao eixo- y .

Sol.: Note que o traço do cone no plano- xy é o par de retas $x = \pm y$. Denotando por k a densidade constante, temos

$$I_y = \int_0^3 \int_{-y}^y \int_{-\sqrt{y^2-x^2}}^{\sqrt{y^2-x^2}} (x^2 + z^2) k dz dx dy.$$

5 Coordenadas Cilíndricas e Esféricas

Coordenadas cilíndricas constituem outra maneira de identificar um ponto no espaço. Dado um ponto P , no espaço, sua projeção no eixo- z , fornece a cota z , e sua projeção no plano fornece coordenadas polares r e θ . As *coordenadas cilíndricas* de P são r , θ e z . Tomando no plano os eixos- x e y , temos as relações $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$. Se $r_0 > 0$, então o gráfico da equação $r = r_0$, ou equivalentemente, $x^2 + y^2 = r_0^2$, é um cilindro circular reto de raio r_0 com eixo ao longo do eixo- z . Se θ_0 e z_0 são números reais, então o gráfico de $\theta = \theta_0$ é um plano contendo o eixo- z e o gráfico de $z = z_0$ é um plano perpendicular ao eixo- z .

Exemplo 30. Escreva a equação de $z^2 = x^2 + y^2$ em coordenadas cilíndricas e esboce o gráfico.

Usando coordenadas cilíndricas

$$z^2 = r^2 \text{ ou } z = \pm r.$$

Exemplo 31. Escreva a equação em coordenadas retangulares e esboce seu gráfico num sistema de coordenadas xyz .

$$(a) z = 4r^2 \quad (b) r = 4 \operatorname{sen} \theta.$$

Solução: (a) Temos que

$$z = 4(x^2 + y^2) \quad (\text{parabolóide})$$

(b) $r = 4 \operatorname{sen} \theta$ pode ser escrito em coordenadas retangulares da seguinte forma

$$x^2 + (y - 2)^2 = 4(\text{cilindrocircularretocentradonoponto}(0, 2)).$$

5.1 Integrais triplas em coordenadas cilíndricas

Suponha Q uma região do tipo

$$Q = \{(r, \theta, z); a \leq r \leq b, c \leq \theta \leq d, m \leq z \leq n\}$$

e f uma função contínua dependente de r, θ e z em Q . Então

$$\iiint_Q f(r, \theta, z) dV = \int_m^n \int_c^d \int_a^b f(r, \theta, z) r dr d\theta dz.$$

Suponha agora que Q é do tipo

$$Q = \{(r, \theta, z); (r, \theta) \in R \text{ e } k_1(r, \theta) \leq z \leq k_2(r, \theta)\}$$

onde R é uma região do tipo

$$R = \{(r, \theta); \alpha \leq \theta \leq \beta, g_1(\theta) \leq r \leq g_2(\theta)\}$$

então temos que

$$\iiint_Q f(r, \theta, z) dV = \iint_R \left[\int_{k_1(r, \theta)}^{k_2(r, \theta)} f(r, \theta, z) dz \right] dA$$

que pode ser escrita como

$$\iiint_Q f(r, \theta, z) dV = \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} \int_{k_1(r, \theta)}^{k_2(r, \theta)} f(r, \theta, z) dz dr d\theta$$

Exemplo 32. Ache o centróide de um sólido hemisférico Q de raio a .

Solução: Temos que

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

logo, a massa desse sólido é calculada como

$$m = \iiint_Q dV = \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} dz r dr d\theta = \frac{2\pi}{3} a^3.$$

Por simetria o centróide está sobre o eixo- z , então basta achar o M_{xy} . Como

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \iiint_Q z dV = \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} z dz r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^{\sqrt{a^2-r^2}} r dr d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^a (a^2 - r^2) r dr d\theta = \frac{1}{4} \pi a^4. \end{aligned}$$

Logo

$$\bar{z} = \frac{3}{8} a.$$

Exemplo 33. Um sólido Q é delimitado pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e pelo plano $z = 2$. A densidade em cada ponto $P(x, y, z)$ do cone é diretamente proporcional à distância da origem a P . Ache sua massa.

Solução: Temos que

$$\delta(x, y, z) = k(r^2 + z^2)$$

Logo

$$m = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_r^2 k(r^2 + z^2) r dz dr d\theta.$$

Suponha uma região G , no espaço, cuja projeção no plano- xy seja uma região D , descrita em coordenadas polares. Isto é,

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in D \text{ e } g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)\}$$

e

$$D = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2; \alpha \leq \theta \leq \beta, 0 \leq h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)\}.$$

Nesse caso, temos

$$\begin{aligned} \iiint_G f(x, y, z) dV &= \iint_D \left(\int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dA \\ &= \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{g_1(r \cos \theta, r \sin \theta)}^{g_2(r \cos \theta, r \sin \theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) dz r dr d\theta \end{aligned}$$

Este é o teorema de mudança de variável das coordenadas cartesianas para coordenadas cilíndricas.

Exemplo 34. Calcule o centróide da parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ ($a > 0$) que está no primeiro octante.

Sol.: A reta $x = y = z$ é a reta de simetria da parte da esfera. De modo que o centróide pertence a esta reta. Assim temos $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z}$. Calculando $\bar{z}$, temos

$$V\bar{z} = \iiint_G z dV$$

onde V é o volume da parte da esfera representada por G . Usando coordenadas cilíndricas, fazemos a substituição $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$; os limites de integração de z , ficam $z = 0$ a $z = \sqrt{a^2 - r^2}$. Portanto:

$$\iiint_G z dV = \iint_D \left(\int_0^{\sqrt{a^2 - r^2}} z dz \right) dA = \iint_D \frac{1}{2}(a^2 - r^2) dA$$

onde D é o quarto de círculo de raio a . Agora calculando a integral dupla usando coordenadas polares temos:

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{1}{2}(a^2 - r^2) dA &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a (a^2 - r^2) r dr d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} a^2 r^2 - \frac{1}{4} r^4 \right)_0^a d\theta \\ &= \frac{1}{8} a^4 \frac{\pi}{2} = \frac{1}{16} a^4 \pi \end{aligned}$$

Portanto,

$$\iiint_G z dV = \frac{1}{16} a^4 \pi$$

Agora como $V = \pi a^3/6$, resulta que

$$\bar{z} = \frac{3a}{8} = \bar{x} = \bar{y}.$$

Exemplo 35. Transformar para coordenadas cilíndricas a integral abaixo:

$$\iiint_R x^2 y dx dy dz,$$

onde a região R é dada por $x^2 + y^2 \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$.

Sol.:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^1 r^4 \cos^2 \theta \sin \theta dz dr d\theta.$$

Exemplo 36. Transformar para coordenadas cilíndricas a integral abaixo

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{1+x+y} (x^2 - y^2) dz dy dx.$$

Sol.:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \int_0^{1+r(\cos \theta + \sin \theta)} r^3 \cos 2\theta dz dr d\theta.$$

6 Coordenadas Esféricas

Seja $P(x, y, z)$ um ponto situado no espaço. Podemos considerar esse ponto situado em coordenadas esféricas como segue. Se $\rho = \|OP\|$, seja ϕ o ângulo entre OP e o vetor k . A projeção desse ponto no eixo-z determinamos o ponto Q , e consideramos o vetor PQ , quando projetamos o ponto P no plano-xy temos o ponto P' , então claramente, temos que $\|PQ\| = \|OP'\|$ e podemos escrever $\|PQ\| = \|OP\| \sin \phi = \rho \sin \phi$. Temos também que $z = \|OQ\| = \|OP\| \cos \phi = \rho \cos \phi$. Desse modo, temos que $x = \|OP'\| \cos \theta = \rho \sin \phi \cos \theta$ e $y = \|OP'\| \sin \theta = \rho \sin \phi \sin \theta$. Assim as coordenadas cartesianas do ponto $P(x, y, z)$ são transformadas para as coordenadas

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \phi;$$

estas são as coordenadas esféricas do ponto P . Note que a variação de ρ, θ e ϕ são dadas da seguinte forma

$$\rho \geq 0, \quad 0 \leq \phi \leq \pi, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Se $\rho_0 > 0$, o gráfico de $\rho = \rho_0$ é uma esfera de raio ρ_0 , com centro na origem 0. Se $0 < \phi_0 < \pi$ então o gráfico de $\phi = \phi_0$ é um meio cone de vértice na origem 0. O gráfico de $\theta = \theta_0$ é um semiplano contendo o eixo-z.

Exemplo 37. Se um ponto P tem coordenadas esféricas $(4, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$, ache as coordenadas retangulares e cilíndricas de P .

Solução: Temos que $\rho = 4$, $\phi = \frac{\pi}{6}$ e $\theta = \frac{\pi}{3}$. Então

$$x = 4 \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{3} = 4 \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right) = 1$$

$$y = 4 \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = 4 \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \sqrt{3}$$

$$z = 4 \cos \frac{\pi}{6} = 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2\sqrt{3}$$

Para achar as coordenadas cilíndricas de P , temos que

$$r^2 = x^2 + y^2 = 1 + 3 = 4$$

e então $r = 2$. Assim as coordenadas cilíndricas de P são $(2, \frac{\pi}{3}, 2\sqrt{3})$.

Exemplo 38. *Ache uma equação em coordenadas esféricas cujo gráfico seja o parabolóide $z = x^2 + y^2$.*

Solução: Temos que

$$\begin{aligned} \rho \cos \phi &= \rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi \cos^2 \theta + \rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi \operatorname{sen}^2 \theta \\ &= \rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi \end{aligned}$$

ou

$$\rho (\cos \phi - \rho \operatorname{sen}^2 \phi) = 0$$

segue que

$$\rho \operatorname{sen}^2 \phi = \cos \phi$$

ou

$$\rho = \frac{\cos \phi}{\operatorname{sen}^2 \phi}$$

ou ainda

$$\rho = \cot \phi \cos \sec \phi.$$

Exemplo 39. *Transforme a equação $\rho = 2 \operatorname{sen} \phi \cos \theta$ para coordenadas retangulares e descreva seu gráfico.*

Solução: Temos que

$$\rho^2 = 2\rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta$$

ou

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2x$$

ou ainda

$$(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Logo essa é a equação da esfera de raio 1 centrada no ponto $(1, 0, 0)$.

6.1 Integral em coordenadas esféricas

Considerando um elemento esférico temos que

$$\|PR\| = \rho_k \Delta\phi_k, \quad \|RS\| = \|RP'\| \Delta\theta_k, \quad \|RP'\| = \rho_k \sin\phi_k, \quad \|PT\| = \Delta\rho_k$$

assim

$$\begin{aligned}\Delta V_k &= \rho_k \Delta\phi_k \rho_k \sin\phi_k \Delta\theta_k \Delta\rho_k \\ &= \rho_k^2 \sin\phi_k \Delta\rho_k \Delta\phi_k \Delta\theta_k\end{aligned}$$

formamos a soma de Riemann

$$\sum_k f(r_k, \phi_k, \theta_k) \Delta V_k$$

daí concluímos que: se supomos f uma função de ρ, ϕ e θ contínua numa região da forma

$$Q = \{(\rho, \phi, \theta); a \leq \rho \leq b, c \leq \phi \leq d, m \leq \theta \leq n\}$$

a integral de f sobre Q é

$$\iiint_Q f(r, \phi, \theta) dV = \int_m^n \int_c^d \int_a^b f(\rho, \phi, \theta) \rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta.$$

Exemplo 40. Ache o centróide de um sólido hemisférico Q de raio a .

Solução: Basta achar $\bar{z}$, temos

$$\begin{aligned}M_{xy} &= \iiint_Q z dV \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a (\rho \cos\phi) \rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^a \sin\phi \cos\phi d\phi d\theta \\ &= \frac{a^4}{4} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\sin^2\phi}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \\ &= \frac{a^4}{8} [\theta]_0^{2\pi} = \frac{1}{4} \pi a^4.\end{aligned}$$

Logo,

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{V} = \frac{\frac{1}{4} \pi a^4}{\frac{2}{3} \pi a^3} = \frac{3}{8} a.$$

6.2 Mudança de variável em coordenadas esféricas

Suponha R seja uma região do espaço onde está definida uma função $f(x, y, z)$ então o teorema de mudança de variáveis em coordenadas esféricas nos afirma que

$$\iiint_R f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{R_1} f(\rho \cos \phi \cos \theta, \rho \cos \phi \sin \theta, \rho \sin \phi) \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$$

onde R_1 é uma região do espaço- $\rho\phi\theta$, onde a integral em coordenadas esféricas se torna mais simples.

Exemplo 41. Ache o volume do sólido acima do cone $z^2 = x^2 + y^2$ e interior à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$.

Solução: Em coordenadas esféricas temos

$$\rho^2 = 4\rho \cos \phi \text{ ou } \rho = 4 \cos \phi \text{ (Esfera de raio 2 centrada no ponto } (0, 0, 2) \text{)}$$

e

$$\phi = \frac{\pi}{4} \text{ (cone)}$$

Logo o volume do sólido é

$$V = \iiint_S dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{4 \cos \phi} \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta = 8\pi.$$

Exemplo 42. Ache o volume do sólido delimitado pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, pelo cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e pelo plano- xy . Ache o centróide.

Solução: O cilindro em coordenadas esféricas é

$$\rho^2 \sin^2 \phi = 4 \Rightarrow \rho = 2 / \sin \phi$$

e o cone é

$$\phi = \frac{\pi}{4}.$$

Logo, o volume do sólido é

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2/\sin \phi} \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{8}{3} \frac{1}{\sin^2 \phi} \, d\phi \, d\theta \\
 &= \frac{8}{3} \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \sec^2 \phi \, d\phi \, d\theta \\
 &= \frac{8}{3} \int_0^{2\pi} -\cot \tan \phi \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \\
 &= \frac{16}{3} \pi
 \end{aligned}$$

Para encontrar o centróide, basta calcular o $\bar{z}$, isto é, só precisamos calcular o M_{xy} :

$$M_{xy} = \iiint_Q z dV = \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2/\sin \phi} \rho \cos \phi \, \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta = 4\pi$$

Logo,

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{V} = \frac{3}{4}.$$

Exemplo 43. Ache o volume do sólido acima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e interior à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$.

Solução: Usando coordenadas esféricas temos que a equação da esfera de raio 2 e centrada no ponto $(0, 0, 2)$ é

$$\rho^2 = 4\rho \cos \phi \text{ ou } \rho = 4 \cos \phi$$

e a do cone é

$$\phi = \frac{\pi}{4}.$$

O volume do sólido é

$$\begin{aligned}
 V &= \iiint_Q dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{4\cos\phi} \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \\
 &= 2\pi \int_0^{\pi/4} \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^{4\cos\phi} \sin\phi \, d\phi \\
 &= 2\pi \int_0^{\pi/4} \frac{4^3}{3} \cos^3\phi \sin\phi \, d\phi \\
 &= \frac{2 \cdot 4^2 \cdot \pi}{3} [-\cos^4\phi]_0^{\pi/4} = \frac{2 \cdot 4^2 \cdot \pi}{3} \left[-\left[\frac{\sqrt{2}}{2} \right]^4 + 1 \right] \\
 &= 8\pi
 \end{aligned}$$

Em coordenadas cilíndricas temos

$$\begin{aligned}
 V &= \iint_R \left[\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2+\sqrt{4-x^2-y^2}} dz \right] dA = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_r^{2+\sqrt{4-r^2}} r \, dz \, dr \, d\theta \\
 &= 2\pi \int_0^2 r [2 + \sqrt{4-r^2} - r] \, dr = 2\pi \int_0^2 (2r + r\sqrt{4-r^2} - r^2) \, dr \\
 &= 2\pi \left[r^2 - \frac{r^3}{3} \right]_0^2 + 2\pi \int_0^2 r\sqrt{4-r^2} \, dr = 2\pi \left[4 - \frac{8}{3} \right] - \frac{2\pi}{3} [4-r^2]^{3/2} \Big|_0^2 \\
 &= 8\pi.
 \end{aligned}$$

Exemplo 44. Se esse sólido tiver densidade uniforme qual o seu centróide?

Solução: Basta calcular $\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}$, onde $M = V = 8\pi$.

$$\begin{aligned}
 M_{xy} &= \iiint_Q z dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{4\cos\phi} \rho \cos\phi \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \\
 &= 2\pi \int_0^{\pi/4} \cos\phi \sin\phi \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^{4\cos\phi} d\phi = \frac{2 \cdot 4^4 \cdot \pi}{4} \int_0^{\pi/4} \cos^5\phi \sin\phi \, d\phi \\
 &= 2 \cdot 4^3 \cdot \pi \left[-\frac{\cos^6\phi}{6} \right]_0^{\pi/4} = \frac{4^3 \pi}{3} \left[-\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^6 + 1 \right] \\
 &= \frac{4^3 \pi 7}{3 \cdot 2 \cdot 4} = \frac{56\pi}{3}.
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\bar{z} = \frac{56\pi}{3 \cdot 8\pi} = \frac{7}{3}.$$

Portanto, o centróide é: $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, 0, \frac{7}{3})$.

Exemplo 45. Calcule em coordenadas esféricas a integral

$$\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} (x^2 + y^2 + z^2) \, dz \, dy \, dx.$$

Solução: Temos que

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} (x^2 + y^2 + z^2) \, dz \, dy \, dx &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_{4/\cos\phi}^8 \rho^2 \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \\ &+ \int_0^{2\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^{4/\cos\phi} \rho^4 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \end{aligned}$$

7 Funções com valores vetoriais

Uma função que associa a cada valor real, um vetor, é chamada uma função com valor vetorial. Denotaremos tais funções por $\mathbf{r}$ ou $\vec{r}$.

$$\mathbf{r} : X \rightarrow Y = \{\text{conjunto de vetores do plano ou do espaço}\}, \quad X \subset \mathbb{R}.$$

Se $\mathbf{r}$ é uma função vetorial, então para cada t em X existe um único vetor $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Como para cada t , existe um valor (x, y, z) associado a ele, então $x = f(t)$, $y = g(t)$ e $z = h(t)$, onde f, g e h estão definidas em X com valores reais. Logo podemos escrever

$$\mathbf{r}(t) = (f(t), g(t), h(t)) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k} \quad (1)$$

para todo t em X .

A recíproca é verdadeira, se f, g e h são funções de X em $\mathbb{R}$, então podemos definir uma função vetorial $\mathbf{r}(t)$, por meio de (1). $\mathbf{r}$ é uma função vetorial se, e somente se, $\mathbf{r}(t)$ puder ser expressa na forma (1). O domínio de $\mathbf{r}(t)$ é a interseção dos domínios de f, g e h .

Exemplo 46. Se $\mathbf{r}(t) = 3t^2\mathbf{i} + 2t^3\mathbf{j} + (t-2)\mathbf{k}$, determine $\mathbf{r}(1)$, $\mathbf{r}(0)$.

Solução:

$$\mathbf{r}(1) = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}, \quad \mathbf{r}(0) = -2\mathbf{k}.$$

Uma curva no espaço é um conjunto $\mathcal{C}$ de ternos ordenados da forma

$$(f(t), g(t), h(t))$$

onde as funções f, g e h são contínuas num intervalo I da reta. O gráfico de $\mathcal{C}$ num sistema de coordenadas retangulares é o conjunto de todos os pontos $P(f(t), g(t), h(t))$ que correspondem aos ternos ordenados em $\mathcal{C}$. As equações

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t) \quad (2)$$

onde t pertence a I , são as equações paramétricas de $\mathcal{C}$. Se $I = [a, b]$ e $\mathcal{C}$ não se auto intercepta, exceto possivelmente, no ponto $P(a) = P(b)$, então pode-se mostrar que o comprimento L de $\mathcal{C}$ do ponto $P(a)$ ao ponto $P(b)$ é dado por

$$L = \int_a^b \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2 + (h'(t))^2} dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt. \quad (3)$$

Considere uma função vetorial $\mathbf{r}$, onde $\mathbf{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$. O gráfico de $\mathbf{r}(t)$ pode ser descrito na figura abaixo.

Exemplo 47. Seja $\mathbf{r}(t) = a \cos t \mathbf{i} + b \sin t \mathbf{j} + bt \mathbf{k}$, $t \in \mathbb{R}$, e seja $\overrightarrow{OP}$ o vetor posição de $\mathbf{r}(t)$.

- (a) Esboce o gráfico da curva $\mathcal{C}$ descrita por P ao variar t .
- (b) Determine o comprimento de $\mathcal{C}$ entre os pontos correspondentes a $t = 0$ e $t = 2\pi$.

Solução: O gráfico da curva $\mathcal{C}$ é dado pela figura.

(b) O comprimento de $\mathcal{C}$ entre os pontos correspondentes a $t = 0$ e $t = 2\pi$, é calculado por

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2} dt = 2\pi \sqrt{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

8 Derivadas e Integrais de funções vetoriais

Se $\mathbf{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$ então

$$\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{r}(t) = \left(\lim_{t \rightarrow a} f(t), \lim_{t \rightarrow a} g(t), \lim_{t \rightarrow a} h(t) \right)$$

desde que f, g e h tenham limites quando t tende a a . Uma função vetorial $\mathbf{r}(t)$ é contínua num ponto a se

$$\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(a)$$

segue que $\mathbf{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$ é contínua em a se, e somente se, f, g e h o são.

Se $\mathbf{r}(t)$ é uma função vetorial, então a derivada de $\mathbf{r}(t)$ é uma função vetorial $\mathbf{r}'(t)$ definida por

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)]$$

para todo t , tal que o limite exista.

Teorema 48. *Se*

$$\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$$

onde f, g e h são funções diferenciáveis, então

$$\mathbf{r}'(t) = f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j} + h'(t)\mathbf{k}.$$

Exemplo 49. *Considere a função vetorial dada por*

$$\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + \ln(t+1)\mathbf{j} + \sin t\mathbf{k}$$

Encontre sua derivada.

Solução:

$$\mathbf{r}'(t) = 2t\mathbf{i} + \frac{1}{t+1}\mathbf{j} + \cos t\mathbf{k}.$$

Teorema: Sejam u e v duas funções vetoriais e $c \in \mathbb{R}$ então temos o seguinte resultado.

- a) $D_t(u(t) + v(t)) = u'(t) + v'(t).$
- b) $D_t(cu(t)) = cu'(t).$
- c) $D_t(u(t) \cdot v(t)) = u(t) \cdot v'(t) + u'(t) \cdot v(t).$
- d) $D_t(u(t) \times v(t)) = u(t) \times v'(t) + u'(t) \times v(t).$

9 Comprimento de arco

Seja C uma curva suave dada parametricamente por

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad a \leq t \leq b.$$

Suponhamos que, além disso, que C não intercepta a si própria, isto é, que valores diferentes de t entre a e b determinam diferentes pontos de C . O comprimento de C de $P(a)$ e $P(b)$ é dado por

$$L = \int_a^b \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2} dt.$$

Seja $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$, $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$, $P_k(f(t_k), g(t_k)) \in C$, correspondente a t_k , temos que a distância de P_{k-1} a P_k é dada por

$$d(P_{k-1}, P_k) = \sqrt{(f(t_k) - f(t_{k-1}))^2 + (g(t_k) - g(t_{k-1}))^2}.$$

Logo, o comprimento da poligonal que liga os pontos de P_0 a P_k é

$$L_P = \sum_{k=1}^n d(P_{k-1}, P_k),$$

o comprimento da curva será

$$L = \lim_{|P| \rightarrow 0} L_P.$$

Usando o teorema do valor médio temos

$$\frac{f(t_k) - f(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} = f'(w_k) \Delta t_k$$

e

$$\frac{g(t_k) - g(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} = g'(w_k^*) \Delta t_k$$

desse modo

$$d(P_{k-1}, P_k) = \sqrt{(f'(w_k))^2 + (g'(w_k^*))^2} \Delta t_k$$

e assim

$$L = \lim_{|P| \rightarrow 0} L_P = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \sqrt{(f'(w_k))^2 + (g'(w_k^*))^2} \Delta t_k$$

logo

$$L = \int_a^b \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2} dt.$$

Exemplo 50. Calcule o comprimento de arco da curva C parametrizada por $\mathbf{r}(t) = \frac{t^2}{2}\mathbf{i} + \frac{t^3}{3}\mathbf{j}$, com $0 \leq t \leq 2$.

Solução: O comprimento de arco da curva C é:

$$L = \int_0^2 \sqrt{t^2 + t^4} dt = \int_0^2 t \sqrt{1 + t^2} dt = \frac{1}{2} \int_1^5 \sqrt{u} du = \frac{1}{3} [u^{3/2}]_1^5 = \frac{1}{3} [5^{3/2} - 1].$$

Um caminho regular é uma curva C contínua representada por uma função vetorial $\mathbf{r}: J \rightarrow \mathbb{R}^3$ contínua em J e com derivada $\mathbf{r}'$ contínua em

J . Um caminho é regular por pedaços se ele é a união finita de caminhos regulares.

Seja $\mathbf{r}$ um caminho com derivada $\mathbf{r}'$ contínua no intervalo $J = [a, b]$. A função comprimento de arco s é dado por

$$s(t) = \int_a^t \|\mathbf{r}'(u)\| du$$

A derivada do comprimento de arco é

$$s'(t) = \|\mathbf{r}'(t)\|.$$

Ou seja, se $\mathbf{r}: J \rightarrow \mathbb{R}^3$ é um caminho no plano, por exemplo, então

$$\mathbf{r}(t) = g(t)i + h(t)j, \quad a \leq t \leq b, \quad J = [a, b],$$

desse modo,

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{(g'(u))^2 + (h'(u))^2} du$$

e

$$s'(t) = \sqrt{(g'(t))^2 + (h'(t))^2}.$$

Se uma curva C regular, representada pela função vetorial $\mathbf{r}$ e parametrizada pelo comprimento de arco, então o vetor tangente $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ é unitário em cada ponto da curva.

Exemplo 51. Considere a curva $\vec{\alpha}$ parametrizada por

$$\vec{\alpha} = \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t, \quad 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Parametrize essa curva pelo comprimento de arco e note que o vetor tangente $\vec{\alpha}'$ a essa curva, em cada ponto, é unitário.

Solução: Seja

$$s = \int_0^t \sqrt{1 + 1} dt = \sqrt{2}t$$

assim, $t = \frac{s}{\sqrt{2}}$. Temos então que

$$\vec{\alpha}(s) = \begin{cases} x = \frac{s}{\sqrt{2}} \\ y = 1 - \frac{s}{\sqrt{2}}, \quad 0 \leq s \leq \sqrt{2} \end{cases}$$

Daí

$$\vec{\alpha}'(s) = \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}}, & 0 \leq s \leq \sqrt{2} \end{cases}$$

e

$$\|\vec{\alpha}'(s)\| = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1.$$

Exemplo 52. A curva $C: \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2 \sin \frac{1}{t} \mathbf{j}$, $t \neq 0$, $\mathbf{r}(0) = 0$ não é regular, $0 \leq t \leq 1$.

De fato,

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + \left(2t \sin \frac{1}{t} - \cos \frac{1}{t}\right) \mathbf{j}, \quad t \neq 0.$$

$\mathbf{r}'(0)$ não existe o que implica em $\mathbf{r}'$ não regular.

Uma curva tem infinitas parametrizações e também podemos parametrizar a mesma curva C de modo que a orientação dessa curva mude de sentido. Por exemplo, considere a curva C dada por

$$C: \begin{cases} x = t \\ y = t^2, & 0 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

e podemos representar a mesma curva por

$$-C: \begin{cases} x = -t \\ y = t^2, & -2 \leq t \leq 0. \end{cases}$$

Dois caminhos α e β que representam a mesma curva são ditos equivalentes.

Tudo que fizemos até agora, pode ser feito para curvas definidas no espaço, por exemplo, se uma curva $C: x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$, $a \leq t \leq b$, ou podemos considerar a curva representada por uma função vetorial $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$. Então o comprimento da curva C é dado por

$$L = \int_a^b \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2 + (h'(t))^2} dt$$

e a função comprimento de arco é dada por

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{(f'(u))^2 + (g'(u))^2 + (h'(u))^2} du$$

e podemos também considerar a curva parametrizada pelo comprimento de arco s .

10 Campos Vetoriais

Um campo vetorial em três dimensões é uma função $\vec{F}$ cujo domínio D é um subconjunto do $\mathbb{R}^3$ e cujo contradomínio é um subconjunto do $\mathbb{R}^3$, ou seja,

$$\begin{aligned}\vec{F} : \quad \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\rightarrow F(x, y, z)\end{aligned}$$

onde

$$\vec{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}$$

e M , N e P são funções escalares.

Em duas dimensões

$$\vec{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$$

Definição 53. *Seja $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ o vetor posição de (x, y, z) e denotemos por $\vec{u} = \frac{1}{\|\mathbf{r}\|}\mathbf{r}$ o vetor unitário com a mesma direção de $\mathbf{r}$. Um campo vetorial $\vec{F}$ é um campo quadrado inverso se*

$$\vec{F}(x, y, z) = \frac{c}{\|\mathbf{r}\|^2} \vec{u} = \frac{c}{\|\mathbf{r}\|^3} \mathbf{r}$$

Note que

$$\vec{F}(x, y, z) = \frac{c}{\|\mathbf{r}\|^3} \mathbf{r} = \frac{c}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$$

Exemplos: Força de gravidade. Lei de gravitação universal de Newton

$$\vec{F}(x, y, z) = -G \frac{m_0 m}{\|\mathbf{r}\|^2} \vec{u}.$$

Lei de Coulomb

$$\vec{F}(x, y, z) = -c \frac{Qq}{\|\mathbf{r}\|^2} \vec{u}.$$

Se f é uma função escalar então ∇f é um campo vetorial definido por

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}.$$

Um campo vetorial $\vec{F}$ é conservativo se

$$\vec{F}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z)$$

para alguma função escalar f .

Se $\vec{F}$ é conservativo, então a função f é a função potencial para $\vec{F}$, $f(x, y, z)$ é o potencial no ponto (x, y, z) .

Observação 54. Se (x_0, y_0, z_0) está no domínio de $\vec{F} = \nabla f$, então o vetor gradiente $\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \vec{F}(x_0, y_0, z_0)$ é normal à superfície de nível S de f que contém o ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$.

A superfície S é o gráfico de $f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0)$.

Todo vetor $\vec{F}(x_0, y_0, z_0)$ num campo vetorial conservativo é normal à superfície de nível de uma função potencial f para $\vec{F}$ que contém $P_0(x_0, y_0, z_0)$.

Teorema 55. Todo campo vetorial quadrado inverso é conservativo.

Prova: Seja $\vec{F}$ um campo quadrado inverso, isto é,

$$\vec{F}(x, y, z) = \frac{cx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{i} + \frac{cy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{j} + \frac{cz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{k}$$

se considerarmos

$$f(x, y, z) = \frac{-c}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} = -\frac{c}{r}, \quad \text{onde } r = \|\mathbf{r}\| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

então

$$\nabla f(x, y, z) = \vec{F}(x, y, z).$$

As superfícies de nível para f são os gráficos da equação

$$-\frac{c}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} = k, \quad (k < 0)$$

Assim

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{c^2}{k^2}.$$

As superfícies são esferas com centro na origem.

Definição 56. Se $\vec{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}$ onde M, N e P tem derivadas parciais em alguma região. O rotacional de $\vec{F}$ é dado por

$$\text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mathbf{k}.$$

Notação:

$$\text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix}$$

Exemplo 57. Seja $\vec{F}(x, y, z) = xy^2z^4\mathbf{i} + (2x^2y + z)\mathbf{j} + y^3z^2\mathbf{k}$, ache $\nabla \times \vec{F}$.

Solução: $\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy^2z^4 & 2x^2y + z & y^3z^2 \end{vmatrix} = (3y^2z^2 - 1)\mathbf{i} + 4xy^2z^3\mathbf{j} + (4xy - 2xyz^4)\mathbf{k}$.

Definição 58. Seja $\vec{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}$, com M, N e P com derivadas parciais em alguma região. A divergência de $\vec{F}$, é dada por

$$\text{div } F = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Exemplo 59. Se $\vec{F}(x, y, z) = xy^2z^4\mathbf{i} + (2x^2y + z)\mathbf{j} + y^3z^2\mathbf{k}$, ache o $\text{div } F$.

Solução:

$$\text{div } F = y^2z^4 + 2x^2 + 2y^3z.$$

11 Integrais Curvilíneas

Seja f uma função contínua definida numa região D do plano-xy que contém a curva suave $C : x = \alpha(t), y = \beta(t), a \leq t \leq b$.

Particionando o intervalo $[a, b]$

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

Denotemos por $|P|$ a norma desta partição. Se $P_k(x_k, y_k)$ é o ponto em C correspondente a t_k , então os pontos $P_0, P_1, \dots, P_n$ dividem C em n partes $\overline{P_{k-1}P_k}$. Seja

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \quad \Delta y_k = y_k - y_{k-1}, \quad \Delta s_k = \text{comprimento de } \overline{P_{k-1}P_k}$$

Para cada k , seja $Q_k(u_k, v_k)$ um ponto em $\overline{P_{k-1}P_k}$. Consideremos os três seguintes somatórios

$$\sum_k f(u_k, v_k) \Delta s_k, \quad \sum_k f(u_k, v_k) \Delta x_k, \quad \sum_k f(u_k, v_k) \Delta y_k$$

Definimos as integrais curvilíneas se os limites existirem

$$\int_C f(x, y) ds = \lim_{|p| \rightarrow 0} \sum_k f(u_k, v_k) \Delta s_k \quad (4)$$

$$\int_C f(x, y) dx = \lim_{|p| \rightarrow 0} \sum_k f(u_k, v_k) \Delta x_k \quad (5)$$

$$\int_C f(x, y) dy = \lim_{|p| \rightarrow 0} \sum_k f(u_k, v_k) \Delta y_k. \quad (6)$$

Se f é contínua em D , então os limites em (4), (5) e (6) existem e são os mesmos para toda parametrização de C (desde que se adote a mesma orientação). Usando a parametrização de $C : x = \alpha(t)$, $y = \beta(t)$, $a \leq t \leq b$, temos

$$dx = \alpha'(t)dt, \quad dy = \beta'(t)dt, \quad ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{(\alpha'(t))^2 + (\beta'(t))^2} dt$$

Temos então o resultado.

Teorema 60. *Se uma curva suave C é dada por $x = \alpha(t)$, $y = \beta(t)$, $a \leq t \leq b$ e se $f(x, y)$ é contínua numa região D contendo C , então*

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(\alpha(t), \beta(t)) \sqrt{(\alpha'(t))^2 + (\beta'(t))^2} dt$$

$$\int_C f(x, y) dx = \int_a^b f(\alpha(t), \beta(t)) \alpha'(t) dt$$

$$\int_C f(x, y) dy = \int_a^b f(\alpha(t), \beta(t)) \beta'(t) dt.$$

Observação 61. *Tal resultado pode ser estendido para curvas parcialmente suaves, isto é, se*

$$C = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n$$

então

$$\int_C f(x, y) ds = \int_{C_1} f(x, y) ds + \int_{C_2} f(x, y) ds + \dots + \int_{C_n} f(x, y) ds.$$

Também

$$\int_C f(x, y) ds = - \int_{-C} f(x, y) ds$$

e

$$\int_C (f(x, y) + g(x, y)) ds = \int_C f(x, y) ds + \int_C g(x, y) ds.$$

Exemplo 62. Calcule $\int_C xy^2 ds$ se C admite a parametrização

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

Solution 1. Aplicando o Teorema obtemos

$$\int_C xy^2 ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t (\sin^2 t) \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t) \cos t dt = \frac{1}{3}.$$

Exemplo 63. Calcule $\int_C xy^2 dx$ e $\int_C xy^2 dy$ se C é a parte da parábola $y = x^2$ de $(0, 0)$ a $(2, 4)$.

Solution 2. As equações paramétricas de C são

$$x = t, \quad y = t^2, \quad 0 \leq t \leq 2$$

As diferenciais são

$$dx = dt, \quad dy = 2t dt$$

assim

$$\int_C xy^2 dx = \int_0^2 t(t^2)^2 dt = \int_0^2 t^5 dt = \left[\frac{t^6}{6} \right]_0^2 = \frac{32}{3},$$

$$\int_C xy^2 dy = \int_0^2 t(t^2)^2 2t dt = 2 \int_0^2 t^6 dt = \frac{2}{7} [t^7]_0^2 = \frac{256}{7}.$$

Podíamos ter feito: $y = x^2$, $0 \leq x \leq 2$, assim $dx = dx$ e $dy = 2x dx$

$$\int_C xy^2 dx = \int_0^2 x(x^2)^2 dx = \int_0^2 x^5 dx = \frac{32}{3}$$

$$\int_C xy^2 dy = \int_0^2 x(x^2)^2 2x dx = 2 \int_0^2 x^6 dx = \frac{256}{7}.$$

Considere a função vetorial $\vec{F}$ com domínio D onde a curva $C : \vec{r}(t) = \alpha(t)\mathbf{i} + \beta(t)\mathbf{j}$, $a \leq t \leq b$, está inserida. Definimos

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt$$

em outras palavras podemos dizer que se $\vec{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ e $\vec{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ então

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C M(x, y) dx + N(x, y) dy.$$

Se $\vec{r}$ e $\vec{s}$ representam dois caminhos equivalentes e regulares então

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

sempre que $\vec{r}$ e $\vec{s}$ originem C na mesma direção, e

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

se $\vec{r}$ e $\vec{s}$ originam C em direções opostas. O que fizemos para o plano, vale também para o espaço, ou seja, se

$$\vec{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$$

com M , N e P funções escalares e suponha que C parametrizada por

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t), \quad a \leq t \leq b$$

assim

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C Mdx + Ndy + Pdz$$

ou

$$= \int_a^b M(f(t), g(t), h(t))f'(t)dt + \int_a^b N(f(t), g(t), h(t))g'(t)dt + \int_a^b P(f(t), g(t), h(t))h'(t)dt.$$

Exemplo 64. Seja $\vec{F}$ um campo vetorial

$$\vec{F}(x, y) = \sqrt{y}\mathbf{i} + (x^3 + y)\mathbf{j}$$

calcular a integral de linha de $\vec{F}$ desde $(0, 0)$ a $(1, 1)$ ao longo das curvas

- a) a reta L de equações paramétricas $x = t$, $y = t$, $0 \leq t \leq 1$;
- b) o caminho C de equações paramétricas $x = t^2$, $y = t^3$, $0 \leq t \leq 1$.

Solution 3. Para o caminho de parte (a) seja $\vec{\alpha}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j}$. Então $\vec{\alpha}'(t) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ e $\vec{F}(\vec{\alpha}(t)) = \sqrt{t}\mathbf{i} + (t^3 + t)\mathbf{j}$, assim,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\alpha} = \int_{(0,0)}^{(1,1)} \vec{F} \cdot d\vec{\alpha} = \int_0^1 (\sqrt{t} + t^3 + t) dt = \left(\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + \frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{17}{12}$$

(b) Tomamos $\vec{\alpha}(t) = t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}$, então $\vec{\alpha}'(t) = 2t\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j}$ e

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\alpha} = \int_0^1 \vec{F}(\vec{\alpha}(t)) \cdot d\vec{\alpha}'(t) = \int_0^1 (2t^{\frac{5}{2}} + 3t^8 + 3t^5) dt = \frac{59}{42}.$$

Observação 65. Eis um exemplo em a integral depende do caminho em que se está integrando.

11.1 Aplicação

Imagine uma curva C no espaço tridimensional como um fio de arame delgado com densidade variável. Suponha que a densidade é expressa por $\delta(x, y, z)$. A massa total do arame é

$$m = \int_C \delta(x, y, z) ds$$

o centro de gravidade se define por

$$\bar{x}m = \int_C x\delta(x, y, z)ds, \quad \bar{y}m = \int_C y\delta(x, y, z)ds, \quad \bar{z}m = \int_C z\delta(x, y, z)ds.$$

Um arame de densidade constante se chama uniforme. Neste caso, o centro de gravidade é o centróide.

Exemplo 66. Calcular a massa do arame m de uma mola que tem a forma de uma hélice cuja equação vetorial é

$$\vec{\alpha}(t) = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j} + bt \mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

se a densidade em (x, y, z) é $\delta(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Solution 4. A integral para calcular M é

$$\begin{aligned} M &= \int_C (x^2 + y^2 + z^2) ds \\ &= \int_0^{2\pi} (a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t + b^2 t^2) \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2 + (bt)^2} dt \end{aligned}$$

dai

$$M = \sqrt{a^2 + b^2} \int_0^{2\pi} (a^2 + b^2 t^2) dt = \sqrt{a^2 + b^2} \left(2\pi a^2 + \frac{8}{3} \pi^3 b^2 \right).$$

Neste exemplo,

$$\begin{aligned} \bar{z}M &= \int_C z\delta(x, y, z)ds = \int_C z(x^2 + y^2 + z^2) ds \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \int_0^{2\pi} bt(a^2 + b^2 t^2) dt = b\sqrt{a^2 + b^2} (2\pi^2 a^2 + 4\pi^4 b^2). \end{aligned}$$

Assim

$$\bar{z} = \frac{2\pi a^2 + \frac{8}{3}\pi^3 b^2}{b(2\pi^2 a^2 + 4\pi^4 b^2)}.$$

De modo análogo, se calcula $\bar{x}$ e $\bar{y}$.

O momento de inércia de um arame delgado de densidade δ , em relação a uma reta L é definido por

$$I_L = \int_C d^2(x, y, z) \delta(x, y, z) ds,$$

onde $d(x, y, z)$ é a distância de um ponto (x, y, z) de C a L e $\delta(x, y, z)$ é a densidade do arame.

Exemplo 67. Calcular o momento de inércia I_z da mola do exemplo anterior.

Solution 5. $d(x, y, z) = x^2 + y^2 = a^2$ e $\delta(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ então

$$I_z = \int_C (x^2 + y^2) (x^2 + y^2 + z^2) ds = a^2 \int_C (x^2 + y^2 + z^2) ds = a^2 M.$$

11.2 Aplicação

Considere $\vec{F}$ um campo de forças: $\vec{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}$. Queremos calcular o trabalho realizado pelo campo de forças ao longo de uma curva C .

C parametrizada por:

$$x = g(t), \quad y = h(t), \quad z = k(t), \quad a \leq t \leq b.$$

Considere uma partição de $[a, b]$

$$P = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}.$$

Para o ponto $P_k(x_k, y_k, z_k)$ há um valor t_k associado. Denotamos

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \quad \Delta y_k = y_k - y_{k-1}, \quad \Delta z_k = z_k - z_{k-1}.$$

$\overrightarrow{P_{k-1}P_k} = \Delta x_k \mathbf{i} + \Delta y_k \mathbf{j} + \Delta z_k \mathbf{k}$. Tomemos a soma de Riemann

$$\begin{aligned} \sum_k \vec{F}_k \cdot \overrightarrow{P_{k-1}P_k} &= \sum_k (M_k \mathbf{i} + N_k \mathbf{j} + P_k \mathbf{k}) (\Delta x_k \mathbf{i} + \Delta y_k \mathbf{j} + \Delta z_k \mathbf{k}) \\ &= \sum_k (M_k \Delta x_k + N_k \Delta y_k + P_k \Delta z_k) \end{aligned}$$

daí

$$\lim_{|p| \rightarrow 0} \sum_k (M_k \Delta x_k + N_k \Delta y_k + P_k \Delta z_k) = \int_C M dx + N dy + P dz.$$

Se s é parâmetro de comprimento de arco da curva C e $\vec{r}$ é o vetor posição do ponto na curva

$$\vec{r}(s) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

onde $x = g(s)$, $y = h(s)$, $z = k(s)$ então o vetor tangente a curva C em cada ponto é

$$\vec{T}(s) = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j} + \frac{dz}{ds}\mathbf{k}$$

A componente tangencial da força $\vec{F}$ em cada ponto é:

$$\vec{F} \cdot \vec{T}(s) = M \frac{dx}{ds} + N \frac{dy}{ds} + P \frac{dz}{ds}.$$

Logo, se $a \leq s \leq b$, temos que

$$\begin{aligned} W &= \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(s) \cdot \vec{T}(s) ds \\ &= \int_C \left(M \frac{dx}{ds} + N \frac{dy}{ds} + P \frac{dz}{ds} \right) ds \end{aligned}$$

Exemplo 68. Se $\vec{F}(x, y) = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + (2xy)\mathbf{j}$, calcular $\int_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds$ sobre as seguintes curvas

- (a) de $(0, 0)$ a $(1, 1)$ sobre a reta $y = x$;
- (b) de $(0, 0)$ a $(1, 1)$ sobre a curva $y = x^2$.

Solution 6. (a) Podemos parametrizar a reta $y = x$, por

$$x = t, \quad y = t, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Assim

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds &= \int_C (x^2 + y^2) dx + (2xy) dy \\ &= \int_0^1 [(t^2 + t^2) + (2t^2)] dt \\ &= \int_0^1 4t^2 dt = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Analogamente, para o caso (b) temos se a parábola for parametrizada por

$$x = t, \quad y = t^2, \quad 0 \leq t \leq 1$$

assim

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds = \int_0^1 [(t^2 + t^4) + (2t^2) 2t] dt = \int_0^1 (t^2 + 5t^4) dt = \frac{4}{3}.$$

Exemplo 69. A força gravitacional na vizinhança de um ponto da superfície da Terra é representada por $-mg\mathbf{j}$, onde o eixo- y aponta para cima. Mostrar que o trabalho realizado por essa força sobre um corpo que se desloca, num plano vertical, da altura h_1 até a altura h_2 , seguindo qualquer caminho é igual a $mg(h_1 - h_2)$.

Solution 7. Seja $\vec{F} = -mg\mathbf{j}$, a força de gravidade que atua no corpo numa posição $\vec{r}$ se esse $\vec{r}$ representa a curva em que o corpo está se deslocando podemos dizer que

$$\vec{r}(t) = \alpha(t)\mathbf{i} + \beta(t)\mathbf{j}$$

onde $\alpha(0) = 0$ e $\beta(0) = h_1$ e $\alpha(1) = 1$ e $\beta(1) = h_2$, o trabalho que atua no corpo será dado por

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_0^1 mg\beta'(t)dt = -mg(\beta(t)) \Big|_0^1 = -mg(h_2 - h_1) = mg(h_1 - h_2).$$

Exemplo 70. Seja C a parte da parábola $y = x^2$ entre os pontos $(0,0)$ e $(3,9)$. Se $\vec{F}(x,y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ é uma força que atua em (x,y) , ache o trabalho realizado por $\vec{F}$ ao longo de C de

- (a) $(0,0)$ a $(3,9)$ (b) $(3,9)$ a $(0,0)$.

Solution 8. $C : x = t, y = t^2, 0 \leq t \leq 3$, obtemos

$$\begin{aligned} W &= \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C -ydx + xdy \\ &= \int_0^3 (-t^2 + (2t)t) dt = \int_0^3 t^2 dt = 9. \end{aligned}$$

11.3 Independência do Caminho

Integrais que tem o mesmo valor ao longo de qualquer caminho que una dois pontos A e B são integrais independentes do caminho.

Se a integral $\int_C f(x,y)ds$ é independente do caminho então podemos denotá-la por $\int_A^B f(x,y)ds$. Analogamente vale para $\int_C f(x,y)dx$ e $\int_C f(x,y)dy$ e integrais em três dimensões.

Região Conexa: Dois pontos quaisquer da região podem ser ligados por uma curva (parcialmente) suave, inteiramente contidas na região.

Teorema 71. Se $\vec{F}(x,y) = M(x,y)\mathbf{i} + N(x,y)\mathbf{j}$ é contínua numa região conexa aberta D , então a integral curvilínea $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ é independente do caminho se, e somente se, $\vec{F}$ é conservativo. Isto é, existe uma função escalar $f(x,y)$ tal que $\nabla f = \vec{F}$.

Demonstração. Suponha que exista f tal que $\nabla f = \vec{F}$

$$\vec{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j} = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}$$

sejam $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2) \in D$ e C uma curva arbitrária ligando A e B então

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C M(x, y) dx + N(x, y) dy = \int_C \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

se C admite a parametrização: $x = g(t)$, $y = h(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, então

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(g(t), h(t)) g'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(t), h(t)) h'(t) \right] dt$$

Pela regra da cadeia

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} [f(g(t), h(t))] dt \\ &= f(g(t_2), h(t_2)) - f(g(t_1), h(t_1)) \\ &= f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1) \\ &= [f(x, y)]_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)}. \end{aligned}$$

Em outras palavras: se $\vec{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ é contínua em D conexa aberta, e C é uma curva parcialmente suave em D com extremidades $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$. Se existe f tal que $\nabla f = \vec{F}$ então

$$\int_{A(x_1, y_1)}^{B(x_2, y_2)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = [f(x, y)]_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)}.$$

Reciprocamente, suponha que a integral seja independente do caminho, defina

$$f(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

para todo $(x, y) \in D$. f depende só de x e y , escolha um círculo D com centro (x, y) e seja (x_1, y) um ponto interior ao círculo $x_1 \neq x$. Temos que

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y)} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{(x_1, y)}^{(x, y)} \vec{F} \cdot d\vec{r} \end{aligned}$$

como a primeira integral não depende de x , temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \int_{(x_1, y)}^{(x, y)} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

seja $\vec{F} \cdot d\vec{r} = M(x, y) dx + N(x, y) dy$ e $dy = 0$ em C_2 , obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \int_{(x_1, y)}^{(x, y)} M(x, y) dx$$

como y é fixo, então M depende só de x . Assim

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = M(x, y).$$

De modo análogo, temos que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = N(x, y)$$

ou seja,

$$\nabla f = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} = \vec{F}.$$

□

Observação 72. A prova do teorema pode ser estendida a curvas parcialmente suaves subdividindo C num número finito de curvas suaves.

Observação 73. A demonstração do teorema anterior nos dá um método para calcular integrais curvilíneas que não dependem do caminho. Descrevemos este método pelo seguinte teorema.

Teorema 74. Seja $\vec{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ contínua numa região aberta conexa D , e C uma curva parcialmente suave em D com extremidades $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$. Se $\vec{F} = \nabla f$, então

$$\begin{aligned} \int_C M(x, y) dx + N(x, y) dy &= \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= [f(x, y)]_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)}. \end{aligned}$$

Se uma integral curvilínea $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ é independente do caminho, então, pelo Teorema anterior com $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ vemos que $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$, para toda curva fechada simples C .

Exemplo 75. Seja $\vec{F}(x, y) = (6xy^2 + 2y)\mathbf{i} + (6x^2y + 2x)\mathbf{j}$.

(a) Mostre que $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ é independente do caminho.

(b) Calcule $\int_{(1,0)}^{(1,1)} \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Demonstração. (a) Pelo Teorema anterior a integral curvilínea é independente do caminho se, e somente se, existe uma função diferenciável $f(x, y)$ tal que

$$\nabla f(x, y) = \vec{F}(x, y)$$

isto é,

$$\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} = (6xy^2 + 2y)\mathbf{i} + (6x^2y + 2x)\mathbf{j}$$

ou

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy^2 + 2y \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 6x^2y + 2x$$

integrando (parcialmente) $\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy^2 + 2y$ em relação a x , obtemos

$$f(x, y) = 3x^2y^2 + 2yx + h(y)$$

onde $h = h(y)$ depende só de y . Diferenciando $f(x, y)$ em relação a y temos

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 6x^2y + 2x + h'(y) = 6x^2y + 2x$$

logo

$$h'(y) = 0$$

o que implica em

$$h(y) = c \quad (c \text{ constante})$$

segue que

$$f(x, y) = 3x^2y^2 + 2yx + c$$

e f é tal que

$$\nabla f(x, y) = \vec{F}(x, y).$$

(b) Como qualquer função potencial serve para calcular a integral, aplicamos o Teorema anterior com $f(x, y) = 3x^2y^2 + 2yx$, assim,

$$\begin{aligned} \int_{(1,0)}^{(1,1)} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= [f(x, y)]_{(1,0)}^{(1,1)} = [3x^2y^2 + 2yx]_{(1,0)}^{(1,1)} \\ &= [(3 \cdot 1^2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 1) - (3 \cdot 1^2 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 \cdot 1)] = 5. \end{aligned}$$

□

Teorema 76. Se $\vec{F}$ é um campo de forças conservativo em duas dimensões então o trabalho realizado por $\vec{F}$ ao longo de qualquer caminho C de $A(x_1, y_1)$ a $B(x_2, y_2)$ é igual à diferença de potenciais entre A e B .

Demonstração. Seja

$$W = \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1).$$

□

Se a integral independe do caminho e se tomamos C curva fechada e $A = B$ então a diferença de potencial é zero, e assim

$$W = 0.$$

Reciprocamente, se $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$, para toda curva fechada C simples, então a integral é independente do caminho e o campo é conservativo.

Exemplo 77. Seja $\vec{F}$ o campo gravitacional de uma partícula de massa m_0 situada na origem de um sistema coordenado xyz . Ache o trabalho realizado por $\vec{F}$ quando uma partícula de massa m se move de $A(2, 3, 4)$ a $B(1, 0, 0)$.

Demonstração. A força gravitacional das duas partícula é dada por

$$\vec{F}(x, y, z) = -G \frac{m_0 m}{\|\vec{r}\|} \vec{r}$$

onde $\vec{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Temos que

$$f(x, y, z) = \frac{Gm_0 m}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}$$

é o potencial de $\vec{F}$. Logo,

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \left[\frac{Gm_0 m}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \right]_{(2,3,4)}^{(1,0,0)} = Gm_0 m \left(1 - \frac{1}{\sqrt{29}} \right)$$

□

Se a integral $\int_C M(x, y) dx + N(x, y) dy$ é independente do caminho, então, pelo teorema anterior, existe uma função f tal que

$$M = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{e} \quad N = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Consequentemente $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ e $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. Se M e N têm derivadas parciais primeiras contínuas, então $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ e

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

A recíproca é falsa, a menos que se ponha restrições sobre o domínio D de $\vec{F}(x, y)$. Em particular, se D é uma região simplesmente conexa (não há buracos), então a condição $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ implica que a integral $\int_C M(x, y) dx + N(x, y) dy$ é independente do caminho.

Teorema 78. *Se M e N têm derivadas parciais primeiras contínuas numa região simplesmente conexa D , então a integral curvilínea*

$$\int_C M(x, y) dx + N(x, y) dy$$

é independente do caminho em D se, e somente se,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Exemplo 79. *Mostre que a integral curvilínea*

$$\int_C (e^{3y} - y^2 \sin x) dx + (3xe^{3y} + 2y \cos x) dy$$

é independente do caminho numa região simplesmente conexa.

Demonstração. Sejam

$$M(x, y) = e^{3y} - y^2 \sin x, \quad N(x, y) = 3xe^{3y} + 2y \cos x$$

vemos que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3e^{3y} - 2y \sin x, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 3e^{3y} - 2y \sin x$$

ou seja

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

logo a integral independe do caminho. □

Exemplo 80. *Determine se a integral $\int_C x^2 y dx + 3xy^2 dy$ é independente do caminho.*

Demonstração. Sejam

$$M(x, y) = x^2 y, \quad N(x, y) = 3xy^2$$

temos que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = x^2, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 3y^2$$

daí

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

segue que a integral depende do caminho. □

Exemplo 81. Seja $\vec{F}(x, y, z) = y^2 \cos x \mathbf{i} + (2y \sin x + e^{2z}) \mathbf{j} + 2ye^{2z} \mathbf{k}$.

(a) Mostre que $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ é independente do caminho, e ache uma função potencial f para $\vec{F}$.

(b) Se $\vec{F}$ é um campo de forças, ache o trabalho realizado por $\vec{F}$ ao longo de qualquer curva C de $(0, 1, \frac{1}{2})$ a $(\frac{\pi}{2}, 3, 2)$.

Demonstração. (a) A integral será independente do caminho se existir uma função diferenciável $f(x, y, z)$ tal que $\nabla f(x, y, z) = \vec{F}(x, y, z)$. Ou seja,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 \cos x,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y \sin x + e^{2z},$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2ye^{2z}.$$

Integrando f_x em relação a x , obtemos

$$f(x, y, z) = y^2 \sin x + g(y, z)$$

diferenciando f em relação a y , temos

$$f_y = 2y \sin x + g_y(y, z) = 2y \sin x + e^{2z}$$

daí

$$g_y(y, z) = e^{2z}$$

integrando g_y em relação a y , obtemos

$$g(y, z) = ye^{2z} + k(z)$$

substituindo esse valor em $f(x, y, z)$ temos

$$f(x, y, z) = y^2 \operatorname{sen} x + ye^{2z} + k(z)$$

diferenciando essa última função em relação a z , temos

$$f_z = 2ye^{2z} + k'(z) = 2ye^{2z}$$

segue que

$$k'(z) = 0$$

o que implica

$$k(z) = c$$

segue que

$$f(x, y, z) = y^2 \operatorname{sen} x + ye^{2z} + c.$$

(b) aplicando o teorema anterior, temos

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= [y^2 \operatorname{sen} x + ye^{2z}]_{\left(0, 1, \frac{1}{2}\right)}^{\left(\frac{\pi}{2}, 3, 2\right)} \\ &= (9 + 3e^4) - (0 + e) = 9 + 3e^4 - e \approx 170. \end{aligned}$$

□

Definição 82. Seja $\vec{F}(x, y, z)$ um campo vetorial de forças conservativo com função potencial f . A energia potencial $p(x, y, z)$ de uma partícula no ponto (x, y, z) é

$$p(x, y, z) = -f(x, y, z).$$

Como a energia potencial é o negativo do potencial $f(x, y, z)$,

$$\vec{F}(x, y, z) = -\nabla p(x, y, z)$$

se A e B são dois pontos, então,

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = [-p(x, y, z)]_A^B = p(A) - p(B)$$

onde $p(A)$ e $p(B)$ denotam a energia potencial em A e B , respectivamente.

A energia cinética é definida por $\frac{1}{2}mv^2$, m é a massa, e v é a velocidade.

Lei de Conservação da Energia:

Se uma partícula se move de um ponto a outro num campo vetorial de forças conservativo, então a soma das energias cinética e potencial permanece constante.

Demonstração. Seja $\vec{F}(x, y, z)$ um campo conservativo de forças, temos

$$C : x = g(t), \quad y = h(t), \quad z = k(t), \quad a \leq t \leq b;$$

temos que

$$\begin{aligned}\vec{r} &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (\text{vetor posição}) \\ \vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} \quad (\text{vetor velocidade}) \\ \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (\text{aceleração})\end{aligned}$$

o trabalho é:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \left(\vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \right) dt = \int_a^b \left(\vec{F} \cdot \vec{v} \right) dt$$

pela 2ª lei de Newton

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

e então

$$\begin{aligned}W &= \int_a^b \left(m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} \right) dt = m \int_a^b \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} \right) dt = \frac{m}{2} \int_a^b \frac{d}{dt} (\vec{v} \cdot \vec{v}) dt \\ &= \frac{m}{2} \int_a^b \frac{d}{dt} |\vec{v}|^2 dt = \frac{m}{2} [v^2]_a^b = \frac{m}{2} (v^2(b) - v^2(a))\end{aligned}$$

segue que

$$W = K(B) - K(A)$$

onde K é a energia cinética. Vimos que

$$W = p(A) - p(B).$$

Assim

$$p(A) - p(B) = K(B) - K(A)$$

o que implica

$$p(A) + K(A) = p(B) + K(B).$$

o que prova a conservação da energia. □

12 Teorema de Green

Seja C uma curva plana suave com parametrização

$$x = g(t), \quad y = h(t), \quad a \leq t \leq b.$$

Suponha que C seja uma curva fechada simples, isto é, existe somente um único ponto de interseção, $P(a) = P(b)$. Vamos considerar também que C está orientada positivamente, isto é, ao longo de C a região R que C encerra estará sempre à esquerda quando o ponto $P(t)$ descreve C . A integral ao longo de uma curva fechada terá a seguinte notação:

$$\oint_C M(x, y)dx + N(x, y)dy.$$

e chamaremos a integral curvilínea ao longo de uma curva fechada simples C . Então temos o seguinte resultado importante que é conhecido como o teorema de Green.

Teorema 83. *Seja C uma curva fechada simples parcialmente suave e seja R a região que consiste de C e seu interior. Se M e N são funções contínuas com derivadas parciais primeiras contínuas em toda uma região D contendo R , então*

$$\oint_C M(x, y)dx + N(x, y)dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA. \quad (7)$$

Demonstração. Consideremos R uma região do tipo R_x ou R_y , isto é,

$$R = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \quad g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\} = R_x$$

$$R = \{(x, y) : c \leq y \leq d, \quad h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\} = R_y$$

onde g_1, g_2, h_1 e h_2 são funções suaves. É suficiente mostrar que

$$\oint_C M(x, y)dx = - \iint_R \frac{\partial M}{\partial y} dA \quad (8)$$

$$\oint_C N(x, y)dy = \iint_R \frac{\partial N}{\partial x} dA \quad (9)$$

Prova de (8) : C consiste de duas curvas suaves C_1 e C_2 de equações $y = g_1(x)$ e $y = g_2(x)$, respectivamente. Daí

$$\oint_C M(x, y)dx = \oint_{C_1} M(x, y)dx + \oint_{C_2} M(x, y)dx$$

obtemos então que

$$\begin{aligned}\oint_C M(x, y) dx &= \int_a^b M(x, g_1(x)) dx + \int_b^a M(x, g_2(x)) dx \\ &= \int_a^b M(x, g_1(x)) dx - \int_a^b M(x, g_2(x)) dx\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\iint_R \frac{\partial M}{\partial y} dA &= \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y} dy dx \\ &= \int_a^b [M(x, y)]_{g_1(x)}^{g_2(x)} dx \\ &= \int_a^b (M(x, g_2(x)) - M(x, g_1(x))) dx\end{aligned}$$

segue que:

$$\oint_C M(x, y) dx = - \iint_R \frac{\partial M}{\partial y} dA$$

De modo análogo, considerando R como uma região do tipo R_y , prova-se (9). Ou seja,

$$\oint_C N(x, y) dy = \oint_{C_1} N(x, y) dy + \oint_{C_2} N(x, y) dy$$

obtemos então que

$$\begin{aligned}\oint_C N(x, y) dy &= \int_d^c N(h_1(y), y) dy + \int_c^d N(h_2(y), y) dy \\ &= \int_c^d (-N(h_1(y), y) + N(h_2(y), y)) dy.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\iint_R \frac{\partial N}{\partial x} dA &= \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \frac{\partial N}{\partial x} dx dy \\ &= \int_c^d [N(x, y)]_{h_1(y)}^{h_2(y)} dy \\ &= \int_c^d (N(h_2(y), y) - N(h_1(y), y)) dy.\end{aligned}$$

o que prova o teorema. □

Se $R = R_1 \cup R_2$, $\partial R_1 = C_1 \cup C'_1$, $\partial R_2 = C_2 \cup C'_2$ temos

$$\iint_{R_1} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA = \oint_{C_1 \cup C'_1} Mdx + Ndy$$

$$\iint_{R_2} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA = \oint_{C_2 \cup C'_2} Mdx + Ndy$$

A integral ao longo de C'_1 é de sinal contrário à integral ao longo de C'_2 . Portanto,

$$\oint_C M(x, y)dx + N(x, y)dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA.$$

Exemplo 84. Usando o teorema de Green, calcule $\oint_C 5xydx + x^3dy$, onde C é a curva fechada que consiste nos gráficos de $y = x^2$ e $y = 2x$, entre os pontos $(0, 0)$ e $(2, 4)$.

Solução: Pelo teorema de Green: $M(x, y) = 5xy$ e $N = x^3$ logo

$$\begin{aligned} \oint_C 5xydx + x^3dy &= \iint_R \left[\frac{\partial (x^3)}{\partial x} - \frac{\partial (5xy)}{\partial y} \right] dA \\ &= \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (3x^2 - 5x) dydx \\ &= \int_0^2 [3x^2y - 5xy]_{x^2}^{2x} dx \\ &= \int_0^2 [11x^3 - 10x^2 - 3x^4] dx = -\frac{28}{15}. \end{aligned}$$

Exemplo 85. Usando o teorema de Green, calcule a integral curvilínea

$$\oint_C 2xydx + (x^2 + y^2) dy$$

onde C é a elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$.

Solução: Pelo teorema de Green, com $M(x, y) = 2xy$, $N(x, y) = x^2 + y^2$, temos

$$\oint_C 2xydx + (x^2 + y^2) dy = \iint_R (2x - 2x)dx = \iint_R 0dA = 0.$$

A integral sempre será zero para qualquer curva fechada.

Exemplo 86. Calcule $\oint_C (4 + e^{\sqrt{x}}) dx + (\sin y + 3x^2) dy$ se C é a fronteira da região R delimitada pelos quartos de círculo de raio a e b , respectivamente, e pelos segmentos de eixo- x e y .

Solução: Por Green

$$\begin{aligned} \oint_C (4 + e^{\sqrt{x}}) dx + (\sin y + 3x^2) dy &= \iint_R (6x - 0) dA \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_a^b 6r^2 \cos \theta dr d\theta \\ &= 6 \left[\frac{1}{3} r^3 \right]_a^b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \\ &= 2 (b^3 - a^3) [\sin \theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 (b^3 - a^3). \end{aligned}$$

Usando o teorema de Green podemos encontrar uma fórmula para achar a área A de uma região R delimitada por uma curva simples parcialmente suave C . Fazendo $M = 0$ e $N = x$ em (7), obtemos

$$A = \iint_R dA = \oint_C x dy$$

também se fizermos $N = 0$ e $M = -y$ em (7), obtemos

$$A = \iint_R dA = - \oint_C y dx$$

Daí, podemos estabelecer o seguinte resultado.

Teorema 87. Se uma região R do plano- xy é delimitada por uma curva fechada, simples, parcialmente suave C , então a área da região A de R é

$$A = \oint_C x dy = - \oint_C y dx = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx.$$

Exemplo 88. Ache a área da elipse usando o teorema de acima.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Solução: As equações paramétricas da elipse são $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Daí

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a \cos t) (b \cos t) dt - (b \sin t) (-a \sin t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab (\cos^2 t + \sin^2 t) dt \\ &= \frac{1}{2} ab 2\pi = ab\pi \end{aligned}$$

O teorema de Green é válido para regiões R que contenha "buracos". A integração deve ser feita de modo a manter a região R sempre à esquerda de C . Assim, se tivermos uma região R cujo contorno exterior seja C_0 e os contornos interiores sejam $C_1, C_2, \dots, C_n$, temos que

$$\oint_{C_0} M(x, y) dx + N(x, y) dy - \sum_{i=1}^n \oint_{C_i} M(x, y) dx + N(x, y) dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA$$

onde C_i , $i = 0, 1, \dots, n$ são percorridos no sentido contrário aos ponteiros do relógio.

Exemplo 89. *Sejam C_1 e C_2 duas curvas fechadas simples parcialmente suaves que não se interceptam, cada uma tendo a origem 0 como um ponto interior. Se*

$$M = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad N = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

prove que

$$\oint_{C_1} M(x, y) dx + N(x, y) dy = \oint_{C_2} M(x, y) dx + N(x, y) dy.$$

Solução: Denotando por R a região entre C_1 e C_2 , o teorema de Green nos dá

$$\oint_{C_1} M(x, y) dx + N(x, y) dy - \oint_{C_2} M(x, y) dx + N(x, y) dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA$$

e como

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{(x^2 + y^2)(1) - x(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

a integral dupla sobre R é zero. Consequentemente

$$\oint_{C_1} M(x, y)dx + N(x, y)dy = \oint_{C_2} M(x, y)dx + N(x, y)dy.$$

Exemplo 90. Se $\mathbf{F}$ é definida por $\mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$, prove que $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi$ para toda curva fechada simples parcialmente suave que tenha a origem em seu interior.

Solução: Fazendo $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ então M e N são as mesmas que no exemplo 5. Escolhendo um círculo C_1 de raio a e centro na origem e inteiramente contido em C , segue que

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

As equações paramétricas de C_1 são

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

obtemos

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \oint_{C_1} \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{-a \sin t}{a^2} (-a \sin t) dt + \frac{a \cos t}{a^2} a \cos t dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi. \end{aligned}$$

12.1 Teorema de Green na forma vetorial

Seja $F(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$, o rotacional de F é dado por

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & 0 \end{vmatrix} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

seja s o parâmetro comprimento de arco para C , consideremos o vetor tangente unitário

$$T = \frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j}$$

assim o teorema de Green toma a seguinte forma vetorial:

$$\text{Teorema de Green: } \oint_C F \cdot T \, ds = \iint_R (\nabla \times F) \cdot \mathbf{k} \, dA.$$

A integral $\oint_C F \cdot T \, ds$ representa a circulação do campo vetorial F em torno da curva C . O que temos aqui é que a circulação de F em torno de C é igual ao fluxo do $\nabla \times F$ através da região R encerrada por C . Agora, note que se considerarmos o vetor $\vec{n} = \frac{dy}{ds}\mathbf{i} - \frac{dx}{ds}\mathbf{j}$ então $T \cdot \vec{n} = 0$. Desse modo, Se calcularmos a integral de linha, $\oint_C F \cdot \vec{n} \, ds$ e definirmos $\mathcal{M} = -N$ e $\mathcal{N} = M$ teremos

$$\begin{aligned} \oint_C F \cdot \vec{n} \, ds &= \oint_C M dy - N dx = \\ \oint_C \mathcal{M} dx + \mathcal{N} dy &= \iint_R \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial y} = \\ \iint_R \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} &= \iint_R (\nabla \cdot F) \, dA. \end{aligned}$$

Ou seja, o Teorema de Green pode também ser dado na seguinte forma vetorial

$$\oint_C F \cdot \vec{n} \, ds = \iint_R (\nabla \cdot F) \, dA.$$

A integral $\oint_C F \cdot \vec{n} \, ds$ representa o fluxo de F através da curva C .

13 Integral de Superfície

13.1 Representação paramétrica de uma superfície

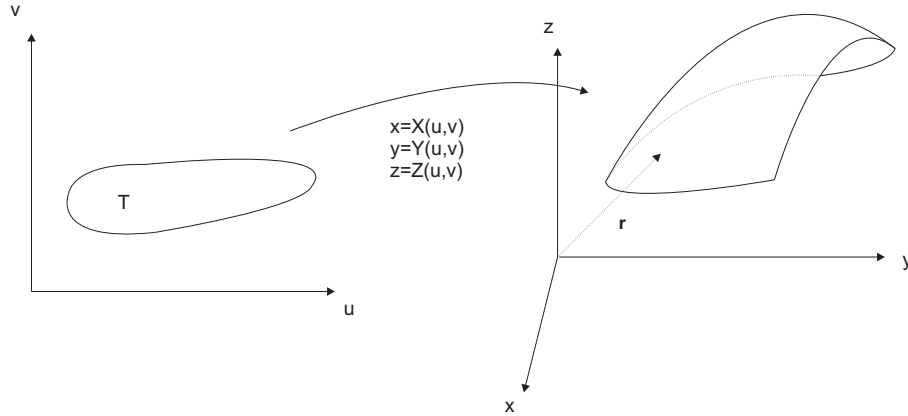
Representação Implícita: $S = \{(x, y, z) : F(x, y, z) = 0\}$. Exemplo: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (superfície esférica)

Representação explícita: $z = f(x, y)$. Exemplo: $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ e $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ (neste caso, temos a semi-esfera superior e a inferior, respectivamente.)

Representação Paramétrica: $x = X(u, v)$, $y = Y(u, v)$, $z = Z(u, v)$. (u, v) varia num conjunto conexo bidimensional T no plano-uv. Os pontos (x, y, z) correspondem a porções de superfície no espaço-xyz.

Representação Paramétrica Vetorial:

$$\mathbf{r}(u, v) = X(u, v)\mathbf{i} + Y(u, v)\mathbf{j} + Z(u, v)\mathbf{k}, \quad (u, v) \in T$$



Exemplo 1: Representação paramétrica de uma esfera

$$x = a \cos u \cos v, \quad y = a \sin u \cos v, \quad z = a \sin v \quad (10)$$

daí obtemos

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

se (u, v) varia no retângulo $T = [0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ os pontos determinados (10) descrevem toda a esfera. O hemisfério superior é a imagem de um retângulo $[0, 2\pi] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e o inferior a imagem de $[0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$.

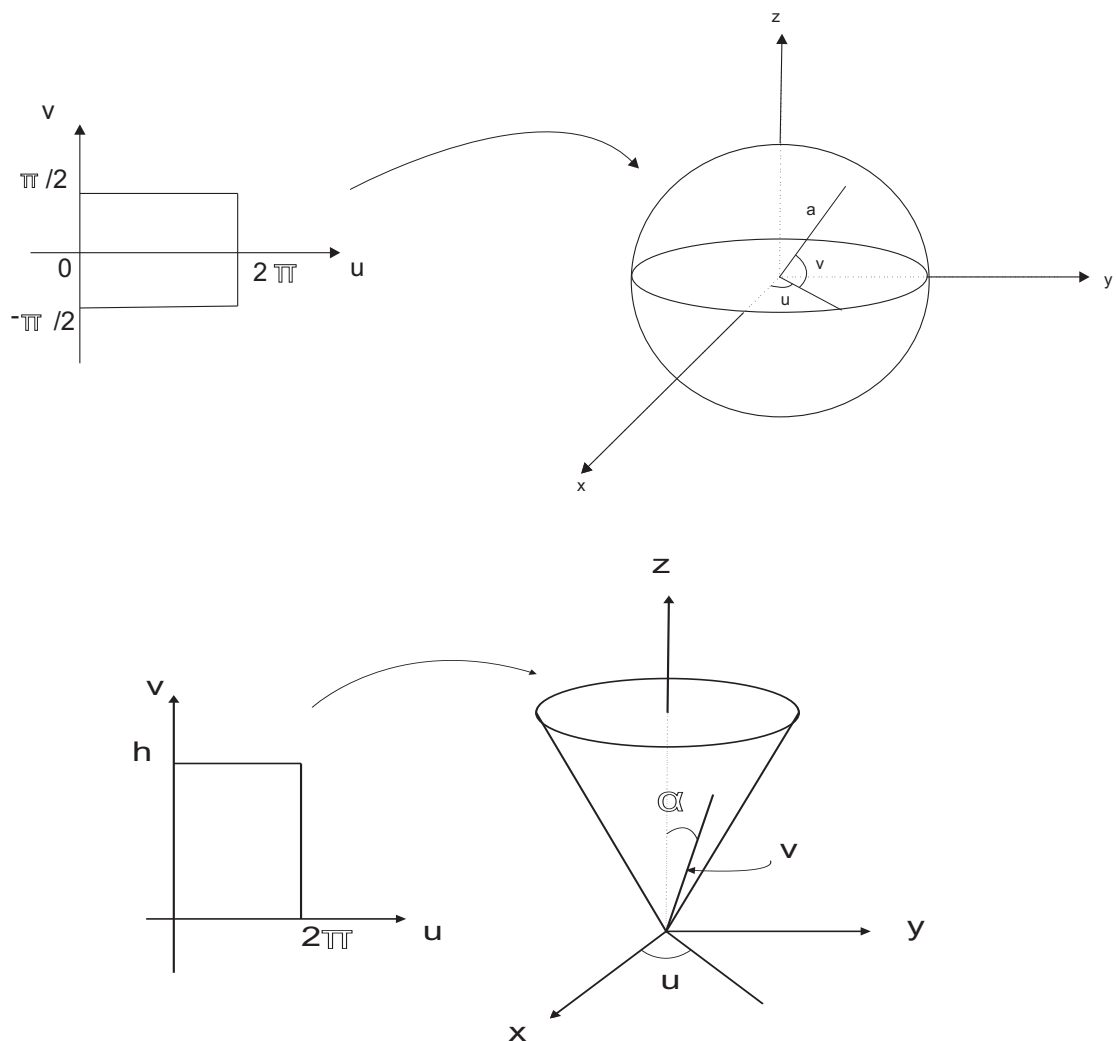
Exemplo 2: Representação vetorial de um cone

$$\mathbf{r}(u, v) = v \sin \alpha \cos u \mathbf{i} + v \sin \alpha \sin u \mathbf{j} + v \cos \alpha \mathbf{k}$$

onde v é a distância do vértice ao ponto (x, y, z) no cone, u é o ângulo polar e α é ângulo do vértice.

A imagem de T através de $\mathbf{r}$ é a *superfície paramétrica* e representamos por $\mathbf{r}(T)$. Se a função $\mathbf{r}$ é injetiva em T , a imagem $\mathbf{r}(T)$ se denominará *superfície paramétrica simples*. Em tal caso, pontos distintos de T se aplicam em pontos distintos da superfície. Em particular, toda curva fechada simples em T se aplica numa curva fechada simples situada na superfície.

Uma superfície paramétrica $\mathbf{r}(t)$ pode degenerar-se num ponto ou em uma curva. Por exemplo, $X(u, v) = u + v$, $Y(u, v) = (u + v)^2$, $Z(u, v) = (u + v)^3$, sendo $T = [0, 1] \times [0, 1]$. Escrevendo $t = u + v$, obtemos a curva parametrizada por $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, $0 \leq t \leq 2$.



13.2 Produto Vetorial fundamental

Considere uma superfície representada por

$$S : \mathbf{r}(u, v) = X(u, v) \mathbf{i} + Y(u, v) \mathbf{j} + Z(u, v) \mathbf{k}, \quad (u, v) \in T$$

Se X, Y e Z são deriváveis em T podemos considerar os dois vetores

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \frac{\partial X}{\partial u} \mathbf{i} + \frac{\partial Y}{\partial u} \mathbf{j} + \frac{\partial Z}{\partial u} \mathbf{k}$$

e

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \frac{\partial X}{\partial v} \mathbf{i} + \frac{\partial Y}{\partial v} \mathbf{j} + \frac{\partial Z}{\partial v} \mathbf{k}$$

O produto vetorial $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ se denominará *produto vetorial fundamental* de $\mathbf{r}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial u} \\ \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial v} & \frac{\partial Z}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial Y}{\partial v} & \frac{\partial Z}{\partial v} \\ \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} \frac{\partial Z}{\partial v} & \frac{\partial X}{\partial v} \\ \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial v} \\ \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ &= \frac{\partial(Y, Z)}{\partial(u, v)} \mathbf{i} + \frac{\partial(Z, X)}{\partial(u, v)} \mathbf{j} + \frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Se (u, v) é um ponto em T no qual $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ e $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ são contínuas e o produto vetorial fundamental não é nulo, então o ponto imagem $\mathbf{r}(u, v)$ se chama *ponto regular* de $\mathbf{r}$, caso contrário, o ponto é dito *ponto singular*. Uma superfície $\mathbf{r}(T)$ se chama *regular* se todos os seus pontos são regulares.

Um retângulo em T que tenha uma área $\Delta u \Delta v$ se converte numa porção em $\mathbf{r}(T)$ que aproximamos por um paralelogramo determinado pelos vetores $\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right) \Delta u$ e $\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right) \Delta v$. A área desse paralelogramo é o módulo do produto vetorial

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \Delta u \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \Delta v \right\| = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| \Delta u \Delta v.$$

Em cada ponto regular os vetores $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ e $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ determinam um plano que tem o vetor $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ como *normal*. Por esta razão o plano determinado por $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ e $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ se chama *plano tangente* à superfície. A continuidade de $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ e $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ implica na continuidade de $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$; isto significa que o plano tangente se move continuamente numa superfície regular. Assim, a continuidade de $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ e $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ evita a presença de bicos ou arestas nas superfícies, o fato de $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \neq 0$ evita os casos degenerados.

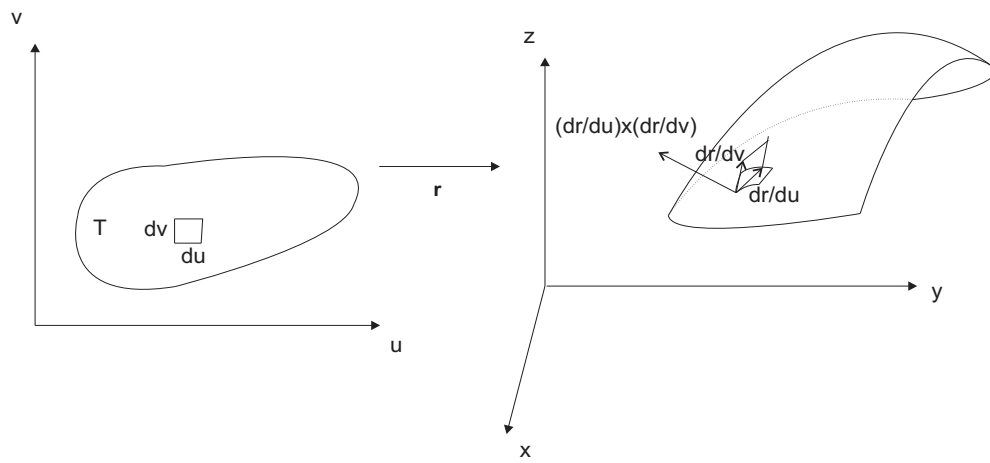
Exemplo 3: Superfícies com representação explícita, $z = f(x, y)$. Neste caso,

$$\mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(x, y)\mathbf{k}, (x, y) \in R$$

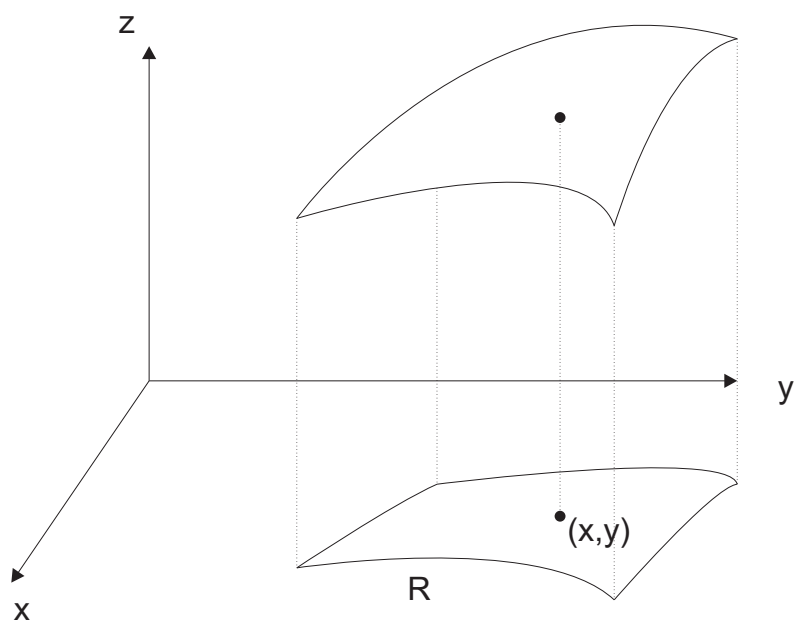
A região R denomina-se a projeção da superfície sobre o plano- xy .

Temos que

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} = \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{k}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{k}, \text{ supondo } f \text{ diferenciável}$$



$$S: z = f(x, y)$$



o que nos dá

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = -\frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Posto que a componente z de $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}$ é 1, o produto vetorial fundamental nunca é zero. Logo os únicos pontos singulares desta representação são os pontos onde $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ não são contínuas.

Um caso típico é a equação $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, que representa um hemisfério de raio 1 e centro na origem, se $x^2 + y^2 \leq 1$. A equação vetorial é

$$\mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + \sqrt{1 - x^2 - y^2}\mathbf{k}$$

ela aplica o disco unitário $T = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ sobre o hemisfério e tal aplicação é injetora. As derivadas parciais $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}$ e $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}$ existem e são contínuas em todo o interior do disco, mas não existem na fronteira do disco. Logo, todo ponto da fronteira é um ponto singular desta representação.

Exemplo 4: Consideremos o mesmo hemisfério do exemplo anterior, mas desta vez como imagem do retângulo $T = [0, 2\pi] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ através da aplicação

$$\mathbf{r}(u, v) = a \cos u \cos v \mathbf{i} + a \sin u \cos v \mathbf{j} + a \sin v \mathbf{k}$$

os vetores $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ e $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ vem dados pelas fórmulas

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = -a \sin v \cos v \mathbf{i} + a \cos u \cos v \mathbf{j}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = -a \cos u \sin v \mathbf{i} - a \sin u \sin v \mathbf{j} + a \cos v \mathbf{k}$$

Temos que

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = a \cos v \mathbf{r}(u, v)$$

A imagem de T não é uma superfície paramétrica simples pois esta aplicação não é injetora. Com efeito, todo ponto do segmento retilíneo $v = \frac{\pi}{2}$, $0 \leq u \leq 2\pi$ se aplica no ponto $(0, 0, a)$ (pólo norte). Também pela periodicidade do seno e cosseno, $\mathbf{r}$ toma os mesmos valores nos pontos $(0, v)$ e $(2\pi, v)$ de modo que os lados esquerdo e direito de T se aplicam na mesma curva, que é um arco que o une o pólo norte ao ponto $(a, 0, 0)$. Os vetores $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ e $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ são

contínuos em todo T . Como $\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| = a^2 \cos v$, então os únicos pontos singulares desta representação se apresenta quando $\cos v = 0$. Logo o único ponto singular é o pólo norte.

13.3 Área de uma superfície paramétrica

Seja $S = \mathbf{r}(T)$ uma superfície paramétrica representada pela função $\mathbf{r}$ definida numa região T do plano- uv . Um retângulo em T de área $\Delta u \Delta v$ é aplicado por $\mathbf{r}$ sobre um paralelogramo curvilíneo em S com área aproximadamente igual a

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| \Delta u \Delta v.$$

Definição: A área de S , que representamos por $a(S)$, se define pela integral dupla

$$a(S) = \iint_T \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| du dv. \quad (11)$$

Ou seja,

$$a(S) = \iint_T \sqrt{\left(\frac{\partial(Y, Z)}{\partial(u, v)} \right)^2 + \left(\frac{\partial(Z, X)}{\partial(u, v)} \right)^2 + \left(\frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} \right)^2} du dv \quad (12)$$

Se S vem dada explicitamente por uma equação da forma $z = f(x, y)$, então

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right\| = \left\| -\frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \mathbf{k} \right\| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2}.$$

Nesse caso,

$$a(S) = \iint_T \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2} dx dy,$$

onde T é a projeção de S no plano- xy .

Quando S está num plano paralelo ao plano- xy , a função f é constante e temos $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ daí

$$a(S) = \iint_T dx dy.$$

Em cada ponto de S , seja $\gamma = \text{ângulo}(\mathbf{N}, \mathbf{k})$ onde $\mathbf{N} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}$. Como a componente z de $\mathbf{N}$ é 1, temos

$$\cos \gamma = \frac{\mathbf{N} \cdot \mathbf{k}}{\|\mathbf{N}\| \|\mathbf{k}\|} = \frac{1}{\|\mathbf{N}\|} = \frac{1}{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right\|}.$$

Portanto, $\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right\| = \frac{1}{\cos \gamma}$. Logo,

$$a(S) = \iint_T \frac{1}{\cos \gamma} dx dy.$$

Se S está num plano não perpendicular ao plano- xy . Neste caso, $\gamma = \text{constante}$ e temos que $a(S) = (\text{área de } T) / \cos \gamma$, ou

$$a(S) = \frac{1}{\cos \gamma} \iint_T dx dy.$$

Agora se S vem dada implicitamente por $F(x, y, z) = 0$. Se S pode projetar-se injetivamente sobre o plano- xy a equação $F(x, y, z) = 0$ define z como função de x e y , seja $z = f(x, y)$, assim

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial x} / \frac{\partial F}{\partial z} \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial F}{\partial y} / \frac{\partial F}{\partial z}$$

nos pontos onde $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$. Desse modo

$$a(S) = \iint_T \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}{\left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|} dx dy. \quad (13)$$

Exemplo 1: Área de um hemisfério. Consideremos um hemisfério S de raio a e centro na origem. Temos a representação implícita $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geq 0$; a explícita $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$; e a paramétrica

$$\mathbf{r}(u, v) = a \cos u \cos v \mathbf{i} + a \sin u \cos v \mathbf{j} + a \sin v \mathbf{k}.$$

Para calcular a área de S a partir da representação implícita utilizamos a fórmula (13) tomando

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2.$$

Temos que $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y$, $\frac{\partial F}{\partial z} = 2z$. O hemisfério se projeta de forma injetiva no disco $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq a^2\}$ do plano- xy . Não podemos aplicar a fórmula diretamente pois $\frac{\partial F}{\partial z}$ é nula na fronteira de D . Mas tal derivada não é nula em todo ponto no interior de D , assim consideramos um disco concêntrico $D(R)$ de raio R , $R < a$. Se $S(R)$ representa a porção correspondente do hemisfério superior, (13) é aplicável e resulta:

$$\begin{aligned} \text{área de } S(R) &= \iint_{D(R)} \frac{\sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + (2z)^2}}{|2z|} dx dy \\ &= \iint_{D(R)} \frac{a}{z} dx dy = a \iint_{D(R)} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy \end{aligned}$$

temos

$$\text{área de } S(R) = a \int_0^{2\pi} \left[\int_0^R \frac{1}{\sqrt{a^2 - r^2}} r dr \right] d\theta = 2\pi a \left(a - \sqrt{a^2 - R^2} \right)$$

Quando $R \rightarrow a$ então área de $S(R) \rightarrow 2\pi a^2$. No caso da superfície parametrizada, temos

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| = \|a \cos v \mathbf{r}(u, v)\| = a^2 |\cos v|$$

Logo, podemos aplicar (12) tomando $T = [0, 2\pi] \times [0, \frac{1}{2}\pi]$. Obtemos

$$a(S) = a^2 \iint_T |\cos v| du dv = a^2 \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos v dv \right] du = 2\pi a^2.$$

13.4 Integrais de Superfície

Definicao: Seja $S = \mathbf{r}(T)$ uma superfície paramétrica descrita por uma função diferenciável $\mathbf{r}$ definida em T do plano- uv e seja f um campo escalar definido e limitado em S . A *integral de superfície* de f sobre S se representa por $\iint_S f dS$ (ou por $\iint_S f(x, y, z) dS$) e é definida como

$$\iint_S f dS = \iint_T f(\mathbf{r}(u, v)) \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| du dv.$$

Exemplo 1: *Área de superfície*

$$\iint_S dS = \iint_T \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| du dv.$$

Exemplo 2: *Fluxo de um fluido através de uma superfície.* Imagine que um fluido é uma coleção de pontos chamados partículas. A cada partícula (x, y, z) corresponde um vetor $\mathbf{v}(x, y, z)$ chamado velocidade. Este é o campo de velocidade da corrente. O campo de velocidade pode ou não mudar com o tempo. Consideraremos as correntes estacionárias. Seja $\rho(x, y, z)$ a densidade (massa por unidade de volume) do fluido em (x, y, z) . Se o fluido é incompressível a densidade ρ será constante em todo fluido. O produto da densidade pela velocidade representamos por $\mathbf{F}$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \rho(x, y, z) \mathbf{v}(x, y, z) \quad (\text{densidade de fluxo da corrente})$$

O vetor $\mathbf{F}(x, y, z)$ tem a mesma direção da velocidade e suas medidas de dimensões são

$$\frac{\text{massa}}{\text{unid. vol.}} \cdot \frac{\text{distancia}}{\text{unid. tempo}} = \frac{\text{massa}}{\text{unid. área} \cdot \text{unid. tempo}}.$$

$\mathbf{F}$ nos diz quanta massa de fluido circula no ponto (x, y, z) na direção de $\mathbf{v}$, por unidade de área e de tempo.

Seja $S = \mathbf{r}(T)$ uma superfície paramétrica simples. Em cada ponto regular de S designamos por η o vetor unitário normal que tenha o mesmo sentido que o produto vetorial fundamental. Isto é

$$\eta = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\|}$$

$\mathbf{F} \cdot \eta$ é a componente do vetor densidade de fluxo na direção η . A massa de fluido que passa através de S na unidade de tempo na direção de η se define por

$$\iint_{\mathbf{r}(T)} \mathbf{F} \cdot \eta dS = \iint_T \mathbf{F} \cdot \eta \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| du dv.$$

13.5 Mudança de representação paramétrica

Seja $\mathbf{r} : A \rightarrow \mathbf{r}(A)$ a região do plano- uv . Suponha $\mathbf{G} : B \rightarrow A$ injetiva e continuamente diferenciável.

$$\mathbf{G}(s, t) = U(s, t) \mathbf{i} + V(s, t) \mathbf{j} \quad \text{se } (s, t) \in B \quad (14)$$

Considere $\mathbf{R}$ definida por

$$\mathbf{R}(s, t) = \mathbf{r}[\mathbf{G}(s, t)] \quad (15)$$

$\mathbf{r}$ e $\mathbf{R}$ são *regularmente equivalentes*, representam a mesma superfície.

Teorema 91. *Sejam $\mathbf{r}$ e $\mathbf{R}$ regularmente equivalentes ligadas por (15), donde $\mathbf{G} = U\mathbf{i} + V\mathbf{j}$ é injetiva e continuamente diferenciável. Temos então*

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) \frac{\partial (U, V)}{\partial (s, t)}$$

donde $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(U, V)$ e $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(U, V)$.

Demonstração: $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial s} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \frac{\partial U}{\partial s} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \frac{\partial V}{\partial s}$, $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \frac{\partial V}{\partial t}$ daí

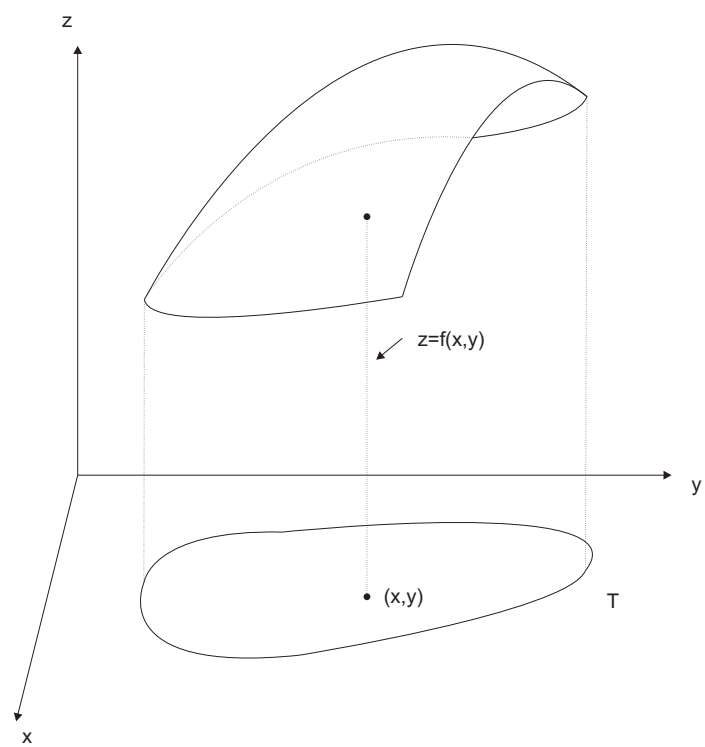
$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) \left(\frac{\partial U}{\partial s} \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial V}{\partial s} \right).$$

Teorema 92. *Se $\mathbf{r}$ e $\mathbf{R}$ são equivalentes e se $\iint_{\mathbf{r}(A)} f dS$ existe então $\iint_{\mathbf{R}(B)} f dS$ existe e*

$$\iint_{\mathbf{r}(A)} f dS = \iint_{\mathbf{R}(B)} f dS.$$

Demonstração: $\iint_{\mathbf{r}(A)} f dS = \iint_A f(\mathbf{r}(u, v)) \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| du dv$ agora

$$\begin{aligned} \iint_A f(\mathbf{r}(u, v)) \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| du dv &= \iint_B f(\mathbf{r}(\mathbf{G}(s, t))) \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| \left| \frac{\partial (U, V)}{\partial (s, t)} \right| ds dt \\ &= \iint_B f(\mathbf{R}(s, t)) \left\| \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} \right\| ds dt = \iint_{\mathbf{R}(B)} f dS. \end{aligned}$$



14 Integral de fluxo de uma função sobre uma superfície

Seja $\mathbf{F}$ um campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}$$

com M , N e P funções escalares contínuas.

Integral de fluxo de $\mathbf{F}$ sobre S : $\iint_S \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\eta} dS$ onde $\boldsymbol{\eta}$ é o vetor normal

unitário a S no ponto (x, y, z) . Supomos que os componentes de $\boldsymbol{\eta}$ são funções contínuas de x, y e z . Se S é o gráfico de uma equação

$$z = f(x, y)$$

e fazemos $g(x, y, z) = -f(x, y) + z$, então S é também o gráfico de

$$g(x, y, z) = 0.$$

Como $\nabla g(x, y, z)$ é o vetor normal ao gráfico de $g(x, y, z) = 0$ no ponto (x, y, z) então

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{\nabla g(x, y, z)}{\|\nabla g(x, y, z)\|} = \frac{-f_x(x, y)\mathbf{i} - f_y(x, y)\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2}}.$$

Analogamente, há fórmulas como estas no caso em que S é dado por $y = h(x, z)$ ou por $x = k(y, z)$.

Uma superfície S é *orientada* (ou *orientável*), se existe um vetor unitário normal $\boldsymbol{\eta}$ em cada ponto (x, y, z) (não fronteira) e que as componentes de $\boldsymbol{\eta}$ são funções contínuas de (x, y, z) . ($\boldsymbol{\eta}$ varia continuamente sobre a superfície S). Admitamos também que S tem também dois lados: o lado de cima e o lado de baixo do gráfico de $z = f(x, y)$.

Volume do prisma de área dS e altura $\mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\eta}$

$$dV = A.h = dS (\mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\eta})$$

dV é a quantidade de fluido que atravessa dS por unidade de tempo. Assim

$$V = \iint_S \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\eta} dS$$

é o volume total do fluído que atravessa S por unidade de tempo. V é o fluxo de $\mathbf{F}$ através de S .

Definição: Fluxo do campo vetorial $\mathbf{F}$ que atravessa S

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS$$

e

$$m = \iint_S \delta(x, y, z) \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS$$

é a massa do fluido que atravessa S .

Exemplo: Seja S a parte do gráfico de $z = 9 - x^2 - y^2$ com $z \geq 0$. Se $\mathbf{F}(x, y, z) = 3x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, ache o fluxo de $\mathbf{F}$ através de S .

Solução: Consideremos

$$g(x, y, z) = z - 9 + x^2 + y^2 = 0$$

daí

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{\nabla g}{\|\nabla g\|} = \frac{2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}$$

logo

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS = \iint_S \frac{6x^2 + 6y^2 + z}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}} dS$$

Agora

$$\begin{aligned} \iint_S \frac{6x^2 + 6y^2 + z}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}} dS &= \iint_{R_{xy}} \frac{6x^2 + 6y^2 + z}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dA \\ &= \iint_{R_{xy}} (6x^2 + 6y^2 + z) \, dA \end{aligned}$$

daí em coordenadas polares

$$\begin{aligned} \iint_{R_{xy}} (6x^2 + 6y^2 + z) \, dA &= \iint_{R_{xy}} (6x^2 + 6y^2 + 9 - x^2 - y^2) \, dA \\ &= \iint_{R_{xy}} (9 + 5x^2 + 5y^2) \, dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 (9 + 5r^2) r \, dr \, d\theta = \frac{567}{2} \pi. \end{aligned}$$

15 Teorema do Divergente (ou Teorema de Gauss)

Fluxo de um campo sobre uma superfície fechada S que é fronteira de uma região Q em três dimensões.

Teorema de Gauss. Seja Q uma região em três dimensões delimitadas por uma superfície fechada S , e denotemos por η o vetor normal unitário exterior a S em (x, y, z) . Se F é uma função vetorial com derivadas parciais contínuas em Q , então

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \eta \, dS = \iiint_Q \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV.$$

Demonstração: Se $\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}$, então o teorema de Gauss diz

$$\iint_S (M\mathbf{i} \cdot \eta + N\mathbf{j} \cdot \eta + P\mathbf{k} \cdot \eta) \, dS = \iiint_Q \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \right) dV.$$

Para provar esta igualdade é suficiente mostrar que

$$\iint_S M\mathbf{i} \cdot \eta \, dS = \iiint_Q \frac{\partial M}{\partial x} dV$$

$$\iint_S N\mathbf{j} \cdot \eta \, dS = \iiint_Q \frac{\partial N}{\partial y} dV$$

$$\iint_S P\mathbf{k} \cdot \eta \, dS = \iiint_Q \frac{\partial P}{\partial z} dV.$$

Vamos provar a terceira igualdade.

S é a superfície de uma região Q entre os gráficos de $z = u(x, y)$ e $z = v(x, y)$ e acima de uma região R do plano- xy . ($S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$).

Sobre S_2 , o componente k de η é zero e $\mathbf{k} \cdot \eta = 0$. Assim $\iint_{S_2} P\mathbf{k} \cdot \eta \, dS = 0$,

e podemos escrever

$$\iint_S P\mathbf{k} \cdot \eta \, dS = \iint_{S_1} P\mathbf{k} \cdot \eta \, dS + \iint_{S_3} P\mathbf{k} \cdot \eta \, dS$$

Para achar uma normal unitária (superior) a S_1 , fazemos

$$g_1(x, y, z) = z - u(x, y)$$

e calculamos

$$\eta = \frac{\nabla g_1}{\|\nabla g_1\|} = \frac{-u_x(x, y)\mathbf{i} - u_y(x, y)\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}}$$

Logo, $\mathbf{k} \cdot \eta = \frac{1}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}}$. Assim, se $R = R_{xy}$ e $f(x, y) = u(x, y)$ então

$$\iint_{S_1} P\mathbf{k} \cdot \eta \, dS = \iint_R P(x, y, u(x, y)) \, dA.$$

Em S_3 , fazemos

$$g_2(x, y, z) = z - v(x, y)$$

e daí

$$\eta = \frac{\nabla g_2}{\|\nabla g_2\|} = \frac{v_x(x, y)\mathbf{i} + v_y(x, y)\mathbf{j} - \mathbf{k}}{\sqrt{1 + v_x^2 + v_y^2}} \quad (\text{normal unitária inferior})$$

Aplicando as integrais sobre superfícies obtemos

$$\iint_{S_2} P\mathbf{k} \cdot \eta \, dS = - \iint_R P(x, y, v(x, y)) \, dA.$$

Somando as integrais de fluxo sobre S_1 e S_3 , temos

$$\begin{aligned} \iint_S P\mathbf{k} \cdot \eta \, dS &= \iint_R [P(x, y, u(x, y)) - P(x, y, v(x, y))] \, dA \\ &= \iint_R \left[\int_{v(x, y)}^{u(x, y)} \frac{\partial P}{\partial z} dz \right] dA = \iiint_Q \frac{\partial P}{\partial z} dV. \end{aligned}$$

Analogamente o temos o resultado:

$$\iint_S M\mathbf{i} \cdot \eta \, dS = \iiint_Q \frac{\partial M}{\partial x} dV, \quad \iint_S N\mathbf{j} \cdot \eta \, dS = \iiint_Q \frac{\partial N}{\partial y} dV.$$

Exemplo 1: Seja Q a região delimitada pelo cilindro circular reto $x^2 + y^2 = 4$ e pelos planos $z = 0$ e $z = 3$. Denotemos por S a superfície de Q . Se

$\mathbf{F}(x, y, z) = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$. Use o Teorema de Gauss para calcular $\iint_S \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\eta} dS$.

Solução: Como

$$\operatorname{div} F = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 = 3(x^2 + y^2 + z^2)$$

temos

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\eta} dS = 3 \iiint_Q (x^2 + y^2 + z^2) dV$$

Calculando em coordenadas cilíndricas

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\eta} dS &= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^3 (r^2 + z^2) r dz dr d\theta = 3 \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left[r^2 z + \frac{z^3}{3} \right]_0^3 r dr d\theta \\ &= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^2 (3r^2 + 9) r dr d\theta = 3 \int_0^{2\pi} \left[\frac{3}{4} r^4 + 9 \frac{r^2}{2} \right]_0^2 d\theta = 90 [\theta]_0^{2\pi} = 180\pi. \end{aligned}$$

Exemplo 2: Seja Q a região delimitada pelo cilindro $z = 4 - x^2$, pelo plano $y + z = 5$ e pelos planos xy e xz . Seja S a superfície de Q . Se $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^3 + \sin z)\mathbf{i} + (x^2 y + \cos z)\mathbf{j} + (e^{x^2 + y^2})\mathbf{k}$, calcule $\iint_S \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\eta} dS$.

Solução: Por Gauss

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\eta} dS &= \iiint_Q (3x^2 + x^2) dV = \iiint_Q 4x^2 dV \\ &= \int_{-2}^2 \int_0^{4-x^2} \int_0^{5-z} 4x^2 dy dz dx = \int_{-2}^2 \int_0^{4-x^2} 4x^2 (5 - z) dz dx \\ &= \int_{-2}^2 \left[20x^2 z - 4x^2 \frac{z^2}{2} \right]_0^{4-x^2} dx = \int_{-2}^2 (48x^2 - 4x^4 - 2x^6) dx \\ &= \frac{4608}{35}. \end{aligned}$$

16 Teorema de Stokes

Considere a figura abaixo, onde S é o gráfico de $Z = f(x, y)$, e f tem derivadas parciais primeiras contínuas e a projeção C_1 de C sobre o plano- xy é uma curva que delimita uma região R da forma considerada no teorema de Green. Nessa figura, $\mathbf{n}$ é uma normal unitária exterior de S . Vamos considerar a direção positiva ao longo de C como a direção correspondente à

direção positiva ao longo de C_1 . O vetor $\mathbf{T}$ na figura é um vetor unitário tangente a C que aponta na direção positiva. Se $\mathbf{F}$ denota um campo vetorial cujas componentes têm derivadas parciais contínuas numa região contendo S , então temos o seguinte resultado, que denominamos o teorema de Stokes.

Teorema 93. *Seja $\mathbf{F}$ um campo vetorial, cujas componentes têm derivadas parciais contínuas numa região que contém uma superfície S , orientável, parametrizada por $z = f(x, y)$, onde $\mathbf{n}$ representa o vetor normal unitário exterior de S , cuja fronteira é dada por uma curva C no espaço, que tem $\mathbf{T}$ como vetor tangente unitário, então a integral curvilínea da componente tangencial de $\mathbf{F}$ tomada uma vez ao longo da curva C na direção positiva é igual à integral de superfície da componente normal de $\text{rot } \mathbf{F}$ sobre S . Isto é*

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds = \iint_S (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, dS. \quad (16)$$

Exemplo 94. *Seja S a parte do parabolóide $z = 9 - x^2 - y^2$ com $z \geq 0$ e seja C o traço de S no plano- xy . Verifique o teorema de Stokes (16) para o campo vetorial $\mathbf{F} = 3z\mathbf{i} + 4x\mathbf{j} + 2y\mathbf{k}$.*

Solução: Devemos mostrar que as duas integrais no teorema (16) são iguais. Temos que o vetor normal unitário exterior de S é:

$$\mathbf{n} = \frac{2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}$$

temos o rotacional de $\mathbf{F}$ é dado por

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3z & 4x & 2y \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

Consequentemente,

$$\iint_S (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_S \frac{4x + 6y + 4}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} dS$$

assim

$$\begin{aligned} \iint_S (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, dS &= \iint_R \frac{4x + 6y + 4}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} \, dA \\ &= \iint_R (4x + 6y + 4) \, dA \end{aligned}$$

onde R é a região do plano-xy delimitada pelo círculo de raio 3 e centro na origem. Passando para coordenadas polares, temos

$$\begin{aligned}
 \iint_S (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, dS &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 (4r \cos \theta + 6r \sin \theta + 4) r \, dr \, d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 [(4 \cos \theta + 6 \sin \theta) r^2 + 4r] \, dr \, d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left[(4 \cos \theta + 6 \sin \theta) \frac{r^3}{3} + 2r^2 \right]_0^3 d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} (36 \cos \theta + 54 \sin \theta + 18) \, d\theta \\
 &= [36 \sin \theta - 54 \cos \theta + 18\theta]_0^{2\pi} = 36\pi.
 \end{aligned}$$

A integral curvilínea do teorema de Stokes pode ser escrita como

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C 3z \, dx + 4x \, dy + 2y \, dz$$

onde C é o círculo $x^2 + y^2 = 9$ no plano-xy. Como $z = 0$ em C , esta integral curvilínea se reduz a

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C 4x \, dy = 4 \oint_C x \, dy$$

pelo teorema de Green, $\oint_C x \, dy$ é a área da região (que representa um círculo de raio 3) delimitada por C , desse modo,

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 4(9\pi) = 36\pi.$$

Usando o teorema de Stokes podemos obter uma interpretação física do $\text{rot } F$. Se P é um ponto arbitrário, seja S_k um disco circular de raio k e centro em P e denotemos por C_k a fronteira de S_k , aplicando o teorema de Stokes e um teorema de valor médio para integrais duplas, temos

$$\oint_{C_k} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds = \iint_{S_k} (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, dS = [\text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}]_{P_k} \pi k^2$$

onde P_k é um ponto interior de S_k e πk^2 é a área de S_k . Desse modo,

$$[rot \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}]_{P_k} = \frac{1}{\pi k^2} \oint_{C_k} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds$$

fazendo $k \rightarrow 0$, então $P_k \rightarrow P$ e assim, obtemos o seguinte resultado.

$$[rot \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}]_P = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{\pi k^2} \oint_{C_k} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds$$

Se F é um campo de velocidade de um fluido, a integral curvilínea $\oint_{C_k} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds$ é a circulação em torno de C . Ela mede a tendência média de fluido se mover, ou circular, ao longo da curva. Vê-se portanto, que $[rot \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}]$ nos dá informação sobre o movimento de um fluido ao longo da circunferência de um disco circular que é perpendicular a $\mathbf{n}$, quando o disco tende a reduzir-se a um ponto. Essa circulação é máxima quando o vetor $rot \mathbf{F}$ for paralelo ao vetor $\mathbf{n}$.