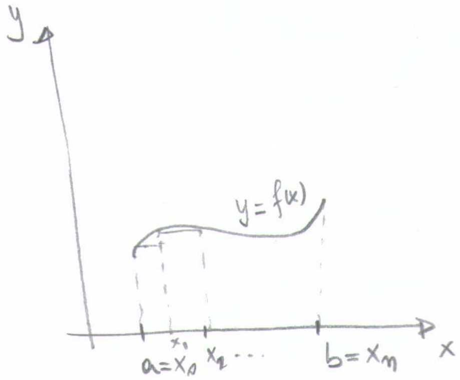
INTEGRAL



$P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$

$\|P\| = \max\limits_{0 \le i \le n} |x_i - x_{i-1}|$

$w_k \in (x_{k-1}, x_k)$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

Soma de Riemann $= S$

$$S = \sum_{k=1}^{n} f(w_k)\,\Delta x_k$$

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum f(w_k)\,\Delta x_k = L$$

$$L = \int_a^b f(x)\,dx .$$

Se $f(x) \geq 0$, então $L =$ Área da Região entre a e b que está abaixo do gráfico de f.

Propriedades: a) $\int_c^d f(x)\,dx = -\int_d^c f(x)dx$. c) $\int_a^b f+g = \int_a^b f + \int_a^b g$

d) $\int_a^b cf = c\int_a^b f$. (c constante)

b) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

e) $\int_a^b f \geq 0$ se $f \geq 0$ e f) $f \geq g$, $\int_a^b f \geq \int_a^b g$.

Teoreme: f contínua em $[a,b]$ então f é integrável em $[a,b]$.

Teorema (valor Médio): $\int_a^b f(x)dx = f(z)(b-a), \exists z \in (a,b)$.

Vimos que

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Em termos de integrais indefinidas essa equação se torna

$$\int \frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = \int (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))\,dx$$

ou

$$\int \frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = \int f'(x)g(x) + \int f(x)g'(x)$$

o que leva à fórmula de integração por partes

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx \,.$$

Se escrevemos na forma diferencial. Sejam $u = f(x)$ e $v = g(x)$. Então $du = f'(x)dx$ e $dv = g'(x)dx$. Assim

Fórmula de Integração por partes: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$.

Exemplo: Determine $\int x\cos x\,dx$.

Solução: Usando a fórmula: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$, tome $u = x$, $dv = \cos x\,dx$ assim, $du = dx$ e $v = \operatorname{sen} x$. Segue que

$$\int x\cos x\,dx = x\operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\,dx = x\operatorname{sen} x + \cos x + C.$$

Exemplo 2: Integrar $\int \ln x\,dx$

sol: Como $\int \ln x = \int \ln x \cdot 1\,dx$, fazemos:

$u = \ln x$, $dv = dx$

$du = \frac{1}{x}dx$ e $v = x$.

então

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int \frac{1}{x}\cdot x\,dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C.$$

④

Teorema: Seja f contínua em $[-a,a]$

(i) Se f é uma função par

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

(ii) Se f é uma função impar

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

Exemplo: Calcular (a) $\int_{-1}^{1}(x^4+3x^2+1)\,dx$ (b) $\int_{-1}^{1}(x^5+x^3+1)\,dx$

Solução:

$$\int_{-1}^{1}(x^4+6x^2+2)\,dx = 2\int_{0}^{1}(x^4+6x^2+2)\,dx = 2\left(\frac{x^5}{5}+6\frac{x^3}{3}+2x\right]_0^1$$

$$= 2\left(\frac{1}{5}+2+2\right) = 8+\frac{2}{5} = \frac{42}{5}.$$

$$\int_{-1}^{1}(x^5+x^3+1)\,dx = 2\int_{0}^{1}dx = 2\,x\Big|_0^1 = 2.$$

Ex.4 $\int \sec^3 x\,dx = \int \sec^2 x \sec x\,dx$

$dv = \sec^2 x\,dx$, $u = \sec x$.

$v = tg\,x$ $\quad du = \sec x\,tg\,x\,dx$

$= \sec x\,tg\,x - \int \sec x\,tg^2 x\,dx$

$= \sec x\,tg\,x - \int \sec x(\sec^2 x - 1)$

$= \sec x\,tg\,x - \int \sec^3 x + \int \sec x$.

$\int \frac{\sec x(\sec x + tg\,x)}{\sec x + tg\,x}$ $\quad \ln|\sec x$

Integração por partes

Se $u=f(x)$ e $v=g(x)$ e se f' e g' são contínuas então:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Note que:

$$\int \frac{d}{dx}(uv) = \int u\frac{dv}{dx} + \int \frac{du}{dx}v$$

$$uv = \int u\frac{dv}{dx} + \int \frac{du}{dx}v \quad \underline{\text{Provado.}}$$

Ex.2:

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\frac{1}{x}\,dx = x\ln x - x + C.$$

$dv = dx$, $v = x$

$u = \ln x$, $du = \frac{1}{x}\,dx$

$-\cos x e^x + \int \cos x e^x$

Ex.3: $\int e^x \cos x\,dx = \sin x\, e^x - \int \sin x\, e^x\,dx$

$dv = \cos x\,dx$, $u = e^x$; $dv = \sin x\,dx$, $u = e^x$

$v = \sin x$ $\quad du = e^x dx$ $\quad v = -\cos x$, $du = e^x dx$

$= \sin x\, e^x + e^x \cos x - \int \cos x\, e^x\,dx$

$\int e^x \cos x = \left(\frac{\sin x + \cos x}{2}\right)e^x + C$

Exemplo 1: Calcule $\int x e^{2x}\,dx$

$dv = e^{2x}dx$, $v = \frac{e^{2x}}{2}$

$u = x$, $du = dx$

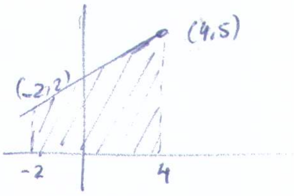
$$\int xe^{2x} = \frac{xe^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2}dx = \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C$$

ÁREA DE UMA REGIÃO PLANA

Se f é integrável e $f(x) \geq 0$ para todo x em $[a,b]$, então a área A da região sob o gráfico de f de a a b é

$$A = \int_a^b f(x)\,dx.$$

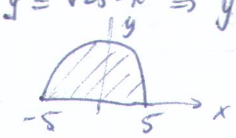
[redacted] Exemplo 1: Calcular $\int_{-2}^{4} \left(\frac{1}{2}x+3\right)dx$,



$$\int_{-2}^{4}\left(\frac{1}{2}x+3\right)dx = \left(\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}+3x\right)\Big|_{-2}^{4} = \left(\frac{4^2}{4}+3.4\right)-\left(\frac{(-2)^2}{4}+3.(-2)\right) = 4+12-1+6 = 21.$$

Exemplo 2: Calcular $\int_{-5}^{5}\sqrt{25-x^2}\,dx$.

$y=\sqrt{25-x^2} \Rightarrow y^2+x^2 = 25 = 5^2$ círculo de raios 5.



$$\int_{-5}^{5}\sqrt{25-x^2}\,dx = \frac{\pi(5)^2}{2} = \frac{25}{2}\pi.$$

Teorema: Se f é contínua em $[a,b]$ então f é integrável em $[a,b]$.

Teorema: Se $u=g(x)$ então $\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$. ($f$, g' integráveis)

Exemplo: Calcular $\int_1^5 \frac{2}{\sqrt{2x-1}}\,dx$.

Sol.: Chamando $u=2x-1$, $du=2dx$, assim

$$\int_1^5 \frac{2}{\sqrt{2x-1}}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^9 \frac{2}{\sqrt{u}}\,du = 2[u^{1/2}]_1^9 = 2[(9)^{1/2}-(1)^{1/2}] = 6-2 = 4.$$

2^4. 16 4 64

Ex.: Calcular $\int_0^{\pi/4}(1+\cos 2x)^5 \operatorname{sen} 2x\,dx$.

Sol.: Seja $u = 1+\cos 2x$ então $du = -2\operatorname{sen}2x\,dx$, assim: $x=0 \Rightarrow u=2$, $x=\frac{\pi}{4} \Rightarrow u=1$

$$\int_0^{\pi/4}(1+\cos 2x)^5 \operatorname{sen}2x\,dx = -\int_2^1 u^5\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int_1^2 u^5\,du = \frac{1}{2}\left[\frac{u^6}{6}\right]_1^2 = \frac{1}{2.6}(2^6-1)$$

$$= \frac{1}{2.6}63 = \frac{63}{12}.$$

(2)

Teo. Fund. Cálculo

$$G(x)=\int_a^x f(t)\,dt.$$

$G:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$. G é a antiderivada de f. ou $G'(x)=f(x)$.

Teo. Fund. Cálculo (I) Se G é definida por

$$G(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

então G é a antiderivada de f. Ou seja, $G'(x)=f(x)$.

(II) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = G(b)-G(a)$.

($g(x)\in$ Domínio de F)

$$\left(\begin{array}{l}\int D_x[F(g(x))] = F(g(x))+C\\ D_x[F(g(x))]=F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)\end{array}\right)$$

Mudança de Variáveis: Substituição

Teo: Se $u=g(x)$ então $\displaystyle\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$.

Dem.: $\displaystyle\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x))\Big|_a^b = F(g(b))-F(g(a)) = F(u)\Big|_{g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$

Ex.: Calcular $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{(x^3-3x+1)^6}\,dx$.

$u=x^3-3x+1$, $du=(3x^2-3)\,dx = 3(x^2-1)\,dx$

$$\int\frac{x^2-1}{(x^3-3x+1)^6}\,dx = \frac{1}{3}\int\frac{1}{u^6}\,du = \frac{1}{3}\left(\frac{u^{-5}}{-5}\right)+C$$

$$= -\frac{1}{15}\left(\frac{1}{(x^3-3x+1)^5}\right)+C$$

Exemplo: Calcular $\displaystyle\int_2^{10}\frac{3}{\sqrt{5x-1}}\,dx$.

Solução: Escrevendo essa integral como

$$3\int_2^{10}\frac{dx}{\sqrt{5x-1}}$$

Fazendo $u=5x-1$, $du=5\,dx$. Se $x=2\Rightarrow u=9$, se $x=10\Rightarrow u=49$

assim

$$3\int_2^{10}\frac{dx}{\sqrt{5x-1}} = \frac{3}{5}\int_9^{49}\frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{3}{5}\,\frac{u^{1/2}}{1/2}\Bigg|_9^{49} = \frac{6}{5}\left[\sqrt{49}-\sqrt{9}\right] = \frac{6}{5}[7-3] = \frac{24}{5}.$$

Exemplo 2: Calcular $\displaystyle\int_0^{\pi/4}(1+\operatorname{sen}2x)^3\cos 2x\,dx$.

Sol.: Tome $u=1+\operatorname{sen}2x$, $du=2\cos 2x\,dx$

$$\int_0^{\pi/4}(1+\operatorname{sen}2x)^3\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 u^3\,du = \frac{1}{2}\left[\frac{u^4}{4}\right]_1^2 = \frac{1}{8}[16-1] = \frac{15}{8}$$

Exemplo 1: Calcular $\int \sqrt{7x+8}\, dx$.

Solução: Tomando $u = 7x+8$, temos que $du = 7dx$. Desse modo,

$$\int \sqrt{7x+8}\, dx = \frac{1}{7}\int \sqrt{u}\, du = \frac{1}{7}\frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{21}u^{3/2} + C = \frac{2}{21}(7x+8)^{3/2} + C$$

Exemplo 2: Calcular $\int \cos 20x\, dx$.

Solução: Substituindo

$u = 20x$, $du = 20dx$

Como du contém o fator 4, temos:

$$\int \cos 20x\, dx = \frac{1}{20}\int \cos u\, du = \frac{1}{20}\operatorname{sen} u + C = \frac{1}{20}\operatorname{sen} 20x + C.$$

Exemplo 4: Calcular $\int (8x^5+3)^3 x^4\, dx$.

Sol.: Tomando

$u = 8x^5+3$

temos que $du = 40x^4 dx$. Assim

$$\int (8x^5+3)^3 x^4 dx = \frac{1}{40}\int u^3 du = \frac{1}{40}\frac{u^4}{4} + C = \frac{1}{160}(8x^5+3)^4 + C.$$

Exemplo 5: Calcular $\int \frac{x^4-1}{(x^5-5x+1)^3}\, dx$.

Sol.: Tome $u = x^5-5x+1$, temos que $du = (5x^4-5)dx = 5(x^4-1)dx$

Desse modo

$$\int \frac{(x^4-1)}{(x^5-5x+1)^3}dx = \frac{1}{5}\int \frac{du}{u^3} = \frac{1}{5}\frac{u^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{10}u^{-2} + C = -\frac{1}{10}(x^5-5x+1)^{-2} + C.$$

TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO

Vimos em aulas passadas que

$$\int [D_x h(x)]\, dx = h(x) + C$$

Sejam F uma antiderivada de uma função f e g uma função diferenciável tal que g(x) está no domínio de **F** para todo x em algum intervalo. Denotando por h a função composta de F e g, então $h(x) = F(g(x))$ e daí

$$\int [D_x F(g(x))]\, dx = F(g(x)) + C$$

Pela regra da cadeia, lembrando que $F' = f$, temos

$$D_x(F(g(x))) = F'(g(x))\, g'(x) = f(g(x))\, g'(x).$$

Levando esse resultado na integral anterior temos

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = F(g(x)) + C.$$

Se fazemos $u = g(x)$ então $du = g'(x)dx$ e assim, a formula acima fica

$$\int f(u)\, du = F(u) + C.$$

Isso é conhecido como método de substituição ou mudança de variável.

<u>MÉTODO DE SUBSTITUIÇÃO.</u> Se F é uma antiderivada de f então

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = F(g(x)) + C$$

Se $u = g(x)$ e $du = g'(x)dx$ então

$$\int f(u)\, du = F(u) + C.$$

③

<u>Teo:</u> Seja f contínua em $[-a,a]$ então:

(i) se f é par
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

(ii) se f é ímpar
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

<u>Exemplo:</u> Calcular: $\int_{-1}^{1}(x^4+3x^2+1)\,dx = 2\int_{0}^{1}(x^4+3x^2+1)\,dx = 2\left[\frac{x^5}{5}+x^3+x\right]_0^1 = \frac{2}{5}+2+2$
$= \frac{22}{5}.$

<u>Algumas Integrais indefinidas</u>

(1) $\int 1\,dx = x+C$ (2) $\int x^r\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1}+C$ $(r\neq -1)$ (3) $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$

(4) $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$ (5) $\int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x + C$ (6) $\int \operatorname{cossec}^2 x\,dx = -\operatorname{cotg} x + C$

(7) $\int \sec x \operatorname{tg} x = \sec x + C$ (8) $\int \operatorname{cossec} x \operatorname{cotg} x = -\operatorname{cossec} x + C$.

<u>Substituições trigonométricas</u>

$\sqrt{a^2-x^2}$, $x = a\operatorname{sen}\theta$

$\sqrt{a^2+x^2}$, $x = a\operatorname{tg}\theta$

$\sqrt{x^2-a^2}$, $x = a\sec\theta$

$\operatorname{cotg}\theta = \frac{4\cos\theta}{4\operatorname{sen}\theta} = \frac{\sqrt{16-x^2}}{x}$

$1-\frac{x^2}{16} = \cos^2\theta$

$4\operatorname{sen}\theta = x$
$\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{4}$ $\sqrt{1-\cos^2\theta} = \frac{x}{4} =$ $1-\cos^2\theta = \frac{x^2}{16}$

Ao fazer a substituição trigonométrica, admitimos que θ esteja no contradomínio da função trigonométrica inversa correspondente. Assim, p/ $x = a\operatorname{sen}\theta$, temos $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$, $\cos\theta \ge 0$ e

$$\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2-a^2\operatorname{sen}^2\theta} = \sqrt{a^2(1-\operatorname{sen}^2\theta)} = \sqrt{a^2\cos^2\theta} = a\cos\theta.$$

Se $\sqrt{a^2-x^2}$ aparece num denominador, acrescentamos a restrição $|x|\neq a$, ou eq. $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. Exemplo: $\int \frac{1}{x^2\sqrt{16-x^2}}\,dx$ $x = 4\operatorname{sen}\theta$, $-\frac{\pi}{2}<\theta<\pi/2$

$$= -\frac{1}{16}\operatorname{cotg}\theta + C = -\frac{\sqrt{16-x^2}}{16x} + C.$$

3

Definição: f contínua em $[a,b]$. O valor médio f_m de f em $[a,b]$ é

$$f_m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

ex.: Dado $\int_0^3 x^2\,dx = 9$ determine o valor médio de f em $[0,3]$

$$f_m = \frac{1}{3-0}\int_0^3 x^2\,dx = 3.$$

ex.: $\frac{x^3}{3}$ é primitiva de x^2, $\operatorname{sen} x$ é primitiva de $\cos x$ $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $F:[a,b]\to\mathbb{R}$

Def: Uma função $F(x)$ é dita primitiva de $f(x)$ se $F'(x) = f(x)$.

Teorema fundamental do Cálculo: Suponhamos f contínua em $[a,b]$

I) $$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

G é uma primitiva de f.

Prova: $$G'(x^+) = \lim_{h\to0^+}\frac{G(x+h)-G(x)}{h} = \lim_{h\to0}\frac{\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h}$$

$\exists\, x < z < x+h$

$$= \lim_{h\to0}\frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h} = \lim_{h\to0^+}\frac{f(z)h}{h} = \lim_{h\to0^+} f(z) = f(x).$$

II) $$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a).$$

$G'(x^-) = f(x)$ exercício

Logo: $G'(x) = f(x)$.

G é primitiva de f

Corolário: F primitiva de f (f contínua em $[a,b]$)

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

MÉTODO DE SUBSTITUIÇÃO:

Teorema: Se $u = g(x)$ então $$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du.$$

Dem.: $$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x))\Big|_a^b = F(g(b)) - F(g(a)) = F(u)\Big|_{g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du.$$

$(F' = f)$ F primitiva de f e $g(x) \in$ Domínio de F

$$D_x F(g(x)) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))\cdot g'(x).$$

Teorema: Se f é contínua em $[a,b]$ então f é integrável em $[a,b]$.

Queremos provar que:

Dem.: $G'(x) = f(x)$ de fato,

$$\lim_{h\to 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} = f(x)$$

De fato,

$$G(x+h) - G(x) = \int_a^{x+h} f(t) - \int_a^x f(t)$$

$$= \int_x^{x+h} f(t)$$

$$\frac{G(x+h) - G(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)$$

Se $h>0$, pelo T.V.M. $\exists\, z$ tq.

$$\int_x^{x+h} f(t)dt = f(z)h$$

e p.t. $\dfrac{G(x+h) - G(x)}{h} = f(z)$ $\quad x < z < x+h$

$$\lim_{h\to 0^+} f(z) = \lim_{z\to x^+} f(z) = f(x)$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} = \lim_{h\to 0^+} f(z) = f(x)$$

Se $h<0$. De modo análogo

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} = f(x).$$

Se F é tal que $F' = f$.

$$G(x) = F(x) + C$$

$$\int_a^x f(t) = F(x) + C$$

Tomando $x = a$, $C = -F(a)$, logo,

$$\int_a^x f = F(x) - F(a).$$

F primitiva de f.

então

$$F(x) = G(x) + C$$

~~Logo:~~

$$\cancel{\int_a^b f(x)dx = G(b)}$$

Ou seja,

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + C \qquad \Big| \int_a^a f = 0.$$

Daí:

$$F(b) = \int_a^b f(t)dt + C$$

e

$$F(a) = C$$

Logo: $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$

Teorema: Seja f contínua em I. Se $f'(x)=0$ $\forall x \in I$, $\exists k: f(x)=k$.

Dem.: $f(x)-f(x_0) = f'(\bar{x})(x-x_0) \Rightarrow f(x)=f(x_0)=k$.

Teorema: Se F é uma primitiva de f num intervalo I. Se G é uma outra primitiva de f em I, então

$$G(x) = F(x) + C$$

para alguma constante C e todo $x \in I$.

Dem.: Sejam F, G primitivas de f, seja H definida por

$$H(x) = F(x) - G(x), \quad \forall x \in I.$$

Sejam a e b n°s em I $a<b$. Vamos mostrar que $H(a)=H(b)$. Como F e G são primitivas de f,

$$H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0, \quad \forall x \in I$$

$H(x)$ é dif., é contínua. Pelo T.V.M.

$$H'(c) = \frac{H(b)-H(a)}{b-a}, \quad c \in I$$

$$H'(c) = 0 \text{ e assim}$$

$$H(b) - H(a) = 0.$$

Def: $\int f(x) = F(x) + C$ onde $F'(x) = f(x)$. $\Rightarrow \int D_x F = F(x) + C$.

Teo: (i) $\int (D_x f) \cancel{dx} = f(x) + C$.

(ii) $D_x\left(\int f(x)\right) = f(x)$.

Prova: (i) já foi mostrado. Provemos (ii)

$$D_x\left(\int f(x)\right) = D_x[F(x)+C] = F'(x) + 0 = f(x).$$

Teo. valor médio p/ Int.: f contínua em $[a,b]$ $\exists z \in [a,b]$ t.q.:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(z)(b-a)$$

Prova: Sejam $u, v \in [a,b]$: $f(u)=m$, $f(v)=M$

$$m \le f(x) \le M$$

$$\int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x) \le \int_a^b M\,dx$$

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f \le M$$

Como $f(u) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f \le f(v)$

Pelo T.V.I.

$\exists z$:

$$f(z) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f$$

Teo. Fund. Cálculo: Suponhamos f contínua num intervalo fechado $[a,b]$. Parte I. Se a função G é definida por

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

para todo x em $[a,b]$, então G é uma primitiva de f em $[a,b]$.

Parte II. Se F é q. primitiva de f em $[a,b]$ então

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

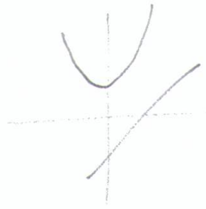
4) Se f é integrável em $[a,b]$ e $f(x) \geq 0$ $\forall x$ em $[a,b]$ então

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$$

4)' Se f e g são integráveis e $f(x) \geq g(x)$ então

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx.$$

Ex.: Mostre que $\displaystyle\int_{-1}^{2} (x^2+2)\,dx \geq \int_{-1}^{2} (x-1)\,dx$.



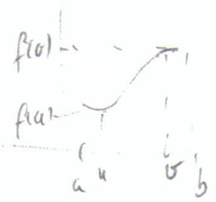
$x^2+2 \geq x-1$

Teorema do valor médio para integrais: Se f é contínua no intervalo fechado $[a,b]$, então existe um nº z em (a,b) tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(z)(b-a).$$

Dem.: Se f é uma função constante, $f(x)=c$

$$\int_a^b f(x)\,dx = c(b-a) = f(z)(b-a), \ \forall z \in (a,b).$$



Suponhamos que f não é constante e que m e M sejam os valores mínimo e máximo de f em $[a,b]$. Sejam $f(u)=m$ e $f(v)=M$ para u e v em $[a,b]$. Como f não é constante, $m < f(x) < M$ para algum $x \in [a,b]$. Logo,

$$\int_a^b m\,dx < \int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b M\,dx$$

$$m(b-a) < \int_a^b f(x) < M(b-a)$$

Dividindo por $b-a$, temos:

$$f(u) < \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x) < f(v)$$

Como $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)$ está entre $f(u)$ e $f(v)$ decorre do Teo. do valor intermediário que $\exists\, z$, com $u<z<v$ tal que

$$f(z) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

FUNÇÕES RACIONAIS. DECOMPOSIÇÃO EM FRAÇÕES PARCIAIS

Se q é uma função racional então $q(x) = \frac{P(x)}{r(x)}$ onde p e r são polinômios. Queremos integrar $\int q(x)\,dx$.

Facilmente, vemos que se $q(x) = \frac{2}{x^2-1} = \frac{2}{(x-1)(x+1)}$ então

$$\frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} + \frac{-1}{x+1}$$

Logo,

$$\int \frac{2}{x^2-1}\,dx = \int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{-1}{x+1}\,dx$$

$$= \ln|x-1| - \ln|x+1| + C$$

$$= \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$

Especificamente, se $p(x)$ e $r(x)$ são polinômios e se o grau de $p(x)$ é inferior ao grau de $r(x)$ então pode-se provar que

$$\frac{p(x)}{r(x)} = F_1 + F_2 + \ldots + F_k$$

de tal forma que F_i da soma tem uma das formas

$$\frac{A}{(ax+b)^n} \quad \text{ou} \quad \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}$$

para reais A e B e n inteiro não-negativo, onde ax^2+bx+c é irredutível no sentido de que este polinômio não tem zeros (isto é, $b^2-4ac<0$).

A soma $F_1 + \ldots + F_k$ é a decomposição em frações parciais de $\frac{p(x)}{r(x)}$ e, cada F_i é uma fração parcial.

Vamos ver que (regras) caminhos devemos seguir para obter a decomposição em frações parciais:

1. Se o grau de $p(x)$ não é inferior ao grau de $r(x)$, use a divisão de polinômios para chegar à forma adequada.

2. Expresse $r(x)$ como produto de fatores lineares $ax+b$ ou fatores quadráticos irredutíveis da forma ax^2+bx+c e agrupe os fatores repetidos.

3. Aplique as seguintes regras

Regra 1ª: Para cada fator $(ax+b)^n$ com $n \geq 1$ a decomposição em frações parciais contém uma soma de n frações parciais da forma

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \dots + \frac{A_n}{(ax+b)^n},$$

onde cada A_i é um nº real.

Regra 2ª: Para cada fator $(ax^2+bx+c)^n$ com $n \geq 1$ e com ax^2+bx+c irredutível, a decomposição contém uma soma de n frações parciais da forma

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B}{(ax^2+bx+c)^2} + \dots + \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n},$$

onde cada A_i e B_i é um nº real.

Exemplo 1: Calcular $\displaystyle\int \frac{4x^2+13x-9}{(x^3+2x^2-3x)}\,dx$.

Solução: Fatorando o integrando, temos:

$$x^3+2x^2-3x = x(x+3)(x-1)$$

Assim:

$$\frac{4x^2+13x-9}{x(x+3)(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-1}$$

⑤

Daí:

$$(*) \quad 4x^2+13x-9 = A(x+3)(x-1) + Bx(x-1) + Cx(x+3).$$

Em casos como este, em que os fatores são todos lineares e não repetidos, os valores de A, B e C podem ser obtidos pela substituição de x por valores que anulem os vários fatores.

(Heaviside)

Fazendo $x=0$ em $(*)$, temos:

$$-9 = -3A \quad \text{ou} \quad A=3.$$

Fazendo $x=1$ em $(*)$, obtemos

$$8 = 4C \quad \text{ou} \quad C=2.$$

Por fim, fazendo $x=-3$ em $(*)$, temos:

$$-12 = 12B \quad \text{ou} \quad B=-1.$$

Logo,

$$\frac{4x^2+13x-9}{x(x+3)(x-1)} = \frac{3}{x} - \frac{1}{x+3} + \frac{2}{x-1}$$

Integrando

$$\int \frac{4x^2+13x-9}{x(x+3)(x-1)}\,dx = \int \frac{3}{x}\,dx - \int \frac{dx}{x+3} + 2\int \frac{1}{x-1}\,dx$$

$$= 3\ln|x| - \ln|x+3| + 2\ln|x-1| + C$$

$$= \ln|x|^3 - \ln|x+3| + \ln|x-1|^2 + C$$

$$= \ln\left|\frac{x^3(x-1)^2}{x+3}\right| + C.$$

Exemplo 2: calcular $\displaystyle\int \frac{3x^3-18x^2+29x-4}{(x+1)(x-2)^3}\,dx$

Sol.:

Assim,

$$\frac{3x^3-18x^2+29x-4}{(x+1)(x-2)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x-2)^2} + \frac{D}{(x-2)^3}$$

⑥ Tirando o mínimo, obtemos:

$$(**)\quad 3x^3-18x^2+29x-4 = A(x-2)^3+B(x+1)(x-2)^2+C(x+1)(x-2)+D(x+1)$$

Duas das incógnitas podem ser facilmente determinadas. Fazendo $x=2$ em $(**)$, obtemos:

$$6 = 3D \quad \text{ou} \quad D=2.$$

Analogamente, tomando $x=-1$ em $(**)$ temos:

$$-54=-27A \quad \text{ou} \quad A=2.$$

Olhando para o membro do lado direito de $(**)$ vemos que o coeficiente de x^3 é $A+B$. Este coeficiente deve ser igual ao coeficiente do lado esquerdo ou seja:

$$3=A+B$$

Como $A=2$, então $B=1$. Finalmente, comparamos os termos constantes

$$-4=-8A+4B-2C+D$$

Assim:

$$-4=-8\cdot(2)+4-2C+2$$

logo, $C=-3$. Segue que

$$\frac{3x^3-18x^2+29x-4}{(x+1)(x-2)^3} = \frac{2}{x+1}+\frac{1}{x-2}+\frac{-3}{(x-2)^2}+\frac{2}{(x-2)^3}$$

Integrando cada uma das frações parciais, temos:

$$2\ln|x+1| + \ln|x-2| + \frac{3}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2} + K$$

ou

$$\ln(x+1)^2(x-2) + \frac{3}{x-2} - \frac{1}{(x-2)^2} + K.$$

Exemplo 3: Integrar $\displaystyle\int \frac{x^2-x-21}{2x^3-x^2+8x-4}\,dx.$

Sol.: Temos

$$2x^3-x^2+8x-4 = x^2(2x-1)+4(2x-1) = (x^2+4)(2x-1)$$

Assim:

$$\frac{x^2-x-21}{2x^3-x^2+8x-4} = \frac{Ax+B}{x^2+4} + \frac{C}{2x-1}$$

Daí

$$x^2-x-21 = (Ax+B)(2x-1) + C(x^2+4)$$

Pode-se achar facilmente uma constante fazendo $x=1/2$. Temos que

$$-\frac{85}{4} = \frac{17}{4}C \quad \text{ou} \quad C=-5.$$

As demais são achadas por comparação de coeficientes.

$$x^2: \; 1 = 2A + C$$
$$x: \; -1 = -A + 2B$$
$$\text{const}: \; -21 = -B + 4C$$

Como $C=-5$, segue que $A=3$. Analogamente $B=1$. Segue que

$$\frac{x^2-x-21}{2x^3-x^2+8x-4} = \frac{3x+1}{x^2+4} - \frac{5}{2x-1} = \frac{3x}{x^2+4} + \frac{1}{x^2+4} - \frac{5}{2x-1}$$

$u = x^2+4$
$du = 2x\,dx$

Integrando: $\frac{3}{2}\ln|x^2+4| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} - \frac{5}{2}\ln|2x-1| + K.$

INTEGRAÇÃO POR PARTES

Integração por partes é uma técnica para simplificar integrais de forma

$$\int f(x)g(x)\,dx$$

na qual f pode ser derivada repetidamente e g pode ser integrada repetidamente sem dificuldade. Ela também se aplica a integrais na qual a parte do integrando aparece novamente após repetidas derivações e integrações.

Fazendo $x=1$ em (*) obtemos:

$$8 = 4C \quad \text{ou} \quad C=2$$

Fazendo $x=-3$ em (*)

$$-12 = 12B \quad \text{ou} \quad B=-1.$$

Logo:

$$\frac{4x^2+13x-9}{x(x+3)(x-1)} = \frac{3}{x} - \frac{1}{x+3} + \frac{2}{x-1}$$

Integrando

$$\int \frac{4x^2+13x-9}{x(x+3)(x-1)}\,dx = \int \frac{3}{x} - \int \frac{1}{x+3} + \int \frac{2}{x-1}$$

$$= 3\ln|x| - \ln|x+3| + 2\ln|x-1| + C$$

$$= \ln\left|\frac{x^3(x-1)^2}{x+3}\right| + C.$$

outra forma:

$$4x^2+13x-9 = (A+B+C)x^2 + (2A-B+3C)x - 3A$$

$$A+B+C=4$$
$$2A-B+3C=13$$
$$-3A=-9$$

Ex. 2: Calcular $\int \frac{3x^3-18x^2+29x-4}{(x+1)(x-2)^3}\,dx$.

Sol.: Temos:

$$\frac{3x^3-18x^2+29x-4}{(x+1)(x-2)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} + \frac{D}{(x-2)^3}$$

Daí:

(*) $3x^3-18x^2+29x-4 = A(x-2)^3 + B(x+1)(x-2)^2 + C(x+1)(x-2) + D(x+1)$

Fazendo $x=2$ em (*)

$$6 = 3D \quad \text{ou} \quad D=2$$

Fazendo $x=-1$ em (*)

$$-54 = -27A \quad \text{ou} \quad A=2$$

Comparando os coef. x^3: $3 = A+B \Rightarrow B=1$

termos constantes: $-4 = -8A+4B-2C+D$

$-4 = -16+4-2C+2 \Rightarrow C=-3.$

Logo:

$$\frac{3x^3-18x^2+29x-4}{(x+1)(x-2)^3} = \frac{2}{x+1} + \frac{1}{x-2} - \frac{3}{(x-2)^2} + \frac{2}{(x-2)^3}.$$

integrando:

$$\int \frac{3x^3-18x^2+29x-4}{(x+1)(x-2)^3}\,dx = 2\ln|x+1| + \ln|x-2| + 3/(x-2) - \frac{1}{(x-2)^2} + C$$

$$= \ln|(x+1)^2(x-2)| + \frac{3}{x-2} - \frac{1}{(x-2)^2} + C$$

Ex. 3: Calcular $\int \frac{x^2-x-21}{2x^3-x^2+8x-4}\,dx.$

$$2x^3-x^2+8x-4 = x^2(2x-1)+4(2x-1) = (x^2+4)(2x-1)$$

Logo: $\frac{x^2-x-21}{2x^3-x^2+8x-4} = \frac{Ax+B}{x^2+4} + \frac{C}{2x-1}$

ou

(*) $x^2-x-21 = (Ax+B)(2x-1) + C(x^2+4)$

Fazendo $x=1/2$ obtemos:

$-\frac{85}{4} = \frac{17}{4}C \Rightarrow C=-5.$

x^2: $1 = 2A+C \Rightarrow A=3$

x: $-1 = -A+2B \Rightarrow B=1$

const.: $-21 = -B+4C$

Assim:

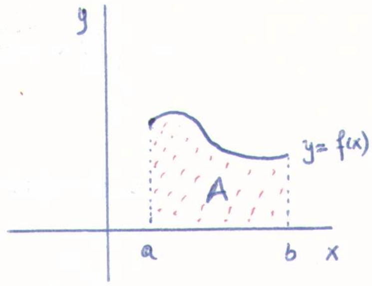
$$\int \frac{x^2-x-21}{2x^3-x^2+8x-4} = \int \frac{3x}{x^2+4} + \int \frac{1}{x^2+4} - \int \frac{5}{2x-1}$$

$$= \frac{3}{2}\ln(x^2+4) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} - \frac{5}{2}\ln|2x-1| + C.$$

2. Área

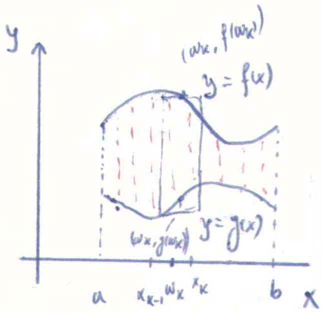
f contínua e $f(x) \geq 0$ em $[a,b]$ então

$$A = \int_a^b f(x)\,dx.$$



<u>Teorema</u>: f e g contínuas e $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in [a,b]$ então a área da região delimitada pelos gráficos de f, g, $x=a$ e $x=b$ é

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx.$$



P partição de $[a,b]$, $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$, $\forall k$

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $w_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

$$h(w_k)\cdot \Delta x_k = [f(w_k) - g(w_k)]\,\Delta x_k$$

somando

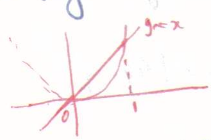
$$\sum_k h(w_k)\cdot \Delta x_k = \sum_k [f(w_k) - g(w_k)]\,\Delta x_k$$

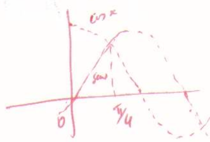
Tome o limite

$$A = \lim_{\|P\| \to 0} \sum h(w_k)\,\Delta x_k = \int_a^b h(x)\,dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$

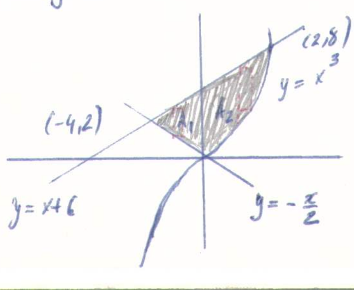
<u>Exemplos</u>:

1. Achar a área da região delimitada pelos gráficos das equações $y = x$ e $y = x^2$.





2. Achar a área da região R delimitada pelos gráficos de $y - x = 6$, $y - x^3 = 0$, e $2y + x = 0$.



$$A_1 = \int_{-4}^{0} \left[x+6-\left(-\frac{x}{2}\right)\right] dx$$

$$= \int_{-4}^{0} \left(\frac{3}{2}x+6\right) dx = \left[\frac{3}{2}\frac{x^2}{2} + 6x\right]_{-4}^{0}$$

$$= 0 - (12-24) = 12$$

$$A_2 = \int_{0}^{2} (x+6-x^3)\, dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + 6x - \frac{x^4}{4}\right]_0^2$$

$$= (2+12-4) - 0 = 10$$

$$A = A_1 + A_2 = 10 + 12 = 22.$$

$$A = A_2 - A_1 = -\int_a^b g(x) - \left(-\int_a^b f(x)\right) = \int_a^b (f(x)-g(x))\, dx.$$

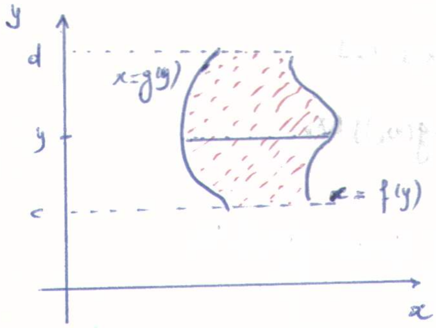
$$A_1 = -\int_a^b f(x)dx$$

$$A_2 = -\int_a^b g(x)dx$$

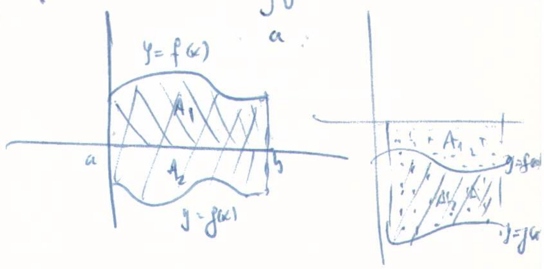
$$A_1 + A_2 = \int_a^b f - \int_a^b g = \int_a^b f-g.$$

$$A_1 = \int_a^b f(x)dx$$

$$A_2 = -\int_a^b g(x)dx$$

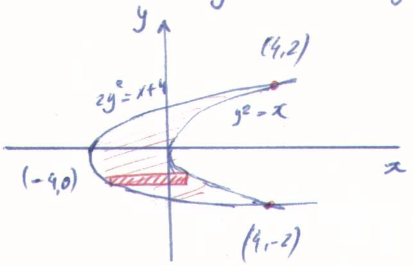


$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)]\, dy.$$



<u>Exemplo</u>: Achar a área da região delimitada pelos gráficos das equações

$2y^2 = x+4$ e $y^2 = x$



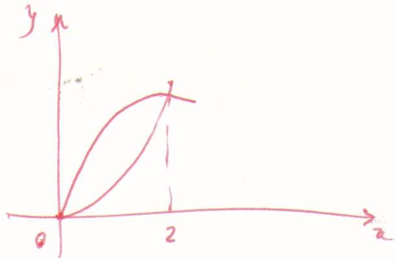
$$A = \int_{-2}^{2} [y^2 - (2y^2-4)]\, dy$$

$$= 2\int_0^2 (4-y^2)\, dy$$

$$= 2\left[4y - \frac{y^3}{3}\right]_0^2$$

$$= 2\left(8 - \frac{8}{3}\right) = \frac{32}{3}.$$

Exemplo: Encontre a área da região limitada pelas curvas $y=x^2$, $y=-x^2+4x$.



$$A = \int_0^2 [f(x) - g(x)]\,dx$$

$$= \int_0^2 [(-x^2+4x) - x^2]\,dx$$

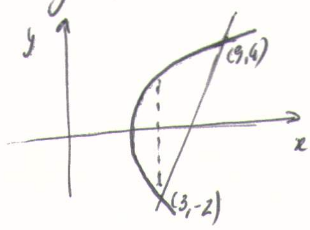
$$= \int_0^2 (-2x^2+4x)\,dx$$

$$= \left[-\frac{2}{3}x^3 + 2x^2\right]_0^2$$

$$= -\frac{16}{3} + 8 = \frac{8}{3}.$$

Exemplo: Encontre a área da região limitada pela parábola $y^2=2x-2$ e a reta $y=x-5$.

$\frac{y^2}{2}+1 = y+5$

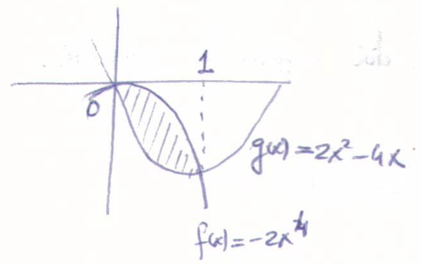


Exercícios

1) Calcule as integrais abaixo:

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$ b) $\displaystyle\int_0^{\infty} x e^{-x}\,dx$ c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{4/5}}$ d) $\displaystyle\int_{-2}^{4} \frac{1}{x^2}\,dx$

2) Sendo $f(x) = -2x^4$ e $g(x) = 2x^2 - 4x$, calcule a área da região limitada pelos gráficos de f e g.



Interceptando

$-2x^4 = 2x^2 - 4x$

daí:

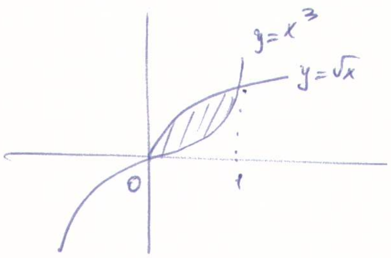
$-2x(x^3 + x - 2) = 0$, $x = 0$ e $x = 1$.

$x^3 + x - 2 = (x-1)(x^2 + x + 2)$

$$A = \int_0^1 [-2x^4 - (2x^2 - 4x)]\,dx = \int_0^1 (-2x^4 - 2x^2 + 4x)\,dx$$

$$= \left(-\frac{2}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 2x^2\right)\Big|_0^1 = \frac{14}{15}$$

3) Calcule a área da região limitada pelos gráficos das funções $f(x) = x^3$, $g(x) = \sqrt{x}$.



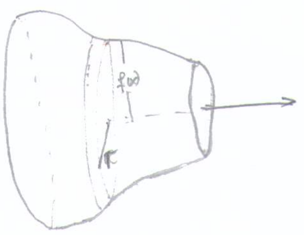
$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^3)\,dx$$

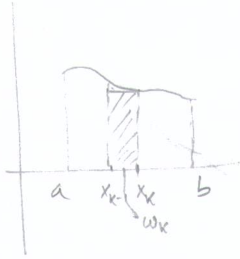
$$= \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1$$

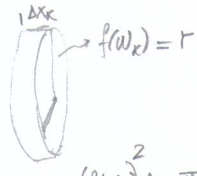
$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{8-3}{12} = \frac{5}{12} .$$

3

SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO







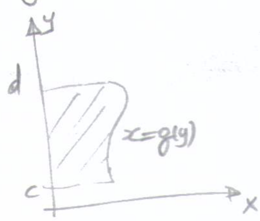
$\Delta V_k = (f(w_k))^2 \Delta x_k \pi$

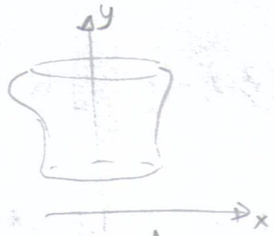
Soma Riemann $= \sum_{k=1}^{n} \pi (f(w_k))^2 \Delta x_k$

No limite:

$$V = \lim_{|P| \to 0} \sum \pi (f(w_k))^2 \Delta x_k = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx$$

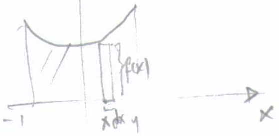
Analogamente,





$$V = \lim_{|P| \to 0} \sum \pi (g(w_k))^2 \Delta y_k = \int_c^d \pi (g(y))^2 dy.$$

Ex.: A região delimitada pelo eixo-x, pelo gráfico da equação $y = x^2+1$ e pelas retas $x=-1$ e $x=1$ gira em torno do eixo-x. Determine o volume do sólido gerado.

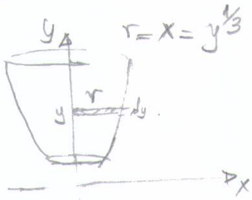


$$V = \int_{-1}^{1} \pi (x^2+1)^2 dx = 2\pi \int_0^1 (x^4 + 2x^2 + 1) dx = 2\pi \left[\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x\right]_0^1 = 2\pi \left[\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1\right]$$

$$= 2\pi \frac{3+10+15}{15} = \frac{56}{15}\pi$$

{ espessura do peq. cilindro: dx
raio: $f(x)$
volume do peq.: $\pi f(x)^2 dx$

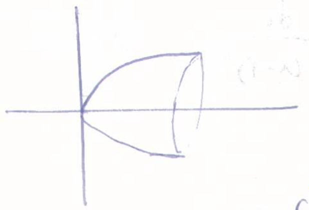
Ex. 2: A região delimitada pelo eixo-x e pelos gráficos de $y = x^3$, $y=1$ e $y=8$ gira em torno do eixo-y.

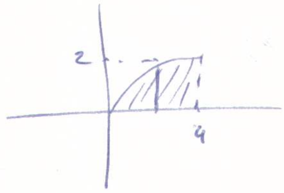


$$V = \int_1^8 \pi [y^{1/3}]^2 dy = \pi \int_1^8 y^{2/3} dy = \pi \left[\frac{y^{2/3+1}}{2/3+1}\right]_1^8$$

$$= \pi \left[\frac{y^{5/3}}{5/3}\right]_1^8 = \frac{3}{5}\pi [8^{5/3} - 1] = \frac{3}{5}\pi [2^5 - 1] = \frac{3 \cdot 31}{5}\pi = \frac{93}{5}\pi.$$

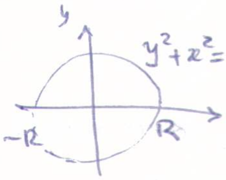
4) Um reservatório tem forma obtida pela rotação, em torno do eixo-x, do gráfico de f, sendo $f(x)=\sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 4$, x em metros. Calcule o volume do reservatório.





$$V = \int_0^4 \pi \left[\sqrt{x}\right]^2 dx = \int_0^4 \pi x \, dx = \pi \frac{x^2}{2}\Big|_0^4 = 8\pi .$$

5) Deduza a fórmula que dá o volume da esfera de raio R.



$$V = 2\int_0^R \pi \left(\sqrt{R^2-x^2}\right)^2 dx$$

$$= 2\int_0^R \pi \left(R^2-x^2\right) dx$$

$$= 2\pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^R$$

$$= 2\pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right)$$

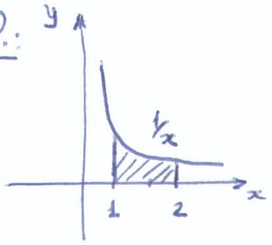
$$= \frac{4\pi}{3} R^3$$

6)

Exercícios — Cálculo II

1. Calcule o volume do sólido gerado pela rotação da região delimitada pelos gráficos das funções $y = 1/x$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$ em torno do eixo-y.

Sol.:



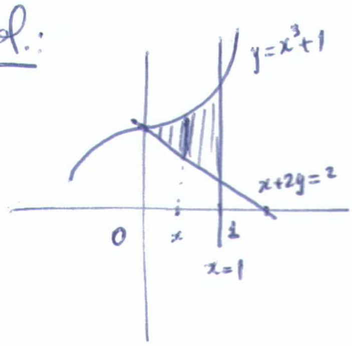
$$V = 2\pi \int_1^2 x \frac{1}{x}\, dx$$

$$= 2\pi\, x \Big|_1^2$$

$$= 2\pi.$$

2. Calcule o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da região delimitada pelos gráficos das funções $y = x^3+1$, $x+2y=2$, $x=1$ em torno do eixo-y.

Sol.:



$$V = \int_0^1 2\pi x \left[x^3+1-\left(1-\frac{x}{2}\right)\right] dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 \left(x^4 + \frac{x^2}{2} \right) dx$$

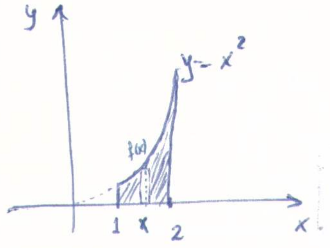
$$= 2\pi \left[\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{6} \right]_0^1$$

$$= 2\pi \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} \right)$$

$$= 2\pi \left(\frac{6+5}{30} \right)$$

$$= \frac{22}{15}\pi \text{ unid. cúbicas}$$

EXEMPLO 1: A região limitada pela curva $y=x^2$, o eixo-x e as retas $x=1$ e $x=2$ sofre uma rotação em torno do eixo-x. Encontre o volume do sólido de revolução gerado.



$f(x)=x^2$

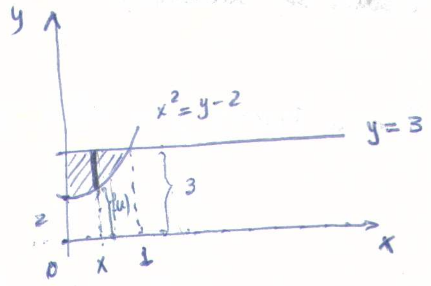
$$\Delta_i V = \pi (\xi_i^2)^2 \Delta_i x = \pi \xi_i^4 \Delta_i x$$

$$V = \lim_{\|P\| \to 0} \sum \pi \xi_i^4 \Delta x$$

$$= \pi \int_1^2 x^4 \, dx = \pi \left. \frac{x^5}{5} \right|_1^2$$

$$V = \frac{31}{5}\pi \text{ unidades cúbicas.}$$

Exemplo 2: A região delimitada pelos gráficos das equações, $x^2 = y-2$, a reta $y=3$ e o eixo-y e que está na parte positiva de x, gira em torno da reta $y=3$. Encontre o volume do sólido gerado.



$f(x) = x^2+2$

$$r = 3 - f(x) = 3-(x^2+2) = 1-x^2$$

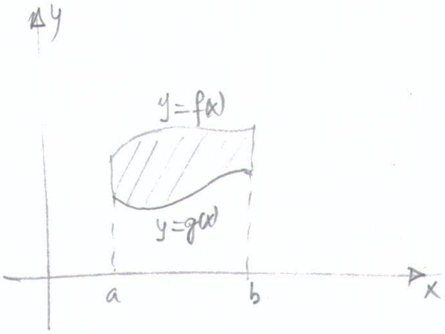
$$r = 3-(x^2+2) = 3-x^2-2 = 1-x^2$$

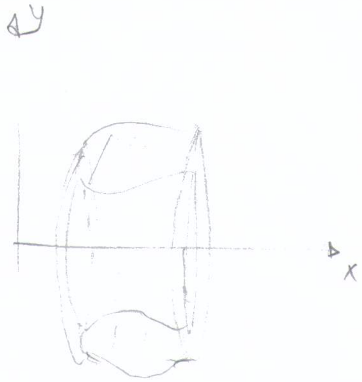
$$~~V = \pi \int_0^1 (1-x^2)^2 dx = \pi \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \pi \left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{2\pi}{3}~~ \text{ unidades cúbicas.}$$

$$\pi \int_0^1 (1-2x^2+x^4)\,dx = \pi \left[x - 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \pi \left[1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right]$$

$$= \pi \left[\frac{15-10+3}{15}\right] = \frac{8\pi}{15} \text{ unid. cúbicas.}$$

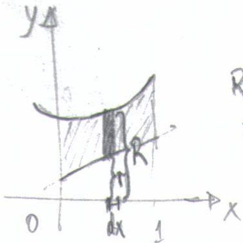
(4)





$$V = \int_a^b \pi (f(x))^2 dx - \int_a^b \pi (g(x))^2 dx = \int_a^b \pi \left((f(x))^2 - (g(x))^2\right) dx.$$

Ex.: A região delimitada pelos gráficos das eq. $x^2 = y-2$ e $2y - x - 2 = 0$ e pelas retas verticais $x=0$ e $x=1$, gira em torno do eixo-x. Determine o volume do sólido resultante.



$R = x^2+2$
$r = \frac{x}{2}+1$

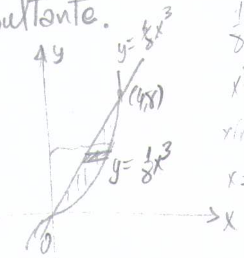
Sol.: $$V = \int_0^1 \pi\left[(x^2+2)^2 - \left(\frac{x}{2}+1\right)^2\right] dx$$

$$= \int_0^1 \pi\left[x^4 + 4x^2 + 4 - \left(\frac{x^2}{4} + x + 1\right)\right] dx$$

$$= \pi \int_0^1 \left(x^4 + \frac{15}{4}x^2 - x + 3\right) dx$$

$$= \pi\left(\frac{x^5}{5} + \frac{15}{4}\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x\right)\Big|_0^1 = \pi\left(\frac{1}{5} + \frac{5}{4} - \frac{1}{2} + 3\right) = \pi \frac{4+25-10+60}{20} = \frac{79}{20}\pi \approx 12{,}4.$$

Ex.2: A região do primeiro quadrante delimitada pelos gráficos de $y = \frac{1}{8}x^3$ e $y = 2x$ gira em torno do eixo-y. Determine o volume do sólido resultante.



$\frac{1}{8}x^3 = 2x$
$x^3 = 16x$
$x(x^2-16) = 0$
$x=0, x=4$

Sol.: Raio menor: $x = \sqrt[3]{8y}$
Raio maior: $x = y/2$

$$V = \int_0^8 \pi\left[\left[2(y)^{1/3}\right]^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2\right] dy$$

$$= \pi \int_0^8 \left(4y^{2/3} - \frac{y^2}{4}\right) dy = \pi\left[4\frac{y^{2/3+1}}{2/3+1} - \frac{y^3}{12}\right]_0^8 = \pi\left[\frac{12}{5}2^5 - \frac{2^6}{12}\right]$$

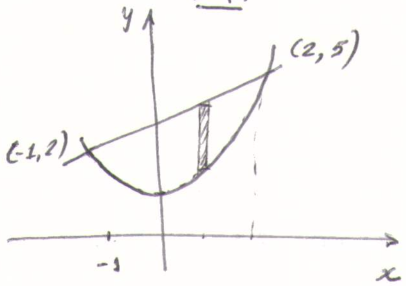
$$= \pi \cdot 2^5\left[\frac{12}{5} - \frac{1}{6}\right] = \pi \cdot 2^5\left[\frac{12\cdot 6 - 5}{30}\right] = \frac{512}{15}\pi$$

$\frac{12}{5}8^{5/3} - \frac{8^3}{12}$ $\quad (2^3)^2$

$\frac{12}{5}\cdot 2^5 - 2\cdot\frac{8^2}{3} = \left(\frac{12}{5} - \frac{4}{3}\right) = 2^5\left(\frac{36-20}{15}\right) = \frac{2^5\cdot 16}{15} = \frac{2^9}{15}$

Exemplo 2: Encontre o volume do sólido gerado pela rotação em torno do eixo-x, da região limitada pela parábola $y = x^2+1$ e a reta $y = x+3$.

Sol:



Tomando $f(x) = x+3$ e $g(x) = x^2+1$, encontramos a medida do anel circular, que é:

$$\Delta_i V = \pi \left[f(\xi_i)^2 - g(\xi_i)^2 \right] \Delta_i x$$

então

$$V = \pi \int_{-1}^{2} \left[f(x)^2 - g(x)^2 \right] dx$$

$$= \pi \int_{-1}^{2} \left[(x+3)^2 - (x^2+1)^2 \right] dx$$

$$= \pi \int_{-1}^{2} (-x^4 - 2x^2 - 1 + x^2 + 6x + 9)\, dx$$

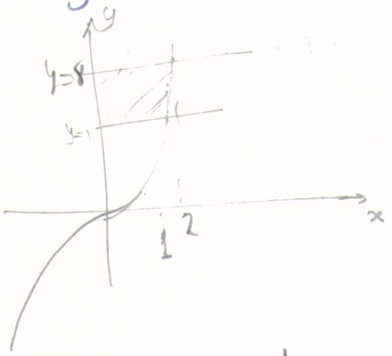
$$= \pi \int_{-1}^{2} (-x^4 - x^2 + 6x + 8)\, dx$$

$$= \pi \left(-\frac{1}{5}x^5 - \frac{x^3}{3} + 6\frac{x^2}{2} + 8x \right) \Big|_{-1}^{2}$$

$$= \pi \left(-\frac{32}{5} - \frac{8}{3} + 12 + 16 \right) - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3} + 3 - 8 \right)$$

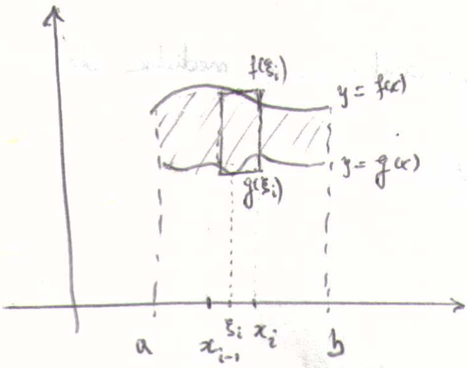
$$= \pi \, \frac{117}{5} \text{ unidades cúbicas.}$$

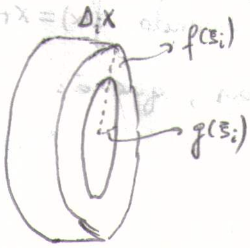
Exemplo 3: A região delimitada pelo eixo-y e pelos gráficos de $y=x^3$, $y=1$ e $y=8$ gira em torno do eixo-y. Determine o volume do sólido resultante.



$$\frac{3}{5}\pi\,[32-1] = \frac{93}{5}\pi$$

f e g funções contínuas em $[a,b]$ e $f(x) \geq g(x) > 0$, $\forall x \in [a,b]$.





$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

$$\Delta_i x = x_i - x_{i-1}, \quad x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$$

Área da região circular $A_i = \pi f(\xi_i)^2 - \pi g(\xi_i)^2$

Volume do Invólucro cilíndrico: $\Delta_i V = \pi\,[f(\xi_i)^2 - g(\xi_i)^2]\,\Delta_i x$

Daí:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_i V = \sum_{i=1}^{n} \pi\,[f(\xi_i)^2 - g(\xi_i)^2]\,\Delta_i x$$

Segue que

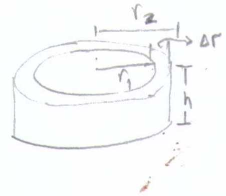
$$V = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi\,[f(\xi_i)^2 - g(\xi_i)^2]\,\Delta_i x$$

ou seja,

$$V = \pi \int_a^b [f(x)^2 - g(x)^2]\,dx$$

(3)

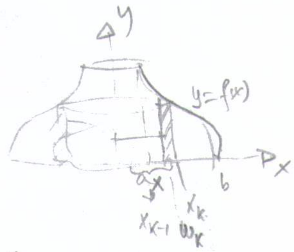
VOLUME POR ANÉIS CILÍNDRICOS



r_2 = raio exterior
r_1 = raio interior
$\Delta r = r_2 - r_1$ espessura do anel
h = altura
$r = \dfrac{r_1+r_2}{2}$ raio médio.

Volume da casca cilíndrica:

$$\pi r_2^2 h - \pi r_1^2 h = \pi (r_2^2 - r_1^2)\, h$$
$$= \pi (r_1+r_2)(r_2-r_1)\, h \qquad (\bar{r} \text{ raio médio})$$
$$= 2\pi \left(\frac{r_1+r_2}{2}\right)(r_2-r_1)\, h$$
$$= 2\pi \bar{r}\, \Delta r\, h$$



Altura = $f(w_k)$
raio médio = w_k
espessura = Δx_k

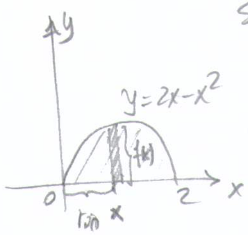
P partição de $[a,b]$

Volume do anel = $2\pi\, w_k\, f(w_k)\, \Delta x_k$

Soma de Riemann = $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2\pi\, w_k\, f(w_k)\, \Delta x_k$

$$V = \lim_{|P| \to 0} \sum_{k=1}^{n} 2\pi\, w_k\, f(w_k)\, \Delta x_k = \int_a^b 2\pi x\, f(x)\, dx.$$

Exemplo: A região delimitada pelo gráfico de $y = 2x - x^2$ e pelo eixo-x gira em torno do eixo-y. Determine o volume do sólido resultante.



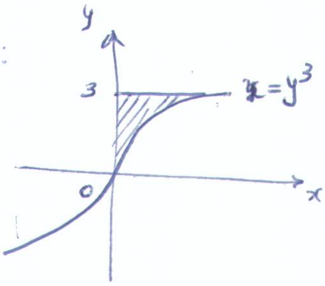
Sol.:
espessura do anel = dx
raio médio = x
altura = $f(x) = 2x - x^2$
Volume do anel = $2\pi x\,(2x - x^2)\, dx$

Assim: o volume do sólido é:

$$V = \int_0^2 2\pi x\,(2x - x^2)\, dx = 2\pi \int_0^2 (2x^2 - x^3)\, dx$$
$$= 2\pi \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^2 = 2\pi \left[\frac{2^4}{3} - \frac{2^4}{4}\right] = 2^5 \pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 2^5 \pi \left(\frac{4-3}{12}\right)$$
$$= \frac{8\pi}{3} \approx 8{,}4.$$

3. Encontre o volume do sólido gerado pela revolução da região delimitada pelos gráficos das equações $y^3 = x$, $y = 3$, $x = 0$ em torno do eixo-x.

Sol.:



$$V = 2\pi \int_0^3 y\, y^3\, dy$$

$$= 2\pi \int_0^3 y^4\, dy$$

$$= \frac{2\pi}{5}\, y^5 \Big|_0^3$$

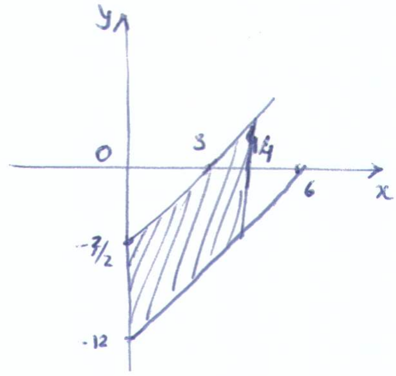
$$= \frac{2\pi}{5}\, 3^5$$

$$= \frac{486}{5}\pi \text{ unid. cúbicas.}$$

$3^2 = 9$

$$\begin{array}{r} 81 \\ \times 3 \\ \hline 243 \\ \times 2 \\ \hline 486 \end{array}$$

4. A mesma coisa; para $2x - y = 12$, $x - 2y = 3$, $x = 4$, eixo-y.

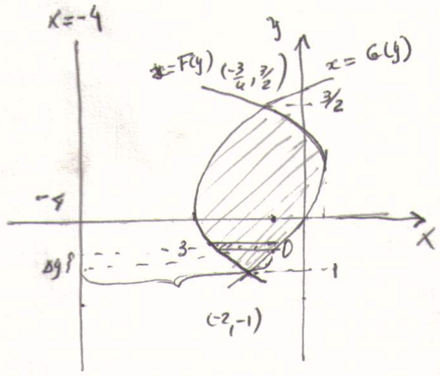


$$V = 2\pi \int_0^4 x \left[2x - 12 - \frac{x}{2} + \frac{3}{2} \right] dx.$$

MÉTODO DO DISCO

EXEMPLO 3: Encontre o volume do sólido de revolução gerado pela rotação, em torno da reta $x = -4$, da região limitada pelas duas parábolas

$$x = y - y^2 \quad e \quad x = y^2 - 3.$$



$F(y) = y - y^2$

$G(y) = y^2 - 3.$

4 - (

$y - y^2 = y^2 - 3$

$2y^2 - y - 3 = 0$

$y = -1$ e $y = \frac{3}{2}.$

$$V = \pi \int_{-1}^{3/2} \left[(4 + y - y^2)^2 - (4 + y^2 - 3)^2 \right] dy.$$

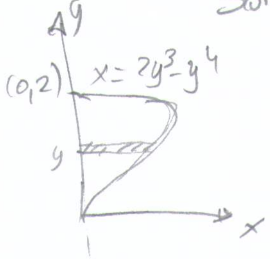
$$= \pi \int_{-1}^{3/2} (-2y^3 - 9y^2 + 8y + 15)\, dy.$$

$$= \pi \left[-\frac{1}{2}y^4 - 3y^3 + 4y^2 + 15y \right]_{-1}^{3/2}$$

$$= \frac{875}{32}\pi.$$

(6)

Ex.: A região do primeiro quadrante delimitada pelo gráfico da equação $x = 2y^3 - y^4$ e pelo eixo-y gira em torno do eixo-x. Estabeleça uma integral para o volume do sólido resultante.



Sol.: espessura do anel $= dy$

raio médio $= y$

altura $= 2y^3 - y^4$

volume anel $= 2\pi y\,(2y^3 - y^4)\,dy$

Volume do sólido:

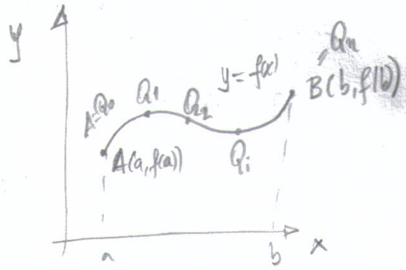
$$V = \int_0^2 2\pi y\,(2y^3 - y^4)\,dy = 2\pi \int_0^2 (2y^4 - y^5)\,dy$$

$$= 2\pi \left(2\frac{y^5}{5} - \frac{y^6}{6}\right)\Big|_0^2 = 2^7\pi\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) = 2^7\pi\,\frac{6-5}{30} = \frac{2^7}{30}\pi$$

$2^4 = 16$

$$= \frac{2^6}{15}\pi = \frac{64}{15}\pi.$$

COMPRIMENTO DE ARCO



Uma função f é suave num intervalo se tem uma derivada f' contínua em todo o intervalo. Isto impede que o gráfico de f tenha pontos angulosos e pontos de reversão.

$P =$ partição de $[a,b]$.

$$d(Q_{k-1}, Q_k) = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2} = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}$$

Pelo Teo. valor médio

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(w_k)(x_k - x_{k-1}), \quad w_k \in (x_{k-1}, x_k).$$

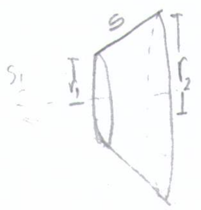
Assim $d(Q_{k-1}, Q_k) = \sqrt{1 + f'(w_k)^2}\,\Delta x_k$

Dai formamos:

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + f'(w_k)^2}\,\Delta x_k$$

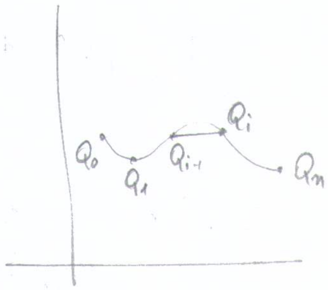
ÁREA DE SUPERFÍCIE

ÁREA DA SUPERFÍCIE DE UM CONE



Área da superfície de um tronco de cone é

$$\pi(r_1+r_2)s = 2\pi\left(\frac{r_1+r_2}{2}\right)s$$



Seja f uma função suave não-negativa em [a,b] e, consideremos a superfície gerada pela revolução do gráfico de f em torno do eixo-x. Queremos encontrar uma fórmula para a área de S. Seja P uma partição de [a,b] e seja $Q_k(x_k, f(x_k))$ o ponto do gráfico de f. O segmento de reta $Q_{k-1}Q_k$ gera um tronco de cone com raios de base $f(x_{k-1})$ e $f(x_k)$ e altura $d(Q_{k-1},Q_k)$. Logo, a área desse tronco é:

$$2\pi\left(\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}\right)d(Q_{k-1},Q_k)$$

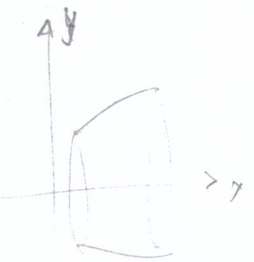
Formando a soma de Riemann:

$$S_R = \sum_k 2\pi\left(\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}\right)d(Q_{k-1},Q_k) = \sum 2\pi\left(\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}\right)\sqrt{1+f'(x_k)^2}\,\Delta x_k$$

A área da superfície de revolução é:

$$A_S = \lim_{\|P\|\to 0} S_R$$

$ds = \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$
$y = f(x)$



Assim:

$$A_S = \int_a^b 2\pi\left(\frac{f(x)+f(x)}{2}\right)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

$$A = \int_a^b 2\pi y\,ds$$

Exemplo: O gráfico de $y=\sqrt{x}$ de (1,1) a (4,2) gira em torno do eixo-x. Determine a área da superfície obtida.

Sol.:

$$S = \int_1^4 2\pi y\,ds = \int_1^4 2\pi\sqrt{x}\sqrt{1+\left(\frac{1}{2x^{1/2}}\right)^2}\,dx = \int_1^4 2\pi\sqrt{x}\sqrt{\frac{4x+1}{4x}} = \int_1^4 2\pi\sqrt{4x+1}\,dx$$

$u = 4x+1$
$du = 4dx$

$$= \frac{\pi}{6}\left[(4x+1)^{3/2}\right] = \frac{\pi}{6}\left(17^{3/2}-5^{3/2}\right) \approx 30{,}85$$

Exemplo 6: O gráfico da equação $y = 2\sqrt[3]{x}$ de $(1,2)$ a $(8,4)$, gira em torno do eixo-y. Determine a área da superfície resultante.

Sol.: Temos que $x = \left(\frac{y}{2}\right)^3$.

$$A_S = \int_2^4 2\pi x \, ds = \int_2^4 2\pi\left(\frac{y}{2}\right)^3 \sqrt{1 + \left[\frac{3}{8}y^2\right]^2}\, dy = 2\pi \int_2^4 \frac{y^3}{8} \sqrt{1 + \frac{9}{64}y^4}\, dy$$

$$= \frac{4}{9}\pi \int \sqrt{u}\, du = \frac{4}{9}\pi \frac{u^{3/2}}{3/2} = \frac{8}{27}\pi \left[1 + \frac{9}{64}y^4\right]\Big|_2^4$$

$$= \frac{8}{27}\pi \left\{\left[1 + \frac{9}{64}.4^4\right] - \left[1 + \frac{9}{64}.2^4\right]\right\}.$$

$$= \frac{8}{27}\pi \left\{37 - \frac{13}{4}\right\}$$

Exemplo 7: Use uma integral definida para estabelecer uma fórmula para a área da superfície esférica de raio r.

Exemplo 8: Um segmento esférico de altura h e raio de base r.

(3) (14)

$$A_s = \int_a^b 2\pi f(x)\, ds = \int_a^b 2\pi y\, ds.$$

Exemplo4: O gráfico de $y = \sqrt{x}$ de $(1,1)$ a $(4,2)$ gira em torno do eixo-x. Determine a área de superfície resultante.

Sol.:

$$A_s = \int_1^4 2\pi y\, ds$$

$$= \int_1^4 2\pi x^{1/2} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2x^{1/2}}\right)^2}\, dx.$$

$u = 4x+1$
$du = 4dx.$

$$= \int_1^4 2\pi x^{1/2} \sqrt{\frac{4x+1}{4x}} = \pi \int_1^4 \sqrt{4x+1}\, dx$$

$$= \frac{\pi}{6}\left[(4x+1)^{3/2}\right]_1^4 = \frac{\pi}{6}\left(17^{3/2} - 5^{3/2}\right) \simeq 30{,}85.$$

Exemplo5: O gráfico da equação $y = x^3$, de $A = (1,1)$ a $B(2,8)$ gira em torno do eixo-x. Determine a área de superfície resultante.

Sol.:

$u = 1 + 9x^4$
$du = 36x^3 dx$

$$A_s = \int_1^2 2\pi y\, ds$$

$$= \int_1^2 2\pi x^3 \sqrt{1 + (3x^2)^2}\, dx$$

$$= \int_1^2 2\pi x^3 \sqrt{1 + 9x^4}\, dx$$

$$= \frac{\pi}{18}\int_{10}^{1+9.2^4} \sqrt{u}\, du = \frac{\pi . 2}{18 . 3}\left[u^{3/2}\right]_{10}^{1+9.16} = \frac{\pi}{27}\left[[1+9.16]^{3/2} - [10]^{3/2}\right]$$

$$= \frac{\pi}{27}\left[(145)^{3/2} - [10]^{3/2}\right] \text{ (unidades quadradas)}$$

7

$$L = \lim_{\|P\| \to 0} \sum \sqrt{1+(f'(w_k))^2}\, \Delta x_k$$

Logo: $L = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx$. Comprimento de arco do gráfico de f do ponto A ao ponto B.

Exemplo 1: Se $f(x) = 3x^{2/3} - 10$, determine o comprimento de arco de f de $A(8,2)$ a $B(27,17)$.

Sol.: $f'(x) = 2x^{-1/3} = \frac{2}{x^{1/3}}$

$$L = \int_8^{27} \sqrt{1 + \frac{4}{x^{2/3}}}\, dx = \int_8^{27} \sqrt{\frac{x^{2/3}+4}{x^{2/3}}}\, dx = \int_8^{27} \frac{\sqrt{x^{2/3}+4}}{x^{1/3}}\, dx$$

Fazendo $u = x^{2/3}+4$, $du = \frac{2}{3}x^{-1/3}$. Assim

$$L = \frac{3}{2}\int_8^{13} \sqrt{u}\, du = u^{3/2}\Big|_8^{13} = 13^{3/2} - 8^{3/2} \approx 24,2.$$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$1 + tg^2\theta = \sec^2\theta$.

Se $x = g(y)$ no intervalo $[c,d]$ suave. Então

$$L = \int_c^d \sqrt{1+(g'(y))^2}\, dy.$$

$2y - 1 = tg\,\theta$

$2\,dy = \sec^2\theta$

$1 + tg^2\theta = \sec^2\theta$

Ex. 2: Estabeleça uma integral para achar o comprimento de arco de $y^3 - y - x = 0$ de $A(0,-1)$ a $B(6,2)$.

$y^2 - y - x = 0$ $\quad \int \sec\theta \sec^2\theta$

$x = g(y) = y^2 - y$.

$g'(y) = 2y - 1$

$\sqrt{1+(2y-1)^2}$

$= \sqrt{1+4y^2-4y+1}$

$= \sqrt{2+4y^2-4y}$

$\sqrt{2}\sqrt{1+2y^2-2y}$

Sol.: $x = y^3 - y$. $g(y) = y^3 - y$.

$$L = \int_{-1}^{2} \sqrt{1+(3y^2-1)^2}\, dy = \int_{-1}^{2} \sqrt{9y^4 - 6y^2 + 2}\, dy.$$

Definição: Seja f suave em $[a,b]$. A função comprimento de arco s para o gráfico de f em $[a,b]$ se define como

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1+(f'(t))^2}\, dt, \quad a \le x \le b.$$

Teo.: Seja f suave em $[a,b]$, e seja s a função comprimento de arco para o gráfico de $y = f(x)$ em $[a,b]$. Se dx e dy são as diferenciais de x e y, então

(i) $ds = \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx$, (ii) $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$.

$$\left(s(x) = \int_a^x \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt. \right)$$

①

FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS

Função de X em Y.

$$f : X \longrightarrow Y$$
$$x \longmapsto f(x) = y$$

Definição:

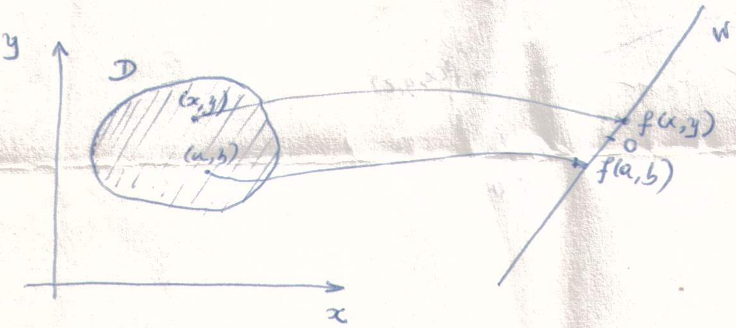
Seja D um conjunto de pares ordenados de números reais. Uma função f de duas variáveis é função tal que:

$$f : D \subset \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longrightarrow f(x,y).$$

D = domínio de f. (O domínio D de uma função de duas variáveis é o conj. de pares ordenados onde faz sentido f(x,y))

O contradomínio de f consiste de todos os números reais f(x,y), com $(x,y) \in D$.

$$Cd(f) = \{ f(x,y) \in \mathbb{R} \; ; \; (x,y) \in D \}.$$

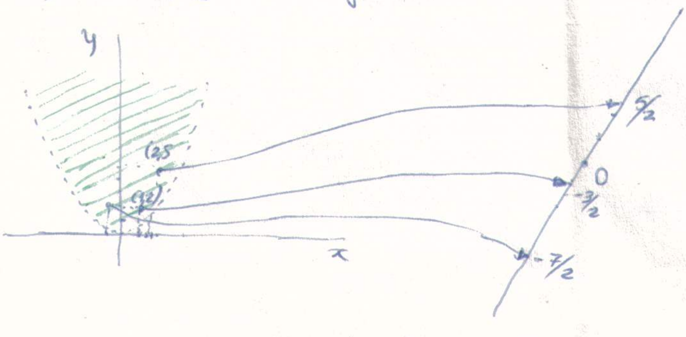


Exemplo 1: Se

$$f(x,y) = \frac{xy - 5}{2\sqrt{y - x^2}}$$

determine o domínio D de f. Ilustre D e os números f(2,5), f(1,2) e f(-1,2) como na fig.

Solução: O domínio D é o conjunto de todos os pares ordenados (x,y), onde $y - x^2$ seja positivo, isto é, $y > x^2$. Logo,



(2)

Suponha que temos $V = \pi r^2 h$, V é o volume de um cilindro circular reto em função da altura h e do raio da base r. Os símbolos r e h são as variáveis independentes, e V é a variável dependente.

De modo análogo, se D é um subconjunto de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, definimos

$$f: D \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y,z) \longmapsto f(x,y,z)$$

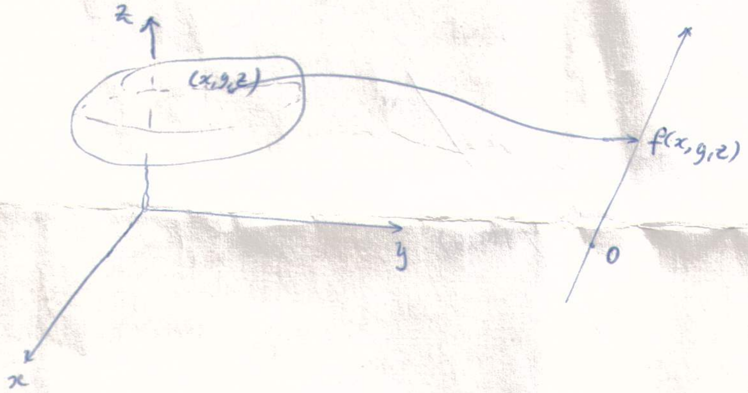
f função de três variáveis reais.

Neste caso, D é uma região do espaço Tri-dimensional.

Exemplo: f dado por:

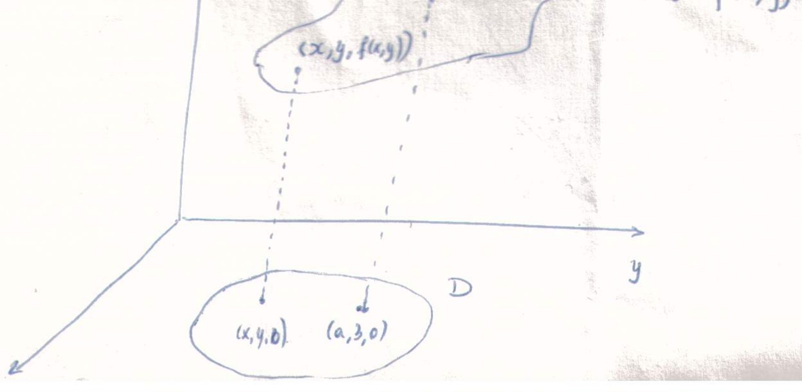
$$f(x,y,z) = \frac{x e^y + \sqrt{z^2+1}}{xy \operatorname{sen} z}$$

é uma função de x, y, e z.



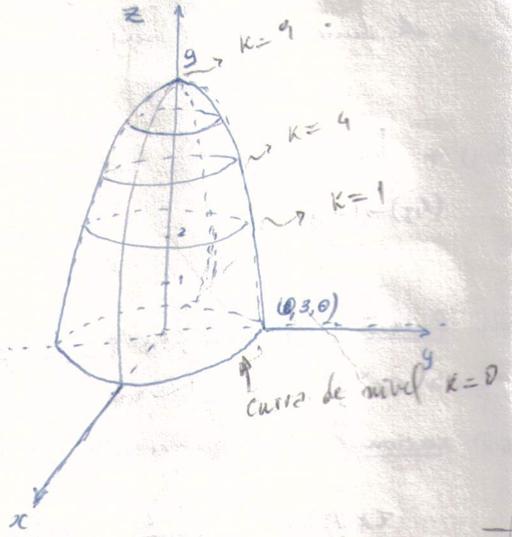
Analogamente, define-se funções de quatro, cinco ou qualquer número de variáveis.

Considere f uma função de duas variáveis x e y. O gráfico de f é, por definição, o gráfico da equação $z = f(x,y)$ num sistema retangular tridimensional, resultando numa superfície S.



Exemplo 2: Esboce o gráfico de f se $f(x,y) = 9 - x^2 - y^2$, com $D = \{(x,y);\ x^2+y^2 \leq 9\}$

Solução:

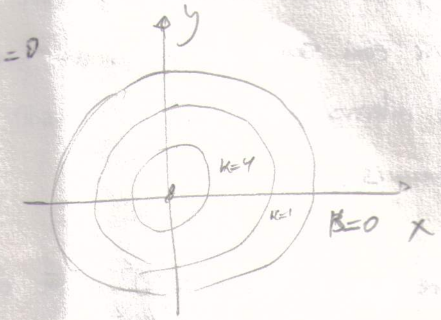


Ex.: $0 = 9 - x^2 - y^2 \Rightarrow$
$x^2+y^2 = 3^2$ circunf. de raio 3

$f(x,y) = 1 \Rightarrow$
$x^2+y^2 = 8 = (2\sqrt{2})^2$

$f(x,y) = 4$
$x^2+y^2 = 5 = (\sqrt{5})^2$

$f(x,y) = 9$
$x^2+y^2 = 0$



Quando fazemos

$$f(x,y) = K,$$

para vários valores de K, e esboçamos o gráfico destas equações para cada valor de K, os gráficos obtidos são chamados curvas de nível associadas a f.

Exemplo 3: Esboce algumas curvas de nível associadas à função f do exemplo 2.

:

Se uma função f é de três variáveis x, y, z, então, as superfícies de nível associadas a f são os gráficos de $f(x,y,z) = K$.

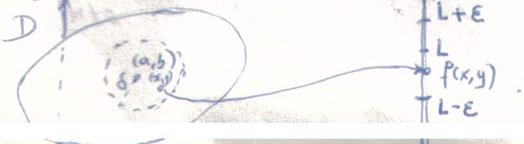
As curvas de nível são utilizadas para elaboração de mapas topográficos, ou mapas de contorno.

LIMITES E CONTINUIDADE

Considere uma função $f(x,y)$ onde (x,y) varia no domínio D de f. Se quando (x,y) tende para um certo ponto (a,b) fixo, $f(x,y)$ tende para um certo valor fixo L, então dizemos que L é o limite de $f(x,y)$ quando (x,y) tende para (a,b) e, denotamos

$$(*) \qquad \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L.$$

Em linguagem matemática: Para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que se $0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$ então $|f(x,y) - L| < \varepsilon$.



(4) Se f e g são funções de duas variáveis, então $f+g$, $f-g$, fg e f/g se definem de maneira usual, ~~(podendo-se estender)~~ p/ estes casos, os limites de somas, produtos e quocientes de funções de uma variável real. Exemplo:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} [f(x,y)+g(x,y)] = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) + \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y).$$

Uma função f de duas variáveis é uma função polinomial, ou polinômio, se $f(x,y)$ pode se expressar com soma de termos da forma $cx^m y^n$, onde c é um número real e m e n são inteiros positivos. Uma função racional é o quociente de duas funções polinomiais.

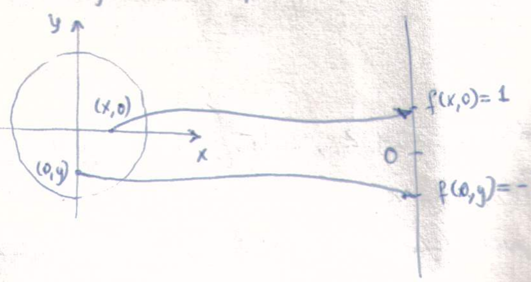
$f(x,y)=\sum_{n,m=1}^{N} a_{mn} x^m x^n$

Ex: 1) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-2}{3+xy}$, 2) $\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{4+x}{2-y}$

Exemplo 1: Mostre que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ não existe.

$a_{00}+a_{10}x+a_{01}y+a_{11}xy+\dots+a_{mn}x^m y^n$

Sol.: Se $f(x,y)=(x^2-y^2)/(x^2+y^2)$, então f é definida em todo ponto exceto $(0,0)$. Se consideramos um ponto arbitrário $(x,0)$ do eixo dos x, então $f(x,0)=\frac{x^2}{x^2}=1$, desde que $x\neq 0$. Para pontos $(0,y)$ do eixo dos y, $f(0,y)=-y^2/y^2=-1$, se $y\neq 0$. Consequentemente, qualquer círculo de centro $(0,0)$, contém pontos em que o valor de f é 1 e pontos onde o valor de f é -1.



O Limite L de uma função $f(x,y)$ deve independer da trajetória que aproxima (x,y) de (a,b). Portanto,

se duas trajetórias distintas que conduzem a um mesmo ponto $P(a,b)$ originam valores diferentes para f, então não existe o limite de $f(x,y)$ qdo (x,y) tende para (a,b).

$\frac{x^2}{2x^2}\to\frac{1}{2}$

$\frac{xy}{x^2+y^2}$

Exemplo 3: Se $f(x,y)=\frac{x^2y}{x^4+y^2}$ determine, se possível, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Sol.: Fazendo (x,y) tender a $(0,0)$ ao longo de qualquer reta $y=mx$, que passa pela origem, vemos que se $m\neq 0$ então

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2(mx)}{x^4+(mx)^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{mx}{x^2+m^2} = \frac{0}{0+m^2}=0.$$

(5) No entanto, se fazemos (x,y) tender a $(0,0)$ ao longo da parábola $y = x^2$, então

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2(x^2)}{x^4+(x^2)^2}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}$$

Exemplo 3: Se $f(x,y) = \dfrac{(x-1)^2(y-2)}{(x-1)^4+(y-2)^2}$

$\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y)$ (?)

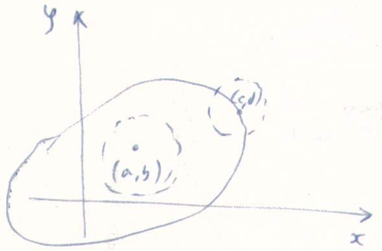
$y-2 = m(x-1)$; $y = m(x-1)+2$

$y-2 = (x-1)^2$; $y = (x-1)^2+2$

$\dfrac{m(x-1)^3}{(x-1)^4+(x-1)\ldots}$

$\dfrac{(x-1)^2 \; m(x-1)}{(x-1)^2+m\ldots}$

Seja R uma região do plano xy. Então (a,b) é ponto interior de R se existe um círculo de centro (a,b) que só contém pontos de R. Um ponto (a,b) é ponto de fronteira de R se todo círculo de centro (a,b) contém pontos de R e pontos que não estão em R.



$f(x,y) = xy$

$\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} f(x,y) = 2$

$|xy-2|_{y=1}$

$= x$

OPTIONAL: Seja f função de duas variáveis definida para todo par (x,y) em R, exceto possivelmente em (a,b). Se (a,b) é ponto interior, utilizamos a Definição de Limite para pesquisar o limite de $f(x,y)$ qdo (x,y) tende para (a,b). Se (a,b) é ponto de fronteira, utilizamos a mesma definição, com a restrição de que (x,y) tanto pertence a R como ao círculo de raio δ.

Uma função f de duas variáveis é contínua em (a,b) se

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b).$$

Se $R \subset D$ (Domínio de f) então dizemos que f é contínua em R se f é contínua em cada ponto (a,b) de R. (Isto quer dizer que se (x,y) está próximo de (a,b) então o ponto $(x,y,f(x,y))$ está próximo do ponto $(a,b,f(a,b))$; (Graficamente))

Função de três variáveis:

Limite: $\lim\limits_{(x,y,z)\to(a,b,c)} f(x,y,z) = L$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta$; $0 < \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2} < \delta \Rightarrow |f(x,y,z) - L| < \varepsilon$.

Continuidade: f é contínua em (a,b,c) se

$$\lim f(x,y,z) = f(a,b,c).$$

(6)
$$\begin{tikzcd} & CDf \arrow[dr, "g"] & \\ D_1 \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g\circ f"'] & & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$f: D_1 \to \mathbb{R}$; $g: D_2 \to \mathbb{R}$ $\boxed{CD(f) \subset D_2}$ $g\circ f: D_1 \to \mathbb{R}$

$(\mathrm{Im} f \subset D_2.)$

Se f é uma função de duas variáveis e g uma função de uma variável, então podemos definir h de duas variáveis como

$$h = g(f(x,y))$$

desde que o contra domínio de f esteja ~~no~~ domínio de g.

Exemplo 4: Nos casos seguintes, expresse $g(f(x,y))$ em termos de x, y e dê domínio da função composta resultante.

(a) $f(x,y) = xe^y$, $g(t) = 3t^2 + t + 1$

(b) $f(x,y) = y - 4x^2$, $g(t) = \operatorname{sen}\sqrt{t}$

Sol: substituimos em cada caso t por $f(x,y)$. obtemos:

(a) $g(f(x,y)) = 3(xe^y)^2 + (xe^y) + 1 = 3x^2e^{2y} + xe^y + 1$

(b) $g(f(x,y)) = \operatorname{sen}\sqrt{y - 4x^2}$

O domínio ~~da~~ (a) é $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. ~~E~~ o em (b) é o conj. de todos os (x,y) tais que $y \geq 4x^2$.

Teorema: Se uma função f de duas variáveis é contínua em (a,b) e a função g é contínua em $f(a,b)$, então a composta $h(x,y) = g(f(x,y))$ é contínua em (a,b).

$t = f(x,y) \to f(a,b)$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b) \; ; \; \lim_{t\to f(a,b)} g(t) = g(f(a,b)) \; : \; \lim_{(x,y)\to(a,b)} h(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(f(x,y)) = \lim_{t\to f(a,b)} g(t) = g(f(a,b))$$

Diferenciabilidade

$|(x,y)-(a,b)| < \delta$ $\quad |f(x,y) - f(a,b)| < \delta_1$ $\quad |h(x,y) - h(a,b)| = |g(f(x,y)) - g(f(a,b))| < \varepsilon$.

Definição 1: Se f é uma função de duas variáveis, as derivadas parciais primeiras de f em relação a x e a y são as funções f_x e f_y definidas como:

$$f_x(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} \quad \text{e} \quad f_y(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}$$

desde que existam os limites.

Notações:

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{e} \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{ou} \quad D_x f,\ D_y f.$$

Se $W = f(x,y)$

$$f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial W}{\partial x} = W_x$$

$$f_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial W}{\partial y} = W_y$$

Exemplo1: Calcule $f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$ se $f(x,y)=x^3y^2-2x^2y+3x$. EX.2: $f(x,y)=\frac{xy}{x+y}$

EX.3: $\ln(xy)$

Sol: Temos que:

$$f_x(x,y)=3x^2y^2-4xy+3$$

$$f_y(x,y)=2x^3y-2x^2.$$

$f(x,y)$ temperatura

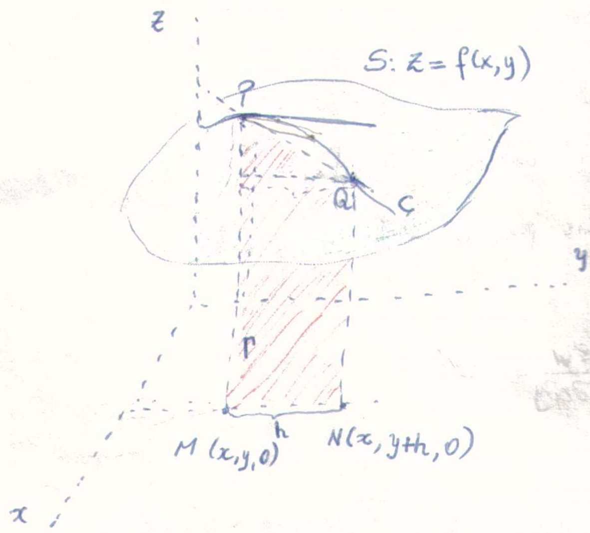
$\Delta f = f(x+h,y)-f(x,y)$ variação líquida de temp.

$\frac{\Delta f}{h}$ = variação média de temp.

$f_x=\lim_{h\to 0}\frac{\Delta f}{h}$ taxa (instantânea) de variação da temp. em relação à dist. qdo (x,y) se move na direção h

$\frac{\partial}{\partial x}[\ln(xy)] = \frac{1}{xy}$.

Interpretação geométrica das derivadas parciais



Considere os pontos $M(x,y,0)$ e $N(x,y+h,0)$.
O Plano Γ paralelo ao plano yz, passando por M e N intercepta a curva C paralela ao plano-zy.
P e Q pontos de C que projetados ao plano xy dão M e N, resp.. Conforme a figura, $MP=f(x,y)$, $NQ=f(x,y+h)$ e $\|\overline{MN}\|=h$. A razão $[f(x,y+h)-f(x,y)]/h$ é o coeficiente angular da secante por P e Q no plano Γ. O limite desta razão quando h tende a zero, ou seja, $f_y(x,y)$ é o coeficiente angular da tangente a C em P na direção de eixo-y.
Analogamente, para $f_x(x,y)$.

Para funções de três variáveis, definimos as derivadas parciais do mesmo modo, isto é, se f é função de três variáveis x, y, z, então

$$f_x=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y,z)-f(x,y,z)}{h}\ ;\quad f_y=\lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h,z)-f(x,y,z)}{h}$$

e

$$f_z=\lim_{h\to 0}\frac{f(x,y,z+h)-f(x,y,t)}{h}.$$

D superfície de um lago
$f(x,y)$ profundidade da água sob (x,y) na superfície
$f_x(x,y)$ é a taxa à qual a profundidade varia qdo o pto se afasta de (x,y) paralelamente ao eixo-x.

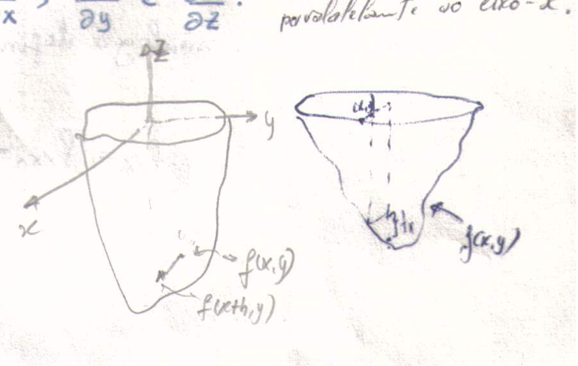
Exemplo2: se $w=x^2y^3\operatorname{sen} z+e^{xz}$, determine $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$ e $\frac{\partial w}{\partial z}$.

Sol:

$$\frac{\partial w}{\partial x}=2xy^3\operatorname{sen} z+ze^{xz}.$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=3x^2y^2\operatorname{sen} z+0.$$

$$\frac{\partial w}{\partial z}=x^2y^3\cos z+xe^{xz}.$$



Se f é uma função das duas variáveis x e y então f_x e f_y são também funções das duas variáveis x e y; podemos então considerar as suas derivadas parciais primeiras, que serão as derivadas parciais segundas de f e denotamos:

(8)

$$\frac{\partial f_x}{\partial x} = (f_x)_x = f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$

$$\frac{\partial f_x}{\partial y} = (f_x)_y = f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial f_y}{\partial x} = (f_y)_x = f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial f_y}{\partial y} = (f_y)_y = f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Se f tem derivadas parciais segundas contínuas, então $f_{xy} = f_{yx}$.
Analogamente, se $w = f(x,y,z)$ e f tem derivadas parciais contínuas, então a ordem de derivação é indiferente

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z}.$$

Exemplo3: Determine as derivadas parciais segundas de f se $f(x,y) = x^3y^2 - 2x^2y + 3x$

Sol: Vimos que

$$f_x(x,y) = 3x^2y^2 - 4xy + 3$$
$$f_y(x,y) = 2x^3y - 2x^2$$

daí,

$$f_{xx} = 6xy^2 - 4y$$
$$f_{xy} = 6x^2y - 4x$$
$$f_{yx} = 6x^2y - 4x$$
$$f_{yy} = 2x^3$$

Ex.: $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \ldots \\ 0, & (x,y) = (0, \ldots \end{cases}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$$

De maneira análoga definem-se as derivadas parciais terceiras, ou de ordem superior.
Por exemplo,

$$\frac{\partial}{\partial x} f_{xx} = f_{xxx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}.$$

$$\frac{\partial f_{xy}}{\partial x} = f_{xyx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}.$$

Derivadas parciais de terceira ordem contínuas então

$$f_{xyx} = f_{yxx} = f_{xxy}$$

Função polinomial:

$$p(x,y) = \sum_{m=0}^{s}\sum_{n=0}^{N} a_{nm}\, x^n y^m$$

Função racional:

$$r(x,y) = \frac{p(x,y)}{q(x,y)} \quad , \; p, q \text{ polinômios} .$$

Ex. 1: $\lim_{x \to x_0} x^m = x_0^m \; , \; \lim_{y \to y_0} y^n = y_0^n$.

Ex. 2: Assim: $\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} x^m y^n = x_0^m y_0^n$.

Ex. 3: Logo: $\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} p(x,y) = p(x_0,y_0)$.

Ex.: Ache o limite:

a) $\lim_{(x,y) \to (2,-3)} (x^3 - 4xy^2 + 5y - 7) = 2^3 - 4.2.(-3)^2 + 5.(-3) - 7 = 8 - 8.9 - 15 - 7$

$= -64 - 15 - 7 = -64 - 22 = -86$.

b) $\lim_{(x,y) \to (3,4)} \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{3^2 - 4^2}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{9-16}{\sqrt{25}} = -\frac{7}{5}$.

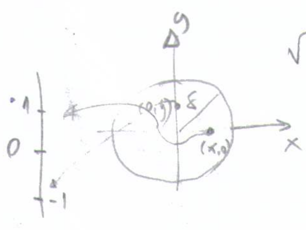
Ex.: $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2+y^2}$ não existe.

$f(x,0) = 1 \; , \; x \neq 0$. $\qquad \lim_{x \to 0} f(x,0) = 1$

$f(0,y) = -1 \; , \; y \neq 0$ $\qquad \lim_{y \to 0} f(0,y) = -1$

Qualquer círculo centrado na origem tem sempre valores de f iguais a 1 e valores de f iguais a -1.

$\lim f(x,y)$ não existe.



$\sqrt{|x.1|^2 + |0|^2} < \delta$ tal que

$|f(x,0) - 1| < \varepsilon$ mas:

$|f(0,y) - 1| = 2 > \varepsilon \; (0 < \varepsilon < 1)$

(7)

Teorema: Se dois caminhos diferentes para um ponto (a,b) resulta em dois limites diferentes, então $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ não existe.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

Escolhendo o caminho $(x,0)$ - eixo-x

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{x^2-0^2}{x^2+0^2} = 1.$$

Escolhendo o caminho $(0,y)$ - eixo-y

$$\lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{0^2-y^2}{0^2+y^2} = -1$$

Ex.: Mostre que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$

Ao longo da reta $y=mx$, $m\neq 0$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2(mx)}{x^4+m^2x^2} = \lim \frac{mx^3}{x^4+m^2x^2}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{mx}{x^2+m^2} = \frac{0}{0+m^2} = 0.$$

ao longo da parábola:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2(x^2)}{x^4+(x^2)^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}$$

Ponto interior

Aberto.

Ponto fronteira.

Ponto exterior

Um ponto (a,b) é ponto de fronteira de A se dada qualquer bola $B_\delta(a,b)$ então ela contém pontos de A e pontos fora de A.

Região aberta contém todos os pontos interiores.
Região Fechada contém todos os pontos fronteira.

Um ponto $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ é ponto interior de A se existe uma bola aberta B com centro em (a,b) inteiramente contida em A

$$B_\delta(a,b) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-a)^2+(y-b)^2 < \delta^2\}$$

$$\boxed{B_\delta(a,b) \subset A}$$

$A\subseteq\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ A é aberto se ~~contém~~ todos os seus pontos são interiores.

A é fechado se e somente se A^c é aberto

Ex.: $A=\{(x,y): x^2+y^2<1\}$ é aberto.
$A=\{(x,y): x^2+y^2\leq 1\}$ é fechado.

A é fechado (se $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, $x\in A$.)

seja $(x_n)\subset A$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ se $x\in A$ então A é fechado

Seja $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto f(x,y)$. Se (a,b) é um ponto interior de D

então podemos usar a definição de limite normalmente, mas

se (a,b) é ponto de fronteira de D, então utilizamos a defi-

nição de limite, acrescentando a restrição adicional que (x,y)

tanto deve pertencer a um círculo de raio δ quanto deve estar

em D.

Situação semelhante ocorre no espaço: (x_0, y_0, z_0) é ponto interior

de uma região $D \subseteq \mathbb{R}^3$ e existe uma bola $B_\delta(x_0,y_0,z_0) \subsetneq D$. (x_0,y_0,z_0)

é ponto fronteira se $B_\delta(x_0,y_0,z_0)$ contém pontos de D e pontos fora de D.

CONTINUIDADE

Definição: Uma função $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto f(x,y)$ é contínua em (a,b)

ponto interior de D se

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b).$$

Obs.: Para definir continuidade num ponto fronteira (a,b), devemos

acrescentar a restrição que (x,y) deve estar no domínio D de f.

A função f é contínua em D se for contínua em todo

ponto (x,y) em D.

Definição: $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b) \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$ tal que se $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \delta$

então $|f(x,y) - f(a,b)| < \varepsilon$.

Ex.: 1) O exemplo mais simples de função contínua é o polinômio:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} P(x,y) = P(a,b).$$

2) $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} e^{x+y} = e^{a+b}$$

3) $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{1}{x+y} = \frac{1}{a+b} \text{ se } a+b \neq 0.$$

(9)

Propriedades

Sejam f e g funções contínuas num ponto (a,b), isto é,

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b) \quad e \quad \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = g(a,b), \text{ então}$$

1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} \big(f(x,y)+g(x,y)\big) = f(a,b)+g(a,b).$

2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)\,g(x,y) = f(a,b)\cdot g(a,b).$

3) Se $g(a,b)\neq 0$ então $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{f(a,b)}{g(a,b)}.$

4) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} \alpha f(x,y) = \alpha f(a,b).$

Ex.: A função $f(x)=\sqrt{x}$ tem domínio no intervalo $[0,\infty)$. Ela é contínua para todo ponto $x\in(0,\infty)$ e a continuidade no ponto 0 é considerado pelo aproximamos de 0 pela direita.

Ex.: A função $f(x,y)=(x^2+y^2)e^{x\cdot y}$ é contínua, pois x e y são contínuas por serem polinômios de grau 1 e portanto $x\cdot y$ é contínua, analogamente x^2+y^2 é contínua por ser polinômio de grau 2. Logo, o produto $(x^2+y^2).e^{xy}$ é contínua em todo o $\mathbb{R}^2$.

Ex.: $f(x,y)=x/y$ é contínua nos pontos onde $y\neq 0$. Ou seja, no conjunto $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ y\neq 0\}$.

Ex.: $f(x,y)=\begin{cases} x^2+y^2, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ é contínua.

10

Ex.: $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ é contínua em todo o $\mathbb{R}^2$.

$$0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2|y|}{x^2+y^2} \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|\,|x^2+y^2|}{x^2+y^2} = 0.$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| = 0 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

Alguns resultados:

1) Se $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = L$ e $f(x,y) \leq h(x,y) \leq g(x,y)$

então $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} h(x,y) = L.$

$\left(\displaystyle\lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x^2} = 0\right.$

$-x^2 \leq x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x^2} \leq x^2$

$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$

$0 \qquad\qquad 0$

$\displaystyle\lim_{x\to 0}(x^2+1) = 1.$

$1 \leq x^2+1 \leq |x|+1$

$0 \leq \dfrac{|x|}{\sqrt{x^4+4x^2+7}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{7}}|x|$

$x^4+4x^2+7 \geq 7$

$\dfrac{1}{\sqrt{x^4+4x^2+7}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{7}}$

2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = 0 \iff \lim_{(x,y)\to(a,b)} |f(x,y)| = 0.$

3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = 0$ e $|g(x,y)| \leq M \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)\,g(x,y) = 0.$

Ex.: $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} y \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0.$

Ex.: $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 1, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ não é contínua na origem.

Ex.: $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ $\quad D_f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ (x,y)\neq(0,0)\}$.

f é contínua em D_f.

Se $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$, $D_f = \mathbb{R}^2$, f não é contínua na origem.

Mas: $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ f é contínua em $\mathbb{R}^2$

Ex.: Mostre que $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(1,2,-1)} \frac{(x+y+3z)^3}{(x-1)(y-2)(z+1)}$ não existe.

Ex.: $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(1,1,1)} x^3y + xyz + yz^3 = 1+1+1 = 3.$

Ex.: $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(1,1,1)} \frac{xy+z}{xyz} = \frac{3}{2}$

Sol.: Suponhamos que $P(x,y,z)$ tende para $(1,2,-1)$ ao longo da reta ℓ paralela ao vetor $v=(a,b,c)$, $a,b,c\in\mathbb{R}$.

ℓ: $x = 1+at$, $y = 2+bt$, $z=-1+ct$, $t\in\mathbb{R}$.

Assim:

$$\frac{(x+y+3z)^3}{(x-1)(y-2)(z+1)} = \frac{(1+at+2+bt+3(-1+ct))^3}{at\,bt\,ct} = \frac{(at+bt+3ct)^3}{(abc)t^3}$$

$$= \frac{(a+b+3c)t^3}{abct^3} = \frac{a+b+3c}{abc}$$

atribuindo valores diferentes a a,b,c obtemos limites diferentes. Logo, o limite não existe.

Uma função $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y,z)\longrightarrow f(x,y,z)$ é <u>contínua</u> num ponto (a,b,c) interior de D

se $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} f(x,y,z) = f(a,b,c)$.

Ex.: $P(x,y,z) = \sum_n \sum_m \sum_p a_{nmp}\, x^n y^m z^p$ é contínua em $\mathbb{R}^3$.

Ex.: $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x-y}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ é descontínua em $\mathbb{R}^2$.

$y\to x$

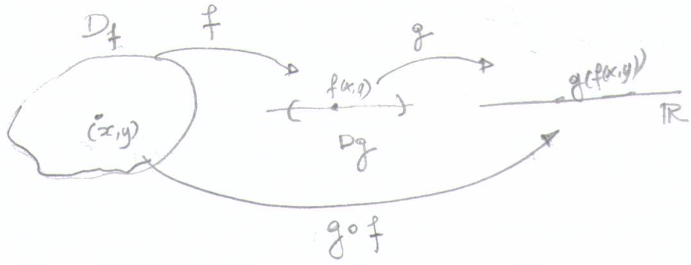
$\dfrac{x^2-y^2}{x-y} = \dfrac{x-y}{x-y}(x+y) = 2x$

Ex.: $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x+y}, & (x,y)\neq(x,x) \\ 2x, & (x,y)=(x,x) \end{cases}$ é contínua em todo $\mathbb{R}^2$.

COMPOSIÇÃO DE FUNÇÕES

Sejam f uma função de duas variáveis x e y e g uma função de uma variável t. Pode-se obter uma função h de duas variáveis definida por $h(x,y) = g(f(x,y))$, desde que a imagem de f esteja no domínio de g.

$$f : D_f \to \mathbb{R} \quad , \quad g : D_g \to \mathbb{R}$$



Exemplo 1: Expresse $g(f(x,y))$ em termos de x e y e ache o domínio da função resultante.

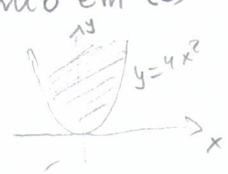
(a) $f(x,y) = x e^y$, $g(t) = 3t^2 + t + 1$.

(b) $f(x,y) = y - 4x^2$, $g(t) = \operatorname{sen} \sqrt{t}$.

Solução: (a) $g(f(x,y)) = g(x e^y) = 3x^2 e^{2y} + x e^y + 1$

(b) $g(f(x,y)) = g(y - 4x^2) = \operatorname{sen}\sqrt{y - 4x^2}$

O domínio em (a) é o $\mathbb{R}^2$ e o domínio em (b) é o conjunto Y definido por: $Y = \{(x,y) : y \geq 4x^2\}$.



Teorema: Se uma função f de duas variáveis é contínua em (a,b) e uma função g de uma variável é contínua em $f(a,b)$ então a função h definida por $h(x,y) = g(f(x,y))$ é contínua em (a,b).

Prova: Como f é contínua dado $\varepsilon_1 > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $\|(x,y)-(a,b)\| < \delta$ então $|f(x,y) - f(a,b)| < \varepsilon_1$. E dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ \delta_1 > 0$ tal que se $|t - f(a,b)| < \delta_1$ então $|g(t) - g(f(a,b))| < \varepsilon$.

Para $\varepsilon_1 = \delta_1$ existe $\delta > 0$ tal que se $\|(x,y)-(a,b)\| < \delta$ então $|f(x,y) - f(a,b)| < \varepsilon_1 = \delta_1$. Segue que:

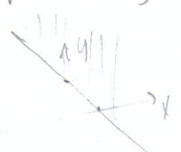
$$|h(x,y) - h(a,b)| = |g(f(x,y)) - g(f(a,b))| < \varepsilon.$$

Logo, h é contínua em (a,b).

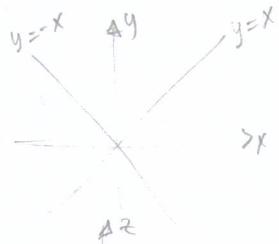
Exemplo: Se $h(x,y) = e^{x^2+5xy+y^3}$ então h é contínua em $\mathbb{R}^2$.

Solução: $f(x,y) = x^2 + 5xy + y^3$ é um polinômio contínuo em $\mathbb{R}^2$.
$g(t) = e^t$ é a função exponencial contínua em $\mathbb{R}^2$.
Segue que: $h(x,y) = g(f(x,y)) = e^{x^2+5xy+y^3}$ é contínua em $\mathbb{R}^2$.

Exercício: Descreva o conjunto dos pontos do plano-xy, do espaço-xyz em que f é contínua.

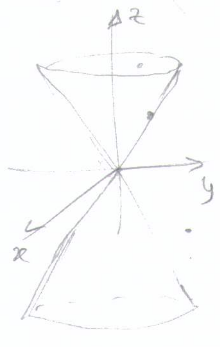


a) $f(x,y) = \ln(x+y-1)$. $D_{cont} = \{(x,y) : x+y-1 > 0\}$
$x+y > 1 \quad y > 1-x$



b) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2-y^2}$, $y^2 - x^2 \neq 0 \Rightarrow (y-x)(y+x) \neq 0$
$D_{cont} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq x \text{ ou } y \neq -x\}$

c) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{x^2+y^2-z^2}$ $D_{cont} = \{(x,y,z) : z^2 \neq x^2+y^2\}$
$z = \pm\sqrt{x^2+y^2}$



$w = f(u,v)$, $u = g(x,y)$, $v = h(x,y)$
$(u,v) \in D_f$

$w = f(g(x,y), h(x,y))$

$w = u^2 + u\,\text{sen}\, v$, $u = xe^{2y}$, $v = xy$.

$w = x^2e^{4y} + xe^{2y}\text{sen}(xy)$.

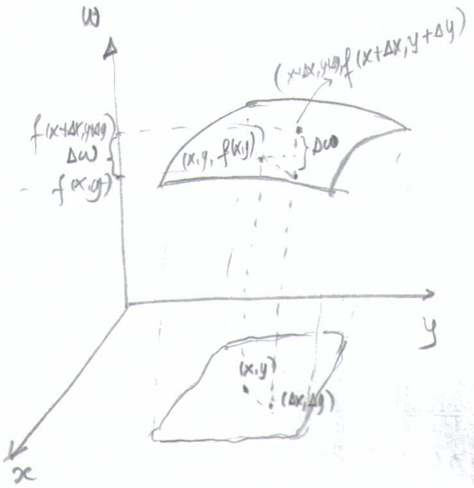
INCREMENTOS E DIFERENCIAIS

(1)

$f: D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, Δx e Δy denotam incrementos de x e y.

Definição: Seja $w = f(x,y)$ e, sejam Δx e Δy incrementos de x e y, resp. O incremento Δw de $w = f(x,y)$ é

$$\Delta w = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y).$$



Ex. 1: Seja $w = f(x,y) = 3x^2 - xy$.

(a) Se Δx e Δy são incrementos de x e y determine Δw.

(b) Use Δw para calcular a variação de $f(x,y)$ qdo (x,y) varia de $(1;2)$ a $(1{,}01; 1{,}98)$.

Sol.:

(a)
$$\Delta w = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

$$\begin{aligned}\Delta w &= [3(x+\Delta x)^2 - (x+\Delta x)(y+\Delta y)] - (3x^2 - xy) \\ &= 3x^2 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 - xy - x\Delta y - y\Delta x - \Delta x \Delta y - 3x^2 + xy \\ &= (6x - y)\Delta x - x\Delta y + 3(\Delta x)^2 - \Delta x \Delta y\end{aligned}$$

(b) Se (x,y) varia de $(1;2)$ a $(1{,}01; 1{,}98)$ então fazendo $x=1$ e $y=2$, $\Delta x = 0{,}01$ e $\Delta y = -0{,}02$. Assim:

$$\Delta w = (6 \cdot 1 - 2)(0{,}01) - 1\cdot(-0{,}02) + 3(0{,}01)^2 - (0{,}01)(-0{,}02) = 0{,}0605.$$

Teorema (1): Seja $w = f(x,y)$ definida em $R = \{(x,y): a < x < b,\ c < y < d\}$. Suponhamos que f_x e f_y existam em R e sejam contínuas em $(x_0,y_0) \in R$ então se $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \in R$ e $\Delta w = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$ então

$$\Delta w = f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_i = 0.$$

②

Ex.2: Se $w = 3x^2 - xy$.

Definição: Seja $w = f(x,y)$ e sejam Δx e Δy incrementos de x e y, resp.

(i) As diferenciais dx e dy das variáveis independentes x e y são

$$dx = \Delta x \quad e \quad dy = \Delta y$$

(ii) A diferencial da variável dependente "w" é

$$dw = f_x(x,y)\,dx + f_y(x,y)\,dy = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy.$$

Ex.3: Se $w = 3x^2 - xy$ calcule dw.

Sol.:

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy$$

$$= (6x - y)dx + (-x)dy.$$

Se $dx = 0{,}01$, $dy = \Delta y = -0{,}02$ no pto $x=1$ e $y=2$, tem:

$$dw = (6-2)(0{,}01) + (-1)(-0{,}02) = 0{,}04 + 0{,}02 = 0{,}06.$$

Definição: Seja $w = f(x,y)$. A função f é diferenciável em (x_0,y_0) se Δw puder ser colocada na forma:

$$\Delta w = f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

onde ε_1 e ε_2 são funções de Δx e Δy e $\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_i = 0$.

Diz-se que uma função f de duas variáveis é diferenciável numa região R se é diferenciável em todo ponto de R.

Teorema (*) Se $w = f(x,y)$ e se f_x e f_y são contínuas numa região retangular R, então f é diferenciável em R. Prova: Conseq. Teorema (*).

Teorema: Se uma função f de duas variáveis é diferenciável em (x_0,y_0) então f é contínua em (x_0,y_0).

(3)

Prova: $\Delta w = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$

$\Delta w = (f_x(x_0,y_0) + \varepsilon_1)\Delta x + (f_y(x_0,y_0) + \varepsilon_2)\Delta y$

Fazendo $x = x_0+\Delta x$, $y = y_0+\Delta y$ então

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = [f_x(x_0,y_0)+\varepsilon_1)(x-x_0) + (f_y(x_0,y_0)+\varepsilon_2)(y-y_0)$$

segue que
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) - f(x_0,y_0) = 0.$$

f é contínua.

Corolário: Se f é uma função de duas variáveis e se f_x e f_y são contínuas numa região retangular R então f é contínua em R. Prova: Conseq. Teo. (*).

Ex.: Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

(a) $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ existem;

(b) f não é contínua em $(0,0)$;

(c) f não é dif. em $(0,0)$.

f três variáveis

$\Delta w = f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x,y,z)$.

$\Delta w = f_x(x,y,z)\Delta x + f_y(x,y,z)\Delta y + f_z(x,y,z)\Delta z + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y + \varepsilon_3\Delta z$

$\lim_{(\Delta x,\Delta y,\Delta z)\to(0,0,0)} \varepsilon_i = 0$.

Diferenciais: $w = f(x,y,z)$

$dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$, $dz = \Delta z$

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz.$$

Ex.: Sup. as dimensões de uma caixa retang. variam de 9, 6, 4 a 9,02, 5,97 e 4,01

(a) Obtenha uma aprox. da variação do volume

(b) Ache a variação exata do volume.

$V = xyz$

(a) $\Delta V \approx dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz = yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$

$dV = 0,48 - 1,08 + 0,54 = -0,06$ (b) $\Delta V = (9,02)(5,97)(4,01) - 9.6.4 = -0,063906$.

(4)

REGRAS DA CADEIA

Se f e g são funções de uma variável tais que

$$w = f(u) \quad e \quad u = g(x)$$

então a composta

$$w = f(g(x))$$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{dw}{du}\frac{du}{dx}$$

Sejam f, g e h funções de duas variáveis tais que

$$w = f(u,v), \quad u = g(x,y), \quad v = h(x,y)$$

se $(u,v) \in D_f$ então:

$$w = f(g(x,y), h(x,y))$$

Ex.: $w = u^2 + u\,\text{sen}\,v$, $u = xe^{2y}$, $v = xy$

$$w = x^2e^{4y} + xe^{2y}\,\text{sen}\,xy.$$

Regras da cadeia: Se $w = f(u,v)$, $u = g(x,y)$ e $v = h(x,y)$ e se f, g e h são diferenciáveis então

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Dem.: Incrementando x e mantendo y constante:

$$\Delta u = g(x+\Delta x, y) - g(x,y)$$

$$\Delta v = h(x+\Delta x, y) - h(x,y)$$

$$\Delta w = f(u+\Delta u, v+\Delta v) - f(u,v)$$

$$\Delta w = \frac{\partial w}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial w}{\partial v}\Delta v + \varepsilon_1 \Delta u + \varepsilon_2 \Delta v \; ; \quad \lim_{(\Delta u, \Delta v)\to(0,0)} \varepsilon_i = 0.$$

$$\frac{\Delta w}{\Delta x} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\Delta v}{\Delta x} + \varepsilon_1\frac{\Delta u}{\Delta x} + \varepsilon_2\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta x}, \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\Delta u \xrightarrow{\Delta x\to 0} 0, \quad \Delta v \xrightarrow{\Delta x\to 0} 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

⑤

Ex.: Ache $\frac{\partial w}{\partial p}$ e $\frac{\partial w}{\partial q}$ se

$$w = r^3 + s^2, \quad r = pq^2, \quad s = p^2 \operatorname{sen} q.$$

$$\frac{\partial w}{\partial p} = \frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial p} + \frac{\partial w}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial p} = 3r^2 q^2 + 2s\, 2p \operatorname{sen} q$$

$$= 3p^2q^4 + 4p^3 \operatorname{sen}^2 q$$

$$\frac{\partial w}{\partial q} = \frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial q} + \frac{\partial w}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial q} = 3r^2\, 2pq + 2s\, p^2 \cos q$$

$$= 3(pq^2)^2 2pq + 2(p^2 \operatorname{sen} q) p^2 \cos q$$

$$= 6p^3q^5 + 2p^4 \operatorname{sen} q \cos q$$

Ex. 2: Use uma regra da cadeia para achar $\frac{\partial w}{\partial z}$ se

$$w = r^2 + sv + t^3, \text{ com } r = x^2+y^2+z^2, \; s = xyz, \; v = xe^y, \; t = yz^2$$

Sol.:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial z}$$

$$= 2r(2z) + v\,xy + s.0 + 3t^2\, 2yz$$

$$= 4z(x^2+y^2+z^2) + xyxe^y + 6y^2z^4\, yz$$

Se w é função de diversas variáveis e cada uma das quais é função apenas de uma variável t, então w é função dessa variável única t.

Ex. 3: Use uma regra da cadeia para calcular $\frac{dw}{dt}$.

$$w = x^2 + yz, \quad x = 3t^2+1, \quad y = 2t-4, \quad z = t^3$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 2x(6t) + z(2) + y\,3t^2$$

$$= 2(3t^2+1)6t + 2t^3 + 3(2t-4)t^2$$

⑥

As derivadas parciais podem ser usadas para achar derivadas de funções definidas implicitamente. Suponhamos que uma eq. $F(x,y)=0$ (ou c) defina implicitamente uma função f diferenciável tal que $y=f(x)$, isto é, $F(x,f(x))=0$ para todo $x \in D$, D domínio de f. Introduzimos a seguinte f.ção composta

$$w = F(u,y) \text{ em que } u = x,\ y = f(x).$$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

Como $w = F(x,f(x)) = 0$ segue-se que $\frac{dw}{dx} = 0$. Além disso, $\frac{du}{dx} = 1$, $\frac{dy}{dx} = f'(x)$

segue que

$$0 = \frac{\partial w}{\partial u}(1) + \frac{\partial w}{\partial y} f'(x)$$

se $\frac{\partial w}{\partial y} \neq 0$, então

$$f'(x) = \frac{-\frac{\partial w}{\partial u}}{\frac{\partial w}{\partial y}} = \frac{-\frac{\partial w}{\partial x}}{\frac{\partial w}{\partial y}} = \frac{-F_x(x,y)}{F_y(x,y)}.$$

Teorema: Se uma função $F(x,y)=0$ (ou c) define, implicitamente, uma função diferenciável f de uma variável x tal que $y = f(x)$, então

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}. \qquad \text{(Teo. F. ção Implícita)}$$

Ex.: Ache $\frac{dy}{dx}$ se $y=f(x)$ é definida implicitamente por

$$y^4 + 3y - 4x^3 - 5x - 1 = 0.$$

Sol.: Se $F(x,y) = y^4 + 3y - 4x^3 - 5x - 1$ então $F_x = -12x^2 - 5$ e $F_y = 4y^3 + 3$

Logo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{12x^2+5}{4y^3+3}$$

(7)

Dada a equação

$$x^2 - 4y^3 + 2z - 7 = 0$$

podemos resolvê-la em relação a z, obtendo

$$z = \frac{1}{2}(-x^2 + 4y^3 + 7).$$

que é da forma

$$z = f(x,y).$$

Teorema: Se uma eq. $F(x,y,z) = 0$ define implicitamente uma função diferenciável f de duas variáveis x e y tais que $z = f(x,y)$ para todo $(x,y) \in D_f$ então

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}.$$

Dem.: A afirm. $F(x,y,z)=0$ def. $z = f(x,y)$ tal que $F(x,y,f(x,y)) = 0$

Consideremos

$$w = F(u,v,z), \quad u = x, \quad v = y, \quad z = f(x,y).$$

Então

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \text{ (já que } w = F(x,y,f(x,y)) = 0)$$

$$0 = \frac{\partial w}{\partial x}(1) + \frac{\partial w}{\partial y}(0) + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}$$

e se $\frac{\partial w}{\partial z} \neq 0$ então

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial w}{\partial x} \Big/ \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{F_x}{F_z}.$$

Exemplo: Ache $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ se $z = f(x,y)$ é def. implic. por

$$x^2 z^2 + xy^2 - z^3 + 4yz - 5 = 0.$$

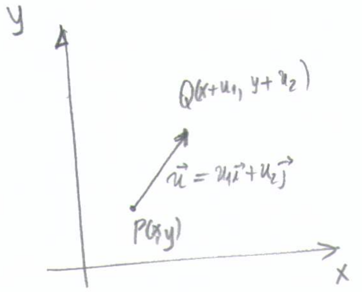
(8)

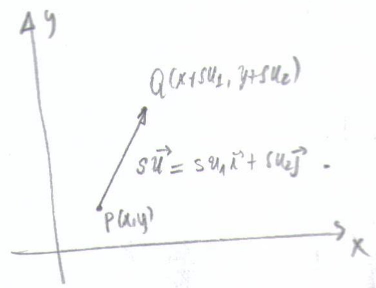
sol.:

$$F(x,y,z) = x^2z^2 + xy^2 - z^3 + 4yz - 5$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2xz^2 + y^2}{2x^2z - 3z^2 + 4y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2xy + 4z}{2x^2z - 3z^2 + 4y}$$

DERIVADAS DIRECIONAIS





$$\vec{PQ} = s\vec{u} \quad \text{e} \quad \|\vec{PQ}\| = \|s\vec{u}\| = |s|\|\vec{u}\| = |s|$$

Se a posição de um ponto P varia de P para Q, então o incremento Δw de $w = f(x,y)$ é

$$\Delta w = f(x+su_1, y+su_2) - f(x,y)$$

A taxa média de variação de $f(x,y)$ é

$$\frac{\Delta w}{s} = \frac{f(x+su_1, y+su_2) - f(x,y)}{s}.$$

Definição: Sejam $w = f(x,y)$ e $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j}$ um vetor unitário. A derivada direcional de f em $P(x,y)$ na direção de $\vec{u}$, denotada por $D_u f(x,y)$, é

$$D_u f(x,y) = \lim_{s \to 0} \frac{f(x+su_1, y+su_2) - f(x,y)}{s}$$

Se a é um vetor arbitrário de mesma direção de $\vec{u}$, chamamos de $D_u f$ a derivada direcional de f na direção de $\vec{a}$.

Teorema: Se f é uma função diferenciável de duas variáveis e $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j}$ é um vetor unitário, então

$$D_u f(x,y) = f_x(x,y)u_1 + f_y(x,y)u_2.$$

DIFERENCIAL

Suponhamos $w = f(x,y,z)$ definida numa região R do espaço tridimensional e suponha que existam f_x, f_y e f_z em R e que sejam contínuas em (x,y,z).

Se dermos a x, y, z incrementos $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, resp., então o incremento de w correspondente é

$$\Delta w = f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x,y,z).$$

$R(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = R_1 \Delta x + R_2 \Delta y$

Podemos escrever este incremento na forma

$$\Delta w = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\Delta z + R(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$$

onde $\displaystyle\lim_{(\Delta x,\Delta y,\Delta z)\to(0,0,0)} \frac{R(\Delta x,\Delta y,\Delta z)}{|(\Delta x,\Delta y,\Delta z)|} = 0.$

<u>Definição</u>: Seja $w = f(x,y,z)$ e sejam $\Delta x, \Delta y$ e Δz incrementos de x, y e z, resp.

(i) As <u>diferenciais</u> dx, dy, dz de x, y, z, são

$$dx = \Delta x, \quad dy = \Delta y, \quad dz = \Delta z$$

(ii) A <u>diferencial</u> dw da variável dependente w é

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz.$$

Pode-se usar dw como aproximação de Δw se os incrementos de x, y e z são pequenos.

<u>Ex.</u>: Seja $w = f(x,y) = 3x^2 - xy$

(a) se Δx e Δy são incrementos de x e y determine Δw.

(b) Use Δw para calcular a variação de $f(x,y)$ qdo (x,y) varia de $(1,2)$ a $(1{,}01; 1{,}98)$

Sol.: (a) $\Delta w = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$

$$= 3(x+\Delta x)^2 - (x+\Delta x)(y+\Delta y) - 3x^2 + xy$$

$$= 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 - x\Delta y - y\Delta x - \Delta x\Delta y$$

(b) se (x,y) varia de $(1,2)$ a $(1{,}01; 1{,}98)$ tem que $x=1, y=2, \Delta x = 0{,}01, \Delta y = -0{,}02.$

$$\Delta w = 6.1(0{,}01) + 3(0{,}01)^2 - (1)(-(0{,}02)) - 2(0{,}01) - (0{,}01)(-0{,}02) \cong 0{,}0605$$

Ex. 2: No exemplo anterior se $w = 3x^2 - xy$, calcule dw e aplique-o para aproximar a variação de w se (x,y) variar de $(1,2)$ para $(1{,}01; 1{,}98)$.

Sol.: $dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy = (6x - y)dx + (-x)dy$

Fazendo $x = 1$, $y = 2$, $dx = \Delta x = 0{,}01$, $dy = \Delta y = -0{,}02$, obtemos

$$dw = (6-2)(0{,}01) + (-1)(-0{,}02) = 0{,}06$$

No exemplo 1, $\Delta w = 0{,}0605$. Logo, o erro por utilizar dw é $0{,}0005$.

REGRA DA CADEIA

Se f e g são funções de uma variável tais que

$$w = f(u) \text{ e } u = g(x)$$

então a função composta de f e g é dada por

$$w = f(g(x))$$

Pela regra da cadeia

$$\frac{dw}{dx} = \frac{dw}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{df}{du}\frac{dg}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}.$$

Sejam f, g e h funções de duas variáveis tais que

$$w = f(u,v), \text{ com } u = g(x,y) \text{ e } v = h(x,y)$$

Se, para cada par $(x,y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$ o par correspondente (u,v) estiver no domínio de f, então

$$w = f(g(x,y), h(x,y))$$

é uma função (composta) de x e y com domínio D. Por exemplo, se

$$w = u^2 + u \operatorname{sen} v, \text{ com } u = xe^{2y}, v = xy \text{ então}$$

$$w = x^2 e^{4y} + xe^{2y} \operatorname{sen}(xy).$$

Regras da Cadeia: se $w = f(u,v)$, com $u = g(x,y)$ e $v = h(x,y)$ e se $f, g, e\ h$ são diferenciáveis então

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

Dem.: $\Delta u = g(x+\Delta x, y) - g(x,y)$
(1) $\Delta v = h(x+\Delta x, y) - h(x,y)$

Daí:
$$\Delta w = f(u+\Delta u, v+\Delta v) - f(u,v)$$

Como f é diferenciável, temos

(2) $$\Delta w = \frac{\partial w}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial w}{\partial v}\Delta v + R_1 \Delta u + R_2 \Delta v \qquad \lim_{(\Delta u,\Delta v)\to(0,0)} R_1 = 0, \ \lim_{(\Delta u,\Delta v)\to(0,0)} R_2 = 0$$

Dividindo por Δx, temos:
$$\frac{\Delta w}{\Delta x} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\Delta v}{\Delta x} + R_1 \frac{\Delta u}{\Delta x} + R_2 \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

Temos que
$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta w}{\Delta x} = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Se $\Delta x \to 0$ vem que Δu, $\Delta v \to 0$, logo: $R_1 \to 0$ e $R_2 \to 0$, assim:
$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

Exemplo 1: Por meio da regra da cadeia, ache $\frac{\partial w}{\partial p}$ e $\frac{\partial w}{\partial q}$ se
$$w = r^3 + s^2, \quad r = pq^2 \ e \ s = p^2 \operatorname{sen} q.$$

Sol.: Note que w é uma função composta de p e q. Substituindo esses valores em w, obtemos
$$w = p^3q^6 + p^4 \operatorname{sen}^2 q.$$

Pela regra da cadeia:
$$\frac{\partial w}{\partial p} = \frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial p} + \frac{\partial w}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial p} = 3r^2q^2 + 2s(2p\operatorname{sen} q)$$
$$= 3(pq^2)^2q^2 + 2p^2\operatorname{sen} q(2p\operatorname{sen} q)$$
$$= 3p^2q^6 + 4p^3\operatorname{sen}^2 q$$

Para achar $\frac{\partial w}{\partial q}$: $$\frac{\partial w}{\partial q} = \frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial q} + \frac{\partial w}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial q} = (3r^2)(2pq) + 2s(p^2\cos q)$$
$$= 6p^3q^5 + 2p^4 \operatorname{sen} q \cos q.$$

Se w é função de u, v, r e u, v e r são funções de x, y, z.
Se quisermos $\frac{\partial w}{\partial y}$, temos:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}.$$

<u>Exemplo:</u> Use a regra da cadeia para achar $\frac{\partial w}{\partial z}$ se

$$w = r^2 + sv + t^3, \text{ com } r = x^2+y^2+z^2,\ s = xyz,\ v = xe^y,\ t = yz^2$$

Sol.:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial z}$$

$$= (2r)(2z) + v(xy) + s.0 + 3t^2(2yz)$$

$$= 4z(x^2+y^2+z^2) + x e^y(xy) + 0 + 3(yz^2)^2(2yz)$$

$$= 4z(x^2+y^2+z^2) + x^2 y e^y + 6y^3 z^5.$$

<u>Ex.1</u> Use regra da cadeia para calcular $\frac{dw}{dt}$, se

$$w = x^2 + yz,\quad x = 3t^2+1,\ y = 2t-4,\ z = t^3.$$

Sol.: $$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$= 2x(6t) + z(2) + y(3t^2)$$

$$= 2(3t^2+1)6t + 2t^3 + (2t-4)(3t^2)$$

$$= 44t^3 - 12t^2 + 12t.$$

<u>Ex.:</u> Um circuito elétrico simples consiste em um resistor R e uma força eletromotriz V. Em certo instante, V é 80 volts e aumenta à taxa de 5 volts/min, enquanto R é 40 ohms e decresce à razão de 2 ohms/min. Use a lei de Ohm, $I = V/R$, e uma regra da Cadeia, para achar a taxa à qual a corrente I (em ampères) varia.

<u>Sol.:</u> Como I é função de V e R e ambos V e R são funções do tempo t (em minutos). Aplicando a regra da cadeia,

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial V}\frac{dV}{dt} + \frac{\partial I}{\partial R}\frac{dR}{dt} = \left(\frac{1}{R}\right)\frac{dV}{dt} + \left(-\frac{V}{R^2}\right)\frac{dR}{dt}$$

Subst.

$V=80,\ \frac{dV}{dt}=5,\ R=40$ e $\frac{dR}{dt}=-2$

$$\frac{dI}{dt}=\left(\frac{1}{40}\right)5-\frac{80}{1600}(-2)=\frac{9}{40}=0,225 \text{ amp/min}.$$

As derivadas parciais podem ser usadas para achar derivadas de funções definidas implicitamente. Suponhamos que $F(x,y)=0$ defina uma função diferenciável f tal que $y=f(x)$; isto é, $F(x,f(x))=0$, $\forall x \in D_f$. Introduzimos

$$w=F(u,y),\quad u=x \text{ e } y=f(x)$$

Com uma regra da cadeia:

$$\frac{dw}{dx}=\frac{\partial w}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

Como $w=F(x,f(x))=0$, $\forall x$, segue-se que $\frac{dw}{dx}=0$. Além disso, como $u=x$ e $y=f(x)$

$$\frac{du}{dx}=1,\quad \frac{dy}{dx}=f'(x)$$

assim:

$$0=\frac{\partial w}{\partial u}\cdot 1+\frac{\partial w}{\partial y}f'(x)$$

se $\frac{\partial w}{\partial y}\neq 0$ então

$$f'(x)=-\frac{\frac{\partial w}{\partial u}}{\frac{\partial w}{\partial y}}=-\frac{\partial w/\partial x}{\partial w/\partial y}=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}.$$

Teo: Se $F(x,y)=0$ define f implicitamente como função de x, $y=f(x)$.
da Função Implícita:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}.$$

Ex.: Ache $\frac{dy}{dx}$ se y é função implícita de x em

$$y^4+3y-4x^3-5x-1=0$$

Sol.:
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{-12x^2-5}{4y^3+3}=\frac{12x^2+5}{4y^3+3}.$$

Teo: Se uma equação $F(x,y,z)=0$ define uma função implícita diferenciável f de duas variáveis x e y tal que $z=f(x,y)$, para todo (x,y) no domínio de f, então

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)} .$$

Prova: $F(x,y,z)=0 \Rightarrow F(x,y,f(x,y))=0$, $(z=f(x,y))$

$w = F(u,v,z)$, $u=x$, $v=y$, $z=f(x,y)$. $u=x+0\cdot y$, $v=y+0x$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}$$

Como $w = F(x,y,f(x,y))=0$ então $\frac{\partial w}{\partial x}=0$ e assim

$$0 = \frac{\partial w}{\partial x}\cdot(1) + \frac{\partial w}{\partial y}\cdot 0 + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}$$

e se $\frac{\partial w}{\partial z} \neq 0 \Rightarrow$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial w}{\partial x}}{\frac{\partial w}{\partial z}} = -\frac{F_x}{F_y}.$$

Ex.: Ache $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ se $z=f(x,y)$ é def. implicitamente por

$$x^2z^2 + xy^2 - z^3 + 4yz - 5 = 0$$

sol.: Teo:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2xz^2+y^2}{2x^2z-3z^2+4y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2xy+4z}{2x^2z-3z^2+4y}.$$

Subst.

$V = 80,\ \frac{dV}{dt} = 5,\ R = 40$ e $\frac{dR}{dt} = -2$

$$\frac{dI}{dt} = \left(\frac{1}{40}\right) 5 - \frac{80}{1600}(-2) = \frac{9}{40} = 0{,}225 \text{ amp/min}.$$

As derivadas parciais podem ser usadas para achar derivadas de funções definidas implicitamente. Suponhamos que $F(x,y)=0$ defina uma função diferenciável f tal que $y=f(x)$; isto é, $F(x,f(x))=0$, $\forall\, x \in D_f$. Introduzimos

$$w = F(u,y),\quad u = x \text{ e } y = f(x)$$

Com uma regra da cadeia:

$$\frac{dw}{dx} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

Como $w = F(x,f(x)) = 0,\ \forall\, x$, segue-se que $\frac{dw}{dx} = 0$. Além disso, como $u=x$ e $y=f(x)$

$$\frac{du}{dx} = 1,\quad \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

assim:

$$0 = \frac{\partial w}{\partial u}\cdot 1 + \frac{\partial w}{\partial y} f'(x)$$

se $\frac{\partial w}{\partial y} \neq 0$ então

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial w}{\partial u}}{\frac{\partial w}{\partial y}} = -\frac{\partial w/\partial x}{\partial w/\partial y} = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}.$$

<u>Teo:</u> Se $F(x,y)=0$ define f implicitamente como função de x, $y=f(x)$.

da Função Implícita:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}.$$

<u>Ex.</u>: Ache $\frac{dy}{dx}$ se y é função implícita de x em

$$y^4 + 3y - 4x^3 - 5x - 1 = 0$$

Sol.: $$\frac{dy}{dx} = -\frac{-12x^2-5}{4y^3+3} = \frac{12x^2+5}{4y^3+3}.$$

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2+y^2-1}}, & x^2+y^2<1 \\ 0, & x^2+y^2 \geq 1 \end{cases}$$

Seja $h(x,y) = x^2+y^2-1$ e $g(t) = \begin{cases} e^{\frac{1}{t}}, & t<0 \\ 0, & t \geq 0 \end{cases}$

$$g'(t) = \begin{cases} -\dfrac{e^{1/t}}{t^2}, & t<0 \\ 0, & t>0 \end{cases} \qquad z = e^{1/t} \Rightarrow \ln z = \frac{1}{t}$$

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{e^{1/t}}{t^2} = \lim_{z\to 0} z \ln^2 z = \lim_{z \to 0} \frac{\ln^2 z}{\frac{1}{z}} \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{z\to 0} \frac{2\ln z\left(\frac{1}{z}\right)}{-\frac{1}{z^2}}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{2\ln z}{-1/z} \overset{\text{L'Hosp.}}{=} \lim_{z\to 0} \frac{2\left(1/z\right)}{+1/z^2} = \lim_{z\to 0} 2z = 0.$$

$g'(0)=0 \Rightarrow g$ é diferenciável. Logo, f é diferenciável.

Exercícios

Ex. 1: Mostre que a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

admite derivadas parciais em $(0,0)$, mas não é contínua neste ponto.

Sol.: $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 0$$

f não é contínua em $(0,0)$. Se compomos f com a reta $\gamma(t)=(t,t)$, obtemos:

$$g(t) = f(t,t) = \begin{cases} 1/2, & t\neq 0 \\ 0, & t=0 \end{cases}$$

Como $\gamma(t)$ é contínua em $t=0$ e $g(t)$ é descontínua em $t=0$ então $f(x,y)$ é descontínua em $(0,0)$.

Exercício: Seja $f: A\subset\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, A aberto, e suponha que f admite derivadas parciais em A. Seja $(x_0,y_0)\in A$, prove que se $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ forem contínuas em (x_0,y_0) então f também será.

Sol.: Seja $f(x,y)-f(x_0,y_0) = f(x,y)-f(x_0,y)+f(x_0,y)-f(x_0,y_0)$, pelo T.V.M. para y fixo, existe $x_0<\xi<x$ ou $x<\xi<x_0$ e $y_0<\tau<y$ ou $y<\tau<y_0$ tal que:

$$f(x,y)-f(x_0,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi,y)(x-x_0), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\tau)(y-y_0) = f(x_0,y)-f(x_0,y_0)$$

agora: $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,y)-f(x_0,y_0)] = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\partial f}{\partial x}(\xi,y)(x-x_0) + \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\partial f}{\partial y}(y-y_0)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot 0 = 0$$

Derivadas Parciais de funções de três variáveis:

$$w = f(x, y, z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{K \to 0} \frac{f(x_0, y_0+K, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{K}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{p \to 0} \frac{f(x_0, y_0, z_0+p) - f(x_0, y_0, z_0)}{p}$$

Ex.: Calcule as derivadas parciais de $s = f(x, y, z)$ onde

$$s = e^{xyz}$$

Sol.:

$$\frac{\partial s}{\partial x} = e^{(xyz)} \frac{\partial}{\partial x}(xyz) = yz\, e^{xyz}$$

$$\frac{\partial s}{\partial y} = xz\, e^{xyz}$$

$$\frac{\partial s}{\partial z} = xy\, e^{xyz}$$

FUNÇÕES DIFERENCIÁVEIS

Definição: Seja $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aberto, e $(x_0, y_0) \in A$. Dizemos que f é diferenciável em (x_0, y_0) se, e somente se, existirem reais a e b tais que

$$\lim_{(h,K) \to (0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+K) - f(x_0, y_0) - ah - bK}{\|(h,K)\|} = 0.$$

Teorema: Se f for diferenciável em (x_0, y_0) então f é contínua em (x_0, y_0).

Dem.: Sendo $f(x,y)$ diferenciável em (x_0, y_0), existem reais a e b tais que

$$\lim_{(h,K) \to (0,0)} \frac{R(h,K)}{\|(h,K)\|} = 0$$

onde $R(h,K) = f(x_0+h, y_0+K) - f(x_0, y_0) - ah - bK$. Como $\lim_{(h,K) \to (0,0)} ah + bK = 0$ e

$$\lim_{(h,K) \to (0,0)} R(h,K) = \lim_{(h,K) \to (0,0)} \|(h,K)\| \cdot \frac{R(h,K)}{\|(h,K)\|} = 0$$ resulta que $\lim_{(h,K) \to (0,0)} f(x_0+h, y_0+K) = f(x_0, y_0)$.

Teorema: Seja $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aberto, e seja $(x_0, y_0) \in A$. Se for diferenciável em (x_0, y_0), então f admitirá derivadas parciais neste ponto.

Dem.: f dif em (x_0,y_0), $\exists\, a$ e b tq

(1) $$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{R(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0$$

onde $R(h,k) = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - ah - bk$. Segue que de (1) que

$$\lim_{h\to 0} \frac{R(h,0)}{\|(h,0)\|} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0,y_0) - ah}{|h|} = 0$$

Daí:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0,y_0) - ah}{h} = 0$$

e portanto,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0,y_0)}{h} = a$$

Analogamente,

$$b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).$$

Observações: 1. $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{R(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0$

2. Se uma das derivadas parciais em (x_0,y_0) não existir $\Rightarrow$ f não é dif.

3. Se $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ existem mas (1) não é satisf $\Rightarrow$ f não é dif.

4. Se f não é contínua $\Rightarrow$ f não é dif.

Ex.: Prove que $x^2 y$ é dif.

Ex.: Mostre que a função $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

é uma função diferenciável.

Sol.: $$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} \dfrac{2x^5+4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} \dfrac{-2x^4y}{(x^2+y^2)^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Vamos mostrar que $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em $\mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em todo $(x,y) \neq (0,0)$.

Em $(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^5+4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0.$$

f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

Plano Tangente e reta Normal

f diferenciável.

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x} h - \frac{\partial f}{\partial y} k}{\|(h,k)\|} = 0$$

Fazendo $x = x_0+h$, $y = y_0+k$, temos:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y-y_0)}{\|(h,k)\|} = 0$$

Seja $R(x,y)$ o erro que se comete na aproximação de $f(x,y)$ por

$$T(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

$$f(x,y) = T(x,y) + R(x,y)$$

onde $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{R(x,y)}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|} = 0$

<u>Def.</u>: Seja f dif. no ponto (x_0,y_0). O plano

$$z - f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y-y_0)$$

é o <u>plano tangente</u> ao gráfico de f no ponto $((x_0,y_0), f(x_0,y_0))$

Vetor normal: $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1\right)$

reta normal: $(x,y,z) = (x_0, y_0, f(x_0,y_0)) + \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1\right)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

<u>Ex.</u>: $f(x,y) = 3x^2y - x$. Plano tang. e reta normal no ponto $(1,2,f(1,2))$.

Ex. 2: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

$$z - 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,y$$
$$z = 0x + 0y \Rightarrow \boxed{z=0}$$

Mostre que o gráfico de f não admite plano tangente em $(0,0,f(0,0))$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[xy^2(x^2+y^2)^{-1}\right] = y^2(x^2+y^2)^{-1} - \frac{2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2(x^2+y^2) - 2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{y^4 - x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} \frac{y^4 - x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \to (t,t)$; $g(t) = f\circ\gamma(t) = \begin{cases} \frac{t^3}{2t^2}, & t\neq 0 \\ 0, & t=0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{t}{2}, & t\neq 0 \\ 0, & t=0 \end{cases}$ $C: (t, t, f(t,t))$. O plano $z=0$ não contém esta reta.

$(1, 1, \frac{1}{2})$

$r: x=\lambda,\ y=\lambda,\ z=\lambda/2$.

$L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$L(h,k) = \frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} k$$

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = L(h,k) + R(h,k)$$

$$\lim \frac{R(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0.$$

L é a diferencial de f em (x_0, y_0)

$$T(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = L(h,k).$$

$$z = f(x,y)$$

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Variação de f — $\Delta z = f(x+dx, y+dy) - f(x,y)$

$$\Delta z \simeq dz.$$

Def.: $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciável em (x_0, y_0)

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + ah + bk + R(h,k)$$

onde $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{R(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0$.

Vimos que $a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ e $b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$

Teo: Seja $f : A \to \mathbb{R}$ e $(x_0, y_0) \in A$. Tem-se que

f é diferenciável em (x_0, y_0) ~~sse~~ se e somente se, $\begin{cases} a) \ f \text{ admite deriv. parciais em } (x_0,y_0) \\ b) \ \displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{R(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0 \end{cases}$

Teo: Toda função diferenciável é contínua.

Ex. 1: Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

é dif. em $(0,0)$?

f não é contínua, logo f não é diferenciável.

Ex. 2: $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

é dif. em $(0,0)$?

$$\frac{R(h,k)}{\|(h,k)\|} = \frac{-hk^2}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

$h = k = t$

$$\frac{R(t)}{\sqrt{2}|t|} = \frac{-t^3}{2\sqrt{2}\,t^2|t|} = \frac{-t}{2\sqrt{2}|t|}$$

$$R(h,k) = f(h,k) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k$$

ou seja $R(h,k) = \dfrac{h^3}{h^2+k^2} - h \Rightarrow \dfrac{R(h,k)}{\|(h,k)\|} = \dfrac{\frac{-hk^2}{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \dfrac{-hk^2}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}} = G(h,k)$

Como $\displaystyle\lim_{t\to 0} G(t,t) = \lim_{t\to 0} \frac{-t}{2\sqrt{2}|t|}$ não existe então $\displaystyle\lim \frac{R(h,k)}{\|(h,k)\|}$ não $\exists$.

Note que f é contínua, pois

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim \overset{\to 0}{x} \underbrace{\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)}_{\text{limit.}} = 0$$

CONDIÇÃO SUFICIENTE PARA DIFERENCIABILIDADE

<u>Teo:</u> Sejam $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aberto, $(x_0, y_0) \in A$. Se as deriv. parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ existirem em A e forem contínuas em (x_0, y_0) então f é diferenciável neste ponto.

<u>prova:</u> A aberto $\exists\ B(x_0, y_0) \subset A$. $(x_0+h, y_0+k) \in B$.

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0+k) + f(x_0, y_0+k) - f(x_0,y_0)$$

Chamando $G(x) = f(x, y_0+k)$, T.V.M.

$$G(x_0+h) - G(x_0) = G'(\bar{x}) \cdot h = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, y_0+h)h$$

Analogamente, $H(x) = f(x_0, y)$

$$H(y_0+k) - H(y_0) = H'(\bar{y})\, k = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \bar{y})\, k$$

Assim:

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}_0, y_0+k)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \bar{y})\, k$$

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k =$$

$$= \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}_0, y_0+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right] h + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\bar{y}) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right] k$$

1

$f \in C^1$ se $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ forem contínuas em A.

Corolário: Seja $f: A \to \mathbb{R}$, A aberto. Se f for de classe C^1, então f é diferenciável.

$f \in C^2$ se $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ forem contínuas em A

$f \in C^n$ $\frac{\partial^n f}{\partial x_1 \dots \partial x_n}$ cont.

Ex.: $f(x,y) = \operatorname{sen}(x^2+y^2)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \cos(x^2+y^2), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y \cos(x^2+y^2)$$

$\frac{\partial^n f}{\partial x_i^n}$ cont.

$\frac{\partial^n f}{\partial x_i^k \partial x_j^p}$

Ex. 2: $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2) \operatorname{sen} \frac{1}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

f é dif. Mas $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são não contínuas em $(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} h^2 \operatorname{sen} \frac{1}{h^2} = 0$$

$f(x) = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{h \operatorname{sen} \frac{1}{h} -}{h}$

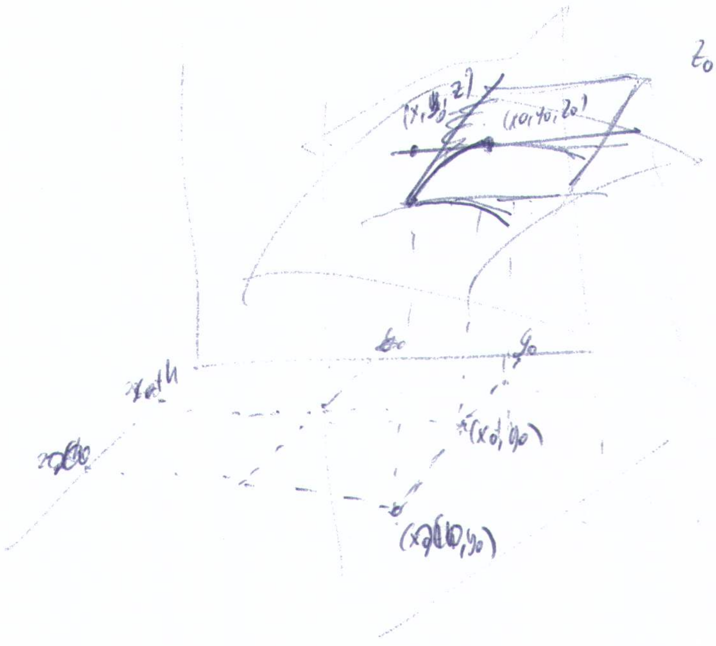
(x^2+y^2)

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x^2+y^2} + (x^2+y^2) \cos \frac{1}{(x^2+y^2)} \cdot \frac{(-2x)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= 2x \left(\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{1}{x^2+y^2} \cos \frac{1}{(x^2+y^2)} \right)$$

f é diferenciável na origem.



$z_0 = f(x_0, y_0)$

$y = y_0$.

$r_{t_x}: \dfrac{z - z_0}{x - x_0} = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$

$r_{t_x}: z = z_0 + (x - x_0)\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $y = y_0$.

$r_{t_x}: z = f(x_0, y_0) + \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0)$; $y = y_0$.

$r_{t_y}: \dfrac{z - z_0}{y - y_0} = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, $x = x_0$.

$r_{t_y}: z - z_0 = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$; $x = x_0$

$$v_{t_x} \times v_{t_y} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} =$$

$$r_{t_x}: \begin{cases} x = t \\ y = y_0 \\ z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(t - x_0) \end{cases}$$

$$\vec{n} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\vec{j} + \vec{k}$$

$$r_{t_x}: \begin{cases} x = 0 + t \\ y = y_0 + 0t \\ z = f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)x_0 + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)t \end{cases}$$

$P(x, y, z)$

$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\vec{i} - \dfrac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \vec{k}\right) = 0$ $\quad \vec{v}_{t_x} = \left(1, 0, \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right)$

$P_{Reta} = \left(0, y_0, f(x_0, y_0) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)x_0\right)$

Plano tangente: $(z - z_0) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\, y - y_0 = 0$.

$v_{t_y}: \left(0, 1, \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$

$$\vec{n} = -\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \vec{k}.$$

$\vec{n}(1,1,2) = -2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$

$-2(x-1) - 2(y-1) + z - 2 = 0$

$\alpha: -2x - 2y + z + 2 = 0$

Exemplo: Seja a superfície S de eq. $z = x^2 + y^2$. Ache o plano tangente a S no ponto $(1, 1, 2)$.

$S: z = f(x, y)$

$S: F(x, y, z) = z - f(x, y) = 0$

$$\boxed{\vec{\nabla F} = -\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \vec{k}}$$

$F(x, y, z) = z - x^2 - y^2$

$\vec{n} = \nabla F = -2x\vec{i} - 2y\vec{j} + \vec{k}$

$(x, y, z) \in \alpha$ $\quad (x-1)\vec{i} + (y-1)\vec{j} + (z-2)\vec{k} \cdot \vec{n}$

Ex.: $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0.$

Existem as derivadas parciais no ponto (0,0) mas $f(x,y)$ não é contínua em (0,0).

$g(t)=f(t,t)=\begin{cases}1/2, & t\neq 0\\ 0, & t=0\end{cases} \Rightarrow f$ não é contínua em $t=0$.

Ex. 2: Seja $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{x^4+3x^2y^2+2xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Em (0,0)

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ é a derivada em $x=0$ de $g(x)=f(x,0)$

$f(x,0)=\begin{cases}x, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=1=g'(0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\begin{cases}\dfrac{x^4+3x^2y^2+2xy^2}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 1, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Para $(x,y)\neq(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{2x^2y(1+x)}{(x^2+y^2)^2}$$

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ não existe.

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ é a derivada de $f(0,y)=h(y)$

$f(0,y)=\begin{cases}-1, & y\neq 0\\ 0, & y=0\end{cases}$

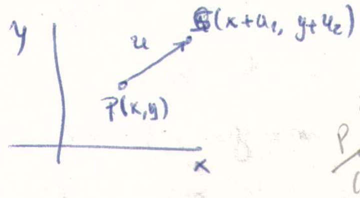
$h(y)$ não é contínua $\Rightarrow h'(0)$ não existe $\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\ \nexists$

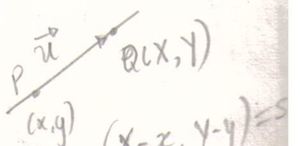
DERIVADAS DIRECIONAIS

As derivadas parciais f_x e f_y de uma função de duas variáveis $f(x,y)$ representam as taxas de variações instantâneas de f na direção horizontal e vertical, respectivamente.

Vamos estudar nesta seção a taxa de variação de $f(x,y)$ em qualquer direção.

Seja $\vec{u} = u_1\hat{\imath} + u_2\hat{\jmath}$ um vetor unitário. Representando $\vec{u}$ por um vetor com ponto inicial $P(x,y)$ então o ponto terminal tem coordenadas $(x+u_1, y+u_2)$. Queremos definir a taxa de variação de $f(x,y)$ em relação à distância na direção determinada por $\vec{u}$.





$\vec{PQ} = (X-x, Y-y) = s$

Seja $\vec{u} = u_1\hat{\imath} + \vec{u}_2\hat{\jmath}$ vetor unitário.

Considere uma reta ℓ por P paralela a $\vec{u}$.

Q ponto arb. em ℓ. O vetor $\vec{PQ}$ corresponde a $s\vec{u} = (su_1)\hat{\imath} + (su_2)\hat{\jmath}$ p/ algum s.

$X - x = su_1 \Rightarrow X = x + su_1$

$Y - y = su_2 \Rightarrow Y = y + su_2$

$\|\vec{u}\| = 1$

$$\|\vec{PQ}\| = \|su\| = |s|\,\|u\| = |s|$$

~~Daí~~, Se um ponto P ~~para~~ move-se para Q, então o incremento Δw de $w = f(x,y)$ é:

$$\Delta w = f(x+su_1, y+su_2) - f(x,y)$$

A taxa média de variação de $f(x,y)$ é

$$\frac{\Delta w}{s} = \frac{f(x+su_1, y+su_2) - f(x,y)}{s}$$

Definição 1: Sejam $w = f(x,y)$ e $\vec{u} = u_1\hat{\imath} + u_2\hat{\jmath}$ um vetor unitário. A derivada direcional de f em $P(x,y)$ na direção de u, ~~denotada de $\vec{u}$~~, denotada por $D_{\vec{u}} f(x,y)$, é

$$D_{\vec{u}} f(x,y) = \lim_{s \to 0} \frac{f(x+su_1, y+su_2) - f(x,y)}{s}$$

Isto dá a taxa de variação de $f(x,y)$ em relação à distância em $P(x,y)$ na direção definida por $\vec{u}$.

Teorema 1: Se f é uma função diferenciável de duas variáveis e $\vec{u} = u_1\hat{\imath} + u_2\hat{\jmath}$ é um vetor unitário, então

$$D_u f(x,y) = f_x(x,y)u_1 + f_y(x,y)u_2.$$

Dem.:

Consideremos x, y, u_1 e u_2 como fixos (arbitrários), e seja g a função de uma variável definida por

$$g(s) = f(x+su_1, y+su_2)$$

Pelas def. de derivadas de uma função real e derivada direcional temos

$$g'(0) = \lim_{s\to 0} \frac{g(s)-g(0)}{s-0}$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{f(x+su_1, y+su_2) - f(x,y)}{s}$$

$$= D_u f(x,y).$$

$$= \frac{f(x+su_1, y+su_2) - f(x,y)}{s}$$

$$= f(x+$$

Mas considerando

$$w = g(s) = f(r, v) \quad \text{onde} \quad r = x+su_1, \quad v = y+su_2$$

w é uma função de duas variáveis r e v com r e v funções de uma variável s, segue então que (regra da cadeia)

$$\frac{dw}{ds} = \frac{\partial w}{\partial r}\frac{dr}{ds} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{dv}{ds}.$$

Com as definições de $w=g(s)$, r e v, temos:

$$g'(s) = f_r(r,v)\,u_1 + f_v(r,v)\,u_2$$

Fazendo $s=0$, então $r=x$, $v=y$ e pela primeira parte da demonstração $g'(0) = D_u f(x,y)$. Logo,

$$D_u f(x,y) = f_x(x,y)u_1 + f_y(x,y)u_2 .$$

As derivadas parciais primeiras de f são casos especiais da derivada direcional $D_u f(x,y)$. Se $\vec{u} = \vec{i}$, então $u_1 = 1$, e $u_2 = 0$. Daí

$$D_{\vec{i}} f(x,y) = f_x(x,y).$$

Se $\vec{u} = \hat{j}$ então

$$D_{\vec{j}} f(x,y) = f_y(x,y).$$

Exemplo 1: Seja $f(x,y) = x^3 y^2$.

(a) Ache a derivada direcional de f no ponto $P(-1,2)$ na direção do vetor $\vec{a} = 4\hat{\imath} - 3\hat{\jmath}$.

(b)

Sol.: (a) Considere O vetor $\vec{a} = 4\hat{\imath} - 3\hat{\jmath}$ com ponto inicial $P(-1,2)$ ~~está representado~~. Queremos determinar $D_{\vec u} f(-1,2)$ para o vetor unitário $\vec u$ que tem a direção de $\vec a$. Sabemos que:

$$\vec u = \frac{1}{\|\vec a\|} \cdot \vec a = \frac{1}{5}(4\hat{\imath} - 3\hat{\jmath}) = \frac{4}{5}\hat{\imath} - \frac{3}{5}\hat{\jmath}.$$

Como

$$f_x(x,y) = 3x^2y^2 \quad e \quad f_y(x,y) = 2x^3y$$

Segue-se que

$$D_{\vec u} f(x,y) = 3x^2y^2\left(\frac{4}{5}\right) + 2x^3y\left(-\frac{3}{5}\right)$$

Logo, em $P(-1,2)$

$$D_{\vec u} f(-1,2) = 3(-1)^2 2^2 \left(\frac{4}{5}\right) + 2(-1)^3 2 \left(-\frac{3}{5}\right) = 13$$

Podemos expressar a derivada direcional como segue

$$D_{\vec u} f(x,y) = [f_x(x,y)\hat{\imath} + f_y(x,y)\hat{\jmath}] \cdot [u_1\hat{\imath} + u_2\hat{\jmath}]$$

Definição: Seja f uma função de duas variáveis. O gradiente de f é a função vetorial dada por

$$\nabla f(x,y) = f_x(x,y)\hat{\imath} + f_y(x,y)\hat{\jmath}.$$

Portanto,

$$\boxed{D_{\vec u} f(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot \vec u}$$

O símbolo ∇, é um operador diferencial que se define como

$$\nabla = \hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y}$$

(4)

Se $P_0(x_0,y_0)$ é um ponto específico do plano-xy, costuma-se denotar o vetor gradiente em P_0 por $\nabla f|_{P_0}$. Assim

$$\nabla f|_{P_0} = \nabla f(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)\hat{\imath} + f_y(x_0,y_0)\hat{\jmath}.$$

<u>EXEMPLO 2</u>: Seja $f(x,y) = x^2 - 4xy$

(a) Ache o gradiente de f no ponto $P(1,2)$ e esboce o vetor $\nabla f|_P$.

(b) Use o gradiente para achar a derivada direcional de f em $P(1,2)$ na direção de $P(1,2)$ para $Q(2,5)$.

<u>Sol.</u>: Por definição,

(a)

$$\nabla f(x,y) = (2x - 4y)\hat{\imath} - 4x\hat{\jmath}$$

Em $P(1,2)$,

$$\nabla f|_P = \nabla f(1,2) = (2-8)\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} = -6\hat{\imath} - 4\hat{\jmath}.$$

(b) Fazendo $\vec{a} = \vec{PQ}$, então

$$\vec{a} = \langle 2-1, 5-2\rangle = \langle 1,3\rangle = \hat{\imath} + 3\hat{\jmath}.$$

O vetor unitário na direção de $\vec{PQ}$ é:

$$\vec{u} = \frac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{10}}(i + 3\hat{\jmath})$$

Daí,

$$D_u f(1,2) = \nabla f(1,2)\cdot u$$

$$= (-6\hat{\imath} - 4\hat{\jmath})\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}(\hat{\imath} + 3\hat{\jmath})$$

$$= -\frac{6}{\sqrt{10}} - \frac{12}{\sqrt{10}} = -\frac{18}{\sqrt{10}} \approx -5{,}7.$$

Teorema do Gradiente: Seja f uma função de duas variáveis, diferenciável no ponto $P(x,y)$.

(i) O máximo $D_u f(x,y)$ em $P(x,y)$ é $\|\nabla f(x,y)\|$.

(ii) O máximo da taxa de crescimento de $f(x,y)$ em $P(x,y)$ ocorre na direção de $\nabla f(x,y)$.

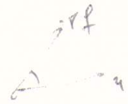
Prova:

(i) Consideremos o ponto $P(x,y)$ e o vetor $\nabla f(x,y)$ como fixos (mas arbitrários) e o vetor $\vec{u}$ como variável. Seja γ o ângulo entre $\vec{u}$ e $\nabla f(x,y)$. Sabemos que

$$
\begin{aligned}
D_{\vec{u}} f(x,y) &= \nabla f(x,y) \cdot \vec{u} \\
&= \|\nabla f(x,y)\| \, \|u\| \cos\gamma \\
&= \|\nabla f(x,y)\| \cos\gamma
\end{aligned}
$$

Como $-1 \le \cos\gamma \le 1$, o máximo ocorre ~~se~~ $\cos\gamma = 1$, ~~neste~~ nesta caso, $D_u f(x,y) = \|\nabla f$

(ii) A derivada direcional $D_u f(x,y)$ é a taxa de variação de $f(x,y)$ em relação à distância em $P(x,y)$ na direção definida por $\vec{u}$. Esta taxa só atinge seu máximo se $\cos\gamma = 1$, isto é, $\gamma = 0$. Neste caso, $\vec{u}$ tem a mesma direção que $\nabla f(x,y)$.



$\boxed{\nabla f = k\vec{u}}$

Corolário: Seja f uma função de duas variáveis, diferenciável no ponto $P(x,y)$.

(i) O mínimo de $D_u f(x,y)$ em $P(x,y)$ é $-\|\nabla f(x,y)\|$.

(ii) O mínimo da taxa de acréscimo (ou o máximo da taxa de decréscimo) de $f(x,y)$ em $P(x,y)$ ocorre na direção de $-\nabla f(x,y)$.

Exemplo 3: Seja $f(x,y) = 2 + x^2 + \frac{1}{4}y^2$

(a) Ache a direção segundo a qual $f(x,y)$ cresce mais rapidamente no ponto $P(1,2)$, e determine a taxa máxima de crescimento de f em P.

(b) Interprete (a) utilizando o gráfico de f.

(a) Sol:

O gradiente de f é

$$\nabla f(x,y) = 2x\hat{\imath} + \frac{1}{2} y \hat{\jmath}$$

Em P(1,2),

$$\nabla f(1,2) = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath}$$

Este vetor define a direcção segundo a qual f(x,y) aumenta mais rapidamente em P(1,2).

A taxa máxima de aumento de f em P(1,2) é

$$\|\nabla f(1,2)\| = \|2\hat{\imath} + \hat{\jmath}\| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$$

(1)

~~Definição~~ Para uma função f de três variáveis e $\vec{u} = u_1\hat{\imath} + u_2\hat{\jmath} + u_3\hat{k}$ temos:

Derivada direcional de $f(x,y,z)$: $D_u f(x,y,z) = \lim_{s\to 0} \dfrac{f(x+su_1,\, y+su_2,\, z+su_3) - f(x,y,z)}{s}$

Gradiente de $f(x,y,z)$: $\nabla f(x,y,z) = f_x(x,y,z)\,\hat{\imath} + f_y(x,y,z)\,\hat{\jmath} + f_z(x,y,z)\,\hat{k}$.

Teorema: Se f é uma função diferenciável de três variáveis e $\vec{u} = u_1\hat{\imath} + u_2\hat{\jmath} + u_3\hat{k}$ é um vetor unitário, então

$$D_u f(x,y,z) = \nabla f(x,y,z) \cdot \vec{u}$$
$$= f_x(x,y,z)\,u_1 + f_y(x,y,z)\,u_2 + f_z(x,y,z)\,u_3 .$$

P

Igual ao Teorema 2, de todas as derivadas direcionais possíveis $D_u f(x,y,z)$ no ponto $P(x,y,z)$, a derivada na direção de $\nabla f(x,y,z)$ é a que tem maior valor; esse valor é $\|\nabla f(x,y,z)\|$.

Taxa de variação de f em rel. à distância ao ponto P
''
Deriv. Direcional
''
$D_u f(P)$

Exemplo 4: Suponhamos que um sistema coordenado xyz esteja localizado no espaço, de modo que a temperatura T no ponto (x,y,z) seja dada pela fórmula $T = 100/(x^2+y^2+z^2)$

(a) Ache a taxa de variação de T em relação à distância no ponto $P(1,3,-2)$ e na direção do vetor $\vec{a} = \hat{\imath} - \hat{\jmath} + \hat{k}$.

(b) Em que direção, a partir de P, T aumenta mais rapidamente? Qual a taxa máxima de variação de T em P?

Solução: (a) Pela definição de gradiente, o gradiente de T é

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial T}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial T}{\partial z}\hat{k}$$

Como

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{-200x}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{-200y}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{-200z}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

obtemos

$$\nabla T = \frac{-200}{(x^2+y^2+z^2)^2}(x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k})$$

Logo, $\nabla T|_P = \dfrac{-200}{}(\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - 2\hat{k})$

(2) Um vetor unitário $\vec{u}$ na mesma direção de $\vec{a}$ é

$$u = \frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{\imath} - \hat{\jmath} + \hat{k})$$

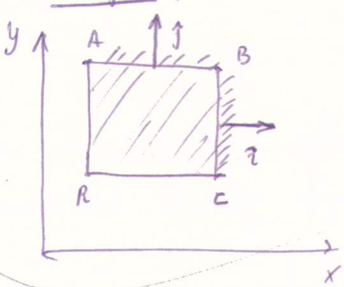
Pelo Teo. , a taxa de variação de T em P na direção de $\vec{u}$ é

$$D_u T|_P = \nabla T|_P \cdot \vec{u} = \frac{-200}{196}\frac{(1-3-2)}{\sqrt{3}} = \frac{200}{49\sqrt{3}} \simeq 2{,}4.$$

(b) O máximo da taxa de variação de T em P ocorre na direção do gradiente i.e, na direção do vetor $-\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 2\hat{k}$. O máximo da taxa é igual ao módulo do gradiente, i.e,

$$\|\nabla T|_P\| = \frac{200}{196}\sqrt{1+9+4} = 3{,}8.$$

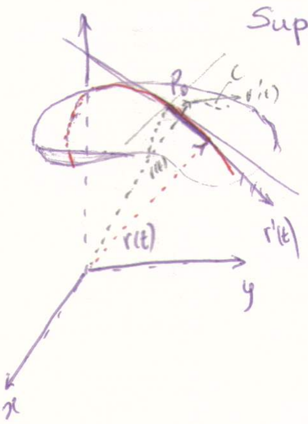
Exemplos:



$\nabla T \cdot \hat{\imath} = 0$

$\nabla T \cdot \hat{\jmath} = 0$

PLANOS TANGENTES E RETAS NORMAIS



Suponhamos que uma superfície S seja o gráfico da equação $F(x,y,z)=0$ e que F tenha derivadas parciais primeiras contínuas. Seja $P_0(x_0, y_0, z_0)$ um ponto de S no qual F_x, F_y e F_z não sejam simultaneamente nulas. Uma ℓ reta tangente a S em P_0 é, por definição, uma reta ℓ tangente a qualquer curva C de S que contenha P_0. Se C admite a parametrização

$$x = f(t),\ y = g(t),\ z = h(t)$$

para t em algum intervalo I e se $r(t)$ é o vetor posição de $P(x,y,z)$, então

$$r(t) = f(t)\hat{\imath} + g(t)\hat{\jmath} + h(t)\hat{k}$$

Logo,

$$r'(t) = f'(t)\hat{\imath} + g'(t)\hat{\jmath} + h'(t)\hat{k}$$

é um vetor tangente a C em $P(x,y,z)$.

Para cada t, o ponto $(f(t), g(t), h(t))$ de C também pertence a S e plano,

$$F(f(t), g(t), h(t)) = 0$$

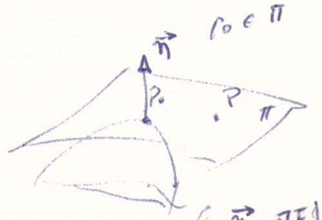
Fazendo

$$W = F(x,y,z), \text{ com } x = f(t),\ y = g(t),\ z = h(t)$$

então, pela regra da cadeia, e como $W = 0 \ \forall t$,

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\partial W}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial W}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial W}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0$$

Assim, para todo ponto $P(x,y,z)$ de C,



$$F_x(x,y,z)\, f'(t) + F_y(x,y,z)\, g'(t) + F_z(x,y,z)\, h'(t) = 0 :$$

ou equivalentemente

$$\nabla F^{(x,y,z)} \cdot r'(t) = 0$$

$\vec{n} = \nabla F|_{P_0}$

$P = (x,y,z)$

$P_0 = (x_0, y_0, z_0)$

$\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k}$

Em particular, se $P_0(x_0, y_0, t_0)$ corresponde a $t = t_0$, então

$$\nabla F|_{P_0} \cdot r'(t_0) = \nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot r'(t_0) = 0.$$

$\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n} = 0$

$\nabla F|_{P_0} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$

Como $r'(t_0)$ é um vetor tangente a C em P_0, isto implica que o vetor $\nabla F|_{P_0}$ é <u>ortogonal</u> a <u>toda</u> <u>reta</u> <u>tangente</u> à S em P_0

O Plano que passa por P_0 com vetor normal $\nabla F|_{P_0}$ é o <u>plano</u> <u>tangente</u> a S <u>em</u> <u>P_0</u>. (Mostramos que toda reta tangente à S em P_0 está no plano tangente em P_0).

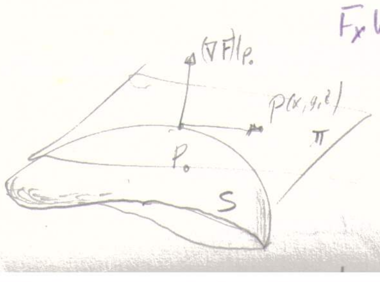
<u>Teo 1</u>: $F(x,y,z)$ com derivadas parciais primeiras contínuas, S gráfico de $F(x,y,z) = 0$. $P_0 \in S$, $F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 \neq 0$ em P_0 então $\nabla F|_{P_0}$ é normal ao plano tangente a S em P_0.

<u>Teorema</u> 1: Suponhamos que $F(x,y,z)$ tenha derivadas parciais primeiras contínuas e que S seja o gráfico de $F(x,y,z) = 0$. Se P_0 é um ponto de S e se F_x, F_y e F_z não são simultaneamente nulas em P_0, então o vetor $\nabla F|_{P_0}$ é normal ao plano tangente a S em P_0.

O vetor $\nabla F|_{P_0}$ do <u>Teo. 1</u> é designado como a <u>normal</u> <u>à</u> <u>superfície</u> S em P_0.

<u>Corolário</u>: A eq. do plano tangente ao gráfico de $F(x,y,z) = 0$ no ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ é

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x - x_0) + F_y(x_0,y_0,z_0)(y - y_0) + F_z(x_0,y_0,z_0)(z - z_0) = 0.$$



$$\nabla F(x_0,y_0,z_0) \cdot \left[(x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k}\right] = 0$$

Exemplo: Ache a eq. do plano tangente ao elipsoide $\frac{3}{4}x^2+3y^2+z^2=12$ no ponto $P_0(2,1,\sqrt{6})$.

Solução: Para usar o corol. expressamos, inicialmente, a eq. da superfície na forma $F(x,y,z)=0$ fazendo

$$F(x,y,z)=\frac{3}{4}x^2+3y^2+z^2-12=0$$

As derivadas de F são

$$F_x(x,y,z)=\frac{3}{2}x,\quad F_y(x,y,z)=6y,\quad F_z(x,y,z)=2z$$

e, então em $P_0(2,1,\sqrt{6})$

$$F_x(2,1,\sqrt{6})=3,\quad F_y(2,1,\sqrt{6})=6,\quad F_z(2,1,\sqrt{6})=2\sqrt{6}$$

Aplicamos o corol., obtendo

$$3(x-2)+6(y-1)+2\sqrt{6}(z-\sqrt{6})=0$$

ou

$$3x+6y+2\sqrt{6}z=24.$$

$$\nabla F|_{P_0}=\nabla F(2,1,\sqrt{6})=3\hat{i}+6\hat{j}+2\sqrt{6}\hat{k}.$$

Se $z=f(x,y)$ é a eq. de S, e fazendo $F(x,y,z)=f(x,y)-z$ $\Rightarrow F(x,y,z)=0$, então a eq. do corol. toma a forma:

$F_x=f_x,\ F_y=f_y,\ F_z=-1.$

$$f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)+(-1)(z-z_0)=0.$$

$F_x=f_x$
$F_y=f_y$
$F_z=-1.$

Teo: A eq. do plano tangente ao gráfico de $z=f(x,y)$ no ponto (x_0,y_0,z_0) é:

$$z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$

A reta perpendicular ao plano tangente em um ponto $P_0(x_0,y_0,z_0)$ de uma superfície S é a reta normal a S em P_0. Se S é o gráfico de $F(x,y,z)=0$, então a normal é paralela ao vetor $\nabla F(x_0,y_0,z_0)$.

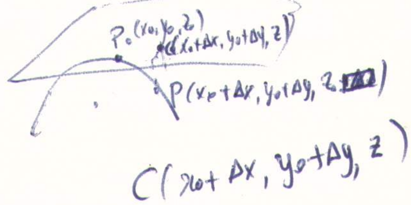
Exemplo 2: Ache a eq. da normal ao elipsoide $\frac{3}{4}x^2+3y^2+z^2=12$ no ponto $P_0(2,1,\sqrt{6})$

Sol: $\nabla F(2,1,\sqrt{6})=3\hat{i}+6\hat{j}+2\sqrt{6}\hat{k}$ daí,

$$x=2+3t;\quad y=1+6t,\quad z=\sqrt{6}+2\sqrt{6}t;\quad t\in\mathbb{R}.$$

Seja S o gráfico da eq. $z = f(x,y)$. O plano tangente a S em $P_0(x_0,y_0,z_0)$ permite obter uma interpretação geométrica para a diferencial

$$dz = f_x(x_0,y_0)\,\Delta x + f_y(x_0,y_0)\,\Delta y$$



Como

$$\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)$$

o ponto $P(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)$ está em S.

Seja $C(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z)$ um ponto no plano tangente, e consideremos os pontos $A(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, 0)$ e $B(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0)$. Como C está no plano tangente suas coordenadas verificam a eq. do Teorema anterior (plano tangente), i.e,

$$z - z_0 = f_x(x_0,y_0)(x_0+\Delta x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y_0+\Delta y - y_0)$$

$$= f_x(x_0,y_0)\,\Delta x + f_y(x_0,y_0)\,\Delta y = dz$$

ou seja, $|dz| = \|\overline{BC}\|$, $|dz|$ é a distância de B ao ponto do plano tangente diretamente acima (ou abaixo) de B.

Suponha que temos uma função F de três variáveis dada por

$$w = F(x,y,z)$$

Se $P_0(x_0,y_0,z_0)$ é um ponto fixo, então o gráfico da equação

$$F(x,y,z) = F(x_0,y_0,z_0)$$

$G(x,y,z) = F(x,y,z) - F(x_0,y_0,z_0) = 0$

$G_x = F_x,\ G_y = F_y,\ G_z = F_z$

é a superfície de nível que passa por P_0. Em todo ponto desta superfície o valor de F é sempre $w_0 = F(x_0,y_0,z_0)$. Pelo Teo. anterior, $\nabla F|_{P_0}$, $\nabla F|_{P_1}$ e $\nabla F|_{P_2}$ são vetores normais à suas superfícies correspondentes nos pontos P_0, P_1 e P_2, resp..

Vimos que a taxa máxima de variação de $F(x,y,z)$ em $P_0(x_0,y_0,z_0)$ ocorre na direção de $\nabla F|_{P_0}$. Pelo que vimos, esta taxa máxima de variação ocorre numa direção que é normal à superfície de nível de F que contém P_0.

<u>Teorema</u> 2: Sejam F função de três variáveis diferenciáveis em $P_0(x_0,y_0,z_0)$, e S a superfície de nível de F que contém P_0. Se $\nabla F(x_0,y_0,z_0) \neq 0$, então este vetor gradiente é normal a S em P_0. Assim a direção da taxa máxima de variação de $F(x,y,z)$ em P_0 é normal a S.

Exemplo 4: Se $F(x,y,z) = x^2+y^2+z$, esboce a superfície de nível de F que passa por $P(1,2,4)$; esboce $\nabla F(1,2,4)$.

Sol.: As superfícies de nível são gráficos de eq. da forma

$$F(x,y,z) = k, \quad k \text{ constante.}$$

Como

$$F(1,2,4) = 1^2+2^2+4 = 9,$$

a superfície de nível que passa por $P(1,2,4)$ é o gráfico da eq. $F(x,y,z) = 9$, i.e.,

$$x^2+y^2+z = 9 \quad \text{ou} \quad z = 9-x^2-y^2$$

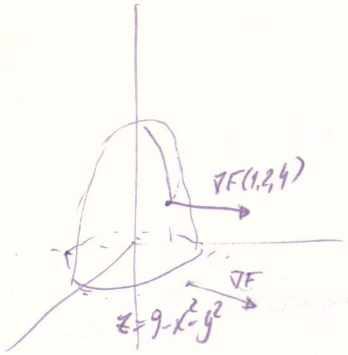
Esta superfície é o parabolóide de revolução.

O gradiente de F é

$$\nabla F = 2x\hat{\imath} + 2y\hat{\jmath} + \hat{k}$$

Em $P(1,2,4)$

$$\nabla F(1,2,4) = 2.(1)\hat{\imath} + 2.(2)\hat{\jmath} + \hat{k} = 2\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + \hat{k}$$



Funções de duas variáveis

Teorema: Sejam f uma função de duas variáveis diferenciável em $P_0(x_0,y_0,z_0)$ e C a curva de nível de f que contém P. Se $\nabla f(x_0,y_0) \neq 0$, então este vetor gradiente é ortogonal a C em P_0. Assim a direção da taxa máxima de variação de $f(x,y)$ em P_0 é ortogonal a C.

Como ilustração: Se $f(x,y) = 9-x^2-y^2$, então as curvas de nível são dadas por $9-x^2-y^2 = k$, k número real. A taxa máxima (ou mínima) de variação de $f(x,y)$ ocorre se (x,y) se move na direção ortogonal a estes círculos, e conseq., ao longo de retas na origem. Isto corresponde ao movimento do ponto $(x, y, f(x,y))$ para cima ou para baixo ao longo da maior aclividade do gráfico de f.

Exemplo 5: Seja $f(x,y) = x^2+2y^2$

(a) Trace a curva de nível C que passa pelo pto $P(3,1)$ e esboce $\nabla f(3,1)$

(b) Discuta o significado de (a) em termos do gráfico de f.

(a) $f(3,1) = 3^2+2 = 11$, $x^2+2y^2 = 11$ (elipse) $\nabla f(x,y) = 2x\hat{\imath} + 4y\hat{\jmath}$ $\nabla f(3,1) = 6\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$.

(b) gráfico de f (parabolóide elíptico) curva de nível $x^2+2y^2=11$ no plano-xy corresp. traço do parabolóide no plano $z=11$. A taxa máxima de variação de f na direção [illegible]

3. EXTREMOS DE FUNÇÕES DE DIVERSAS VARIÁVEIS

Uma função f de duas variáveis tem máximo local em (a,b) se existe um disco aberto R contendo (a,b) tal que $f(x,y) \leq f(a,b)$ para todo (x,y) em R.

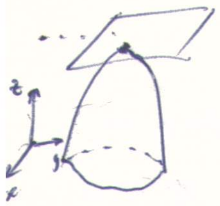
Do mesmo modo, a função f tem mínimo local em (c,d) se existe um disco aberto R contendo (c,d) tal que $f(x,y) \geq f(c,d)$ para todo (x,y) em R.

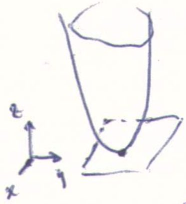
$\Rightarrow (|x| \leq M, \forall x \in R$, para algum $M>0.)$

Uma região do plano-xy é limitada se é uma sub-região de um disco fechado. Se f é contínua numa região R fechada e limitada então f tem máximo $f(a,b)$ e mínimo $f(c,d)$ p/ algum (a,b) e algum (c,d) em R, isto é,

$$f(c,d) \leq f(x,y) \leq f(a,b),$$

para todo (x,y) em R.





Os máximos e mínimos locais são os extremos locais de f. Os extremos também incluem o máximo e mínimo. Se f tem derivadas parciais primeiras contínuas em (x_0,y_0) e se $f(x_0,y_0)$ é um extremo local de f, então o plano tangente ao gráfico de $z=f(x,y)$ em (x_0,y_0,z_0) é paralelo ao plano-xy e, assim, sua equação é $z=z_0$. Segue-se que $f_x(x_0,y_0)=0$ e $f_y(x_0,y_0)=0$.

Definição: Seja f uma função de duas variáveis. Um par (a,b) é ponto crítico de f se

(i) $f_x(a,b)=0$ e $f_y(a,b)=0$ ou

(ii) $f_x(a,b)$ ou $f_y(a,b)$ não existe.

Um máximo ou mínimo de uma função de duas variáveis podem ocorrer num ponto fronteira de seu domínio R.

Exemplo 1: Seja $f(x,y) = 1 + x^2+y^2$, com $x^2+y^2 \leq 4$. Ache os extremos de f.

Sol.: Por definição os pontos críticos de f são soluções do seguinte sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 2x=0 \\ 2y=0 \end{cases}$$

que tem como solução $(x,y)=(0,0)$; logo $f(0,0)=1$ é um único extremo local possível. Além disso, como

$$f(x,y) = 1 + x^2 + y^2 > 1 \quad \text{se } (x,y) \neq (0,0)$$

f tem o mínimo local 1 em (0,0).

Para achar possíveis extremos na fronteira, investigamos pontos (a,b) que estejam na fronteira de R. Um desses pontos é por o (0,2) que conduz a $f(0,2) = 5$. Que é o valor máximo, pois

$$1 + x^2 + y^2 \leq 1 + 4 = 5; \quad \forall (x,y) \text{ tq. } x^2 + y^2 \leq 4.$$

Exemplo 2: Se $f(x,y) = x^2 - y^2$ e o domínio de f é $\mathbb{R}^2$, ache os extremos de f

Sol.: Por definição, os pontos críticos são soluções do seguinte sistema:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases}$$

O único extremo local possível é o (0,0). Mas se $x \neq 0$, então $f(x,0) = x^2 > 0$, e se $y \neq 0$, então $f(0,y) = -y^2 < 0$. Qualquer disco aberto no plano-xy que contenha o (0,0) contém pontos nos quais os valores funcionais são maiores do que f(0,0) e também pontos em que os valores são menores que f(0,0).

Definição: Seja f uma função de duas variáveis com derivadas parciais segundas contínuas. O discriminante D de f é

$$D(x,y) = f_{xx}(x,y)\, f_{yy}(x,y) - [f_{xy}(x,y)]^2$$

Teste para extremos locais: Seja f uma função de duas variáveis com derivadas parciais segundas contínuas no disco aberto R que contém (a,b). Se $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ e $D(a,b) > 0$, então f(a,b) é

(i) máximo local de f se $f_{xx}(a,b) < 0$.

(ii) mínimo local de f se $f_{xx}(a,b) > 0$.

$$D(a,b) > 0 \Rightarrow f_{xx}(a,b)\, f_{yy}(a,b) > [f_{xy}(a,b)]^2 \Rightarrow f_{xx}(a,b)\, f_{yy}(a,b) > 0 \Rightarrow$$

$$\text{Se } f_{xx}(a,b) > 0 \Rightarrow f_{yy}(a,b) > 0 \text{ e se } f_{xx}(a,b) < 0 \Rightarrow f_{yy}(a,b) < 0.$$

Exemplo 3: $f(x,y) = x^2 - 4xy + y^3 + 4y$

(i)

$f_x = 2x - 4y$; $f_y = -4x + 3y^2 + 4$

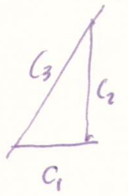
$$\begin{cases} 2x - 4y = 0 \\ -4x + 3y^2 + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow (4,2), \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$f_{xx}(4,2) = 2 > 0$, $f_{xy} = -4$, $f_{yy} = 6y$

$D(x,y) = 12y - 6$. $\qquad D(4,2) = 24 - 6 > 0$

Exemplo 4: Se $f(x,y) = x^2 - 4xy + y^3 + 4y$, ache os extremos de f na região triangular R de vértices $(-1,-1)$, $(7,-1)$ e $(7,7)$.

Solução: A fronteira de R consiste de C_1, C_2 e C_3. f tem mínimo local 0 no ponto $(4,2)$, interior a R. Resta pesquisar a fronteira. Em C_1 $y=-1$, assim:



$$f(x,-1) = x^2 + 4x - 1 - 4 = x^2 + 4x - 5$$

Isto define uma função de uma variável, cujo domínio é o intervalo $[-1,7]$. A derivada primeira é $2x+4$, que é igual a zero em $x=-2$. Este número está fora do intervalo $[-1,7]$. Assim não há extremo local em $[-1,7]$. Mas como $f(x,-1)$ é crescente em todo este intervalo segue os extremos estão nos pontos terminais

$$f(-1,-1) = -8 \quad e \quad f(7,-1) = 72.$$

Em C_2, temos $x=7$; os valores de f são

$$f(7,y) = 49 - 28y + y^3 + 4y = y^3 - 24y + 49$$

para $-1 \leq y \leq 7$. A derivada primeira desta função de y é $3y^2 - 24$. Há um ponto crítico $3y^2 = 24$; $y = 2\sqrt{2}$. Pela derivada $f_{yy} = 6y$ vemos que

$f(7, 2\sqrt{2}) = 49 - 32\sqrt{2} > 0$ é mínimo local de f em C_2. Não é mínimo absoluto em R, pois $f(-1,-1) = -8 < 3,7$. Os valores nas extremidades de f de C_2 são

$$f(7,-1) = 72 \quad e \quad f(7,7) = 224.$$

Finalmente, em C_3 temos $y=x$, os valores de f são dados por:

$$f(x,x) = x^2 - 4x^2 + x^3 + 4x = x^3 - 3x^2 + 4x$$

A primeira derivada é: $3x^2 - 6x + 4$ não tem raízes reais, não há pontos críticos.

Testa os extremos: $f(-1,-1) = -8$ e $f(7,7) = 224$.

Exemplos: $f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{3}y^3 - x^2 - 3x - 4y - 3$, ache os extremos locais e os pontos de sela.

Sol: $f_x = x^2 - 2x - 3$, $f_y = 4y^2 - 4$

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$$

$(3,1), (3,-1), (-1,1), (-1,-1)$.

As derivadas p. segundas de f são

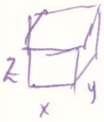
$f_{xx} = 2x - 2$, $f_{xy} = 0$, $f_{yy} = 8y$

Disc.

$$D = (2x-8)\,8y - 0^2 = 16y(x-1)$$

Ponto crítico	Valor disc.	valor de f_{xx}	Conclusão
$(3,1)$	$D(3,1) = 32 > 0$	$f_{xx}(3,1) = 4 > 0$	$f(3,1) = -\frac{44}{3}$ mínimo local
$(3,-1)$	$D(3,-1) = -32 < 0$	irrelev.	sela. $(3,-1,f(3,-1))$
$(-1,1)$	$D(-1,1) = -32 < 0$	"	$(-1,1,f(-1,1))$ sela.
$(-1,-1)$	$D(-1,-1) = 32 > 0$	$f_{xx}(-1,-1) = -4 < 0$	$f(-1,-1) = \frac{4}{3}$ máximo local.

Exemplo 6: Deve-se construir um depósito retangular sem tampa com volume $V = 12\,m^3$. O custo por metro quadrado do material a ser usado é de R\$ 400,00 p/ o fundo R\$ 300,00 para dois dos lados opostos, e R\$ 200 p/ os lados opostos restantes. Determine as dimensões do depósito que minimizem o custo.



Sol.: O custo C é dado por:

$$C = 400xy + 300(2xz) + 200(2yz)$$

em que x, y, z positivos. Como $V = xyz = 12$, seg. que $z = \frac{12}{xy}$. Substituindo na fórmula obtemos:

$$C = 400xy + \frac{7.200}{y} + \frac{4.800}{x}$$

Não há pontos fronteira pois $x > 0$, $y > 0$ $\forall (x,y)$. Logo não há extremo na fronteira. Para achar possíveis extremos locais fazemos:

$$C_x = 400y - \frac{4800}{x^2} = 0, \quad C_y = 400x - \frac{7200}{y^2} = 0.$$

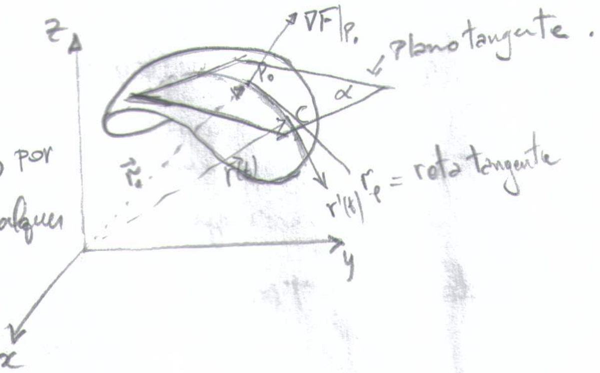
São equivalentes a

$$y = \frac{12}{x^2}, \quad xy^2 = 18$$

(6)

PLANOS TANGENTES E RETAS NORMAIS

Suponhamos que uma superfície S seja o gráfico de uma equação $F(x,y,z)=0$ e que F tenha derivadas parciais primeiras contínuas. Seja $P_0(x_0,y_0,z_0)$ um ponto de S no qual F_x, F_y e F_z não sejam simultaneamente nulas.



Uma reta tangente a S em P_0 é, por definição, uma reta r_e tangente a qualquer curva C de S que contenha P_0. Se C admite a parametrização

$$x=f(t),\ y=g(t),\ z=h(t),\quad t\in I$$

e $\vec{r}(t)$ é o vetor posição de $P(x,y,z)$ então

$$r(t)=f(t)\vec{i}+g(t)\vec{j}+h(t)\vec{k}$$

Logo, $r'(t)=f'(t)\vec{i}+g'(t)\vec{j}+h'(t)\vec{k}$

é um vetor tangente a C em $P(x,y,z)$. Para cada t, o ponto $(f(t),g(t),h(t))$ de C está também em S, assim:

$$F(f(t),g(t),h(t))=0.$$

Fazendo $w=F(x,y,z)$, com $x=f(t)$, $y=g(t)$, $z=h(t)$ e aplicando a regra da cadeia, como $w=0$, temos:

$$\frac{dw}{dt}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}=0$$

$$F_x(x,y,z)\,f'(t)+F_y(x,y,z)\,g'(t)+F_z(x,y,z)\,h'(t)=0$$

ou

$$\nabla F(x,y,z)\cdot\vec{r}'(t)=0$$

Em particular, $\nabla F|_{P_0}\cdot r'(t_0)=\nabla F(x_0,y_0,z_0)\cdot\vec{r}'(t_0)=0$

(5)

$\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$

Derivada Direcional: $D_u f(x,y,z) = \lim_{s \to 0} \dfrac{f(x+su_1, y+su_2, z+su_3) - f(x,y,z)}{s}$

Gradiente: $\nabla f(x,y,z) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\vec{i} + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\vec{j} + \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\vec{k}$.

Teo: $D_{\vec{u}} f(x,y,z) = \nabla f(x,y,z) \cdot \vec{u}$.

Teo. Grad: máximo é $\|\nabla f(x,y,z)\|$
taxa máxima ocorre na direção de $\nabla f(x,y,z)$.

Ex.: Suponhamos que a temperatura de um objeto num sistema seja dada por $T(x,y,z) = \dfrac{100}{x^2+y^2+z^2}$.

(a) Ache a taxa de variação de T em relação à distância no ponto $P(1,3,-2)$ na direção do vetor $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$.

(b) Em que direção, a partir de P, T aumenta mais rapidamente? Qual a taxa máxima de variação de T em P?

Sol.:
$\nabla T = \dfrac{\partial T}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial T}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial T}{\partial z}\vec{k}$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{-200x}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

obtem:
$$\nabla T = \frac{-200}{(x^2+y^2+z^2)^2}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$$

Logo: $\nabla T|_P = \dfrac{-200}{196}(\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k})$

$\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$. $\vec{u} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$.

$D_u T|_P = \nabla T \cdot \vec{u} = -\dfrac{200}{196}\dfrac{(1-3-2)}{\sqrt{3}} = \dfrac{200}{49\sqrt{3}}$.

(b) O máximo ocorre na direção de ∇T em P, ou seja $= \dfrac{200}{196}(-\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k})$

$\|\nabla T\| = \dfrac{200}{196}\sqrt{1+9+4} = \dfrac{200}{196}\sqrt{14}$.

Como $r'(t_0)$ é um vetor tangente a C em P_0, isto implica que $\nabla F|_{P_0}$ é ortogonal a toda reta tangente r_t a S em P_0.

O plano que passa por P_0 com vetor normal $\nabla F|_{P_0}$ é o plano tangente a S em P_0.

A equação do plano tangente ao gráfico de $F(x,y,z)=0$ no ponto $P_0(x_0,y_0,z_0)$ será:

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0.$$

$1+2^2+3^2$

Ex.: Ache a eq. do plano tangente ao elipsóide $x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=3$ no ponto $P_0(1,2,3)$.

Sol.:

$$F(x,y,z)=x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}-3=0$$

$\left(\frac{4}{3}\ \frac{3}{4}\right)$ $\frac{4.4.3}{3}$

$F_x(x,y,z)=2x$ $\qquad F_x(1,2,3)=2$

$F_y(x,y,z)=\frac{y}{2}$ $\qquad F_y(1,2,3)=1$

$F_z(x,y,z)=\frac{2}{9}z$ $\qquad F_z(1,2,3)=2/3$

Assim:

$$2(x-1)+(y-2)+\frac{2}{3}(z-3)=0.$$

Teo: A eq. do plano tangente ao gráfico de $z=f(x,y)$ no ponto (x_0,y_0,z_0) é

$$z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$

Sol.:

$$F(x,y,z)=z-f(x,y)=0.$$

(8)

A reta perpendicular ao plano tangente num ponto $P_0(x_0,y_0,z_0)$ de uma superfície S é a reta normal a S em P_0. Se S é o gráfico de $F(x,y,z)=0$, então a normal é paralela ao vetor $\nabla F(x_0,y_0,z_0)$.

Exemplo 2: Ache a eq. da normal ao elipsóide $\frac{3}{4}x^2+3y^2+z^2=12$ no ponto $P_0(2,1,\sqrt{6})$.

Superfície de nível em P_0:
$S: F(x,y,z)=F(x_0,y_0,z_0)$
$\nabla F|_{P_0}$ é normal a S
plano tang:
$(z-z_0)F_z(x_0,y_0,z_0)+(y-y_0)F_y(x_0,y_0,z_0)$
$+(x-x_0)F_x(x_0,y_0,z_0)=0$.

Sol.: $F(x,y,z)=\frac{3}{4}x^2+3y^2+z^2-12=0$

$\nabla F=\frac{3}{2}x\vec{i}+6y\vec{j}+2z\vec{k}$

$\nabla F(2,1,\sqrt{6})=3\vec{i}+6\vec{j}+2\sqrt{6}\,\vec{k}$

Eq. Paramétricas da reta normal:

$$r_N:\begin{cases}x=2+3t\\ y=1+6t\\ z=\sqrt{6}+2\sqrt{6}\,t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}$$

Ex. 3: Seja P_0 o ponto $(3,-4,2)$ do hiperbolóide $16x^2-9y^2+36z^2=144$. Determine as equações do plano tangente e da normal ao hiperbolóide em P_0.

Sol.: Fazendo: $F(x,y,z)=16x^2-9y^2+36z^2-144$ obtemos

$\nabla F=32x\vec{i}-18y\vec{j}+72z\vec{k}$

Vetor normal em P_0 é:

$\nabla F(3,-4,2)=96\vec{i}+72\vec{j}+144\vec{k}$

Qualquer múltiplo escalar de $\nabla F|_{P_0}$ é também um vetor normal.

Em particular:

$\nabla F|_{P_0}=24(4\vec{i}+3\vec{j}+6\vec{k})$

Podemos tomar o vetor normal como sendo $\vec{n}=4\vec{i}+3\vec{j}+6\vec{k}$.

Assim a eq. do plano tangente é:

$4(x-3)+3(y+4)+6(z-2)=0$

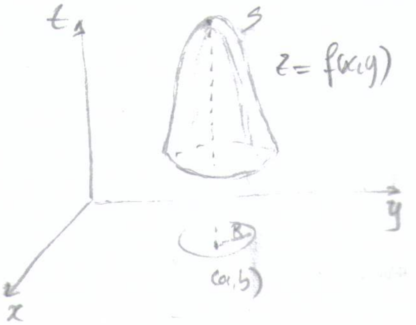
ou $4x+3y+6z=12$.

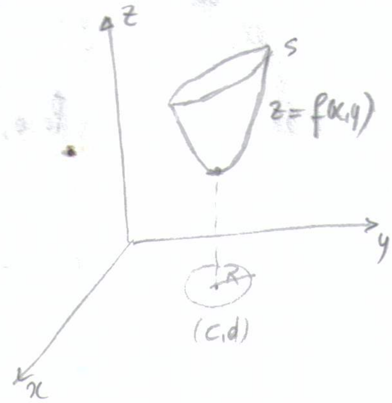
Reta normal:

$$R_N:\begin{cases}x=3+4t\\ y=-4+3t\\ z=2+6t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}$$

Extremos de funções de várias variáveis

Uma função $f(x,y)$ tem um máximo local em (a,b) se existe um disco aberto $B_R(a,b)$ contendo (a,b) tal que $f(x,y) \leq f(a,b)$ para todo $(x,y) \in B_R(a,b)$. Analogamente, a função f tem um mínimo local em (c,d) se existe um disco aberto $B_R(c,d)$ tal que $f(x,y) \geq f(c,d)$ para todo $(x,y) \in B_R(c,d)$.





Os máximos e mínimos locais são os extremos locais de f. Um ponto (a,b) é pto de máximo (global) de f se $f(a,b) \geq f(x,y)$ para todo $(x,y) \in D_f$ e um ponto (c,d) é ponto de mínimo (global) de f se $f(c,d) \leq f(x,y)$, para todo $(x,y) \in D_f$.

Definição: Seja f uma função de duas variáveis. Um ponto (a,b) é ponto crítico de f se

(i) $f_x(a,b) = 0$ e $f_y(a,b) = 0$, ou

(ii) $f_x(a,b)$ ou $f_y(a,b)$ não existe.

Teo: Se f é contínua numa região R fechada e limitada, então f tem um máximo $f(a,b)$ e um mínimo $f(c,d)$, isto é,

$$f(c,d) \leq f(x,y) \leq f(a,b) \quad \forall (x,y) \in R.$$

Um máximo ou mínimo de uma função pode ocorrer em um ponto-fronteira de seu domínio.

Exemplo 1: Seja $f(x,y) = 1 + x^2 + y^2$, com $x^2+y^2 \leq 4$. Ache os extremos de f.

Sol.: A restrição $x^2+y^2 \leq 4$ corresponde ao disco fechado R de raio 2 e centro 0. Pontos críticos:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

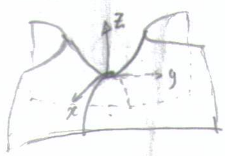
então devemos ter $x = y = 0$; logo, $f(0,0) = 1$ é o único extremo local possível. Além disso,

$$f(x,y) = 1 + x^2 + y^2 \geq 1 = f(0,0) \quad \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0).$$

f tem um mínimo local em $(0,0)$. Este mínimo também é o mínimo global de f.

Na fronteira, temos que, por exemplo, $f(0,2) = 5$ é o valor máximo.

Exemplo 2: Se $f(x,y) = x^2 - y^2$ e o domínio de f é $\mathbb{R}^2$, ache os extremos de f.



Parabolóide hiperbólico

Sol.:
$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases}$$

Logo, $(0,0)$ é pto crítico de f. Mas, se $x \neq 0$, temos que $f(x,0) = x^2 > 0$ e se $y \neq 0$, temos que $f(0,y) = -y^2 < 0$. Assim qualquer disco centrado na origem deve conter pontos onde $f(x,y) \geq 0$ e pontos onde $f(x,y) \leq 0$.

Portanto, f não tem máximo, nem mínimo.

Definição: Seja f uma função de duas variáveis dotada de derivadas parciais segundas contínuas. O discriminante (Hessiano (Matriz Hessiana)) H de f é

$$H(x,y) = f_{xx}(x,y)\, f_{yy}(x,y) - [f_{xy}(x,y)]^2.$$

$$\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f_x & \frac{\partial}{\partial y} f_x \\ \frac{\partial}{\partial x} f_y & \frac{\partial}{\partial y} f_y \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2$$

(3)

Teste para extremos Locais: Seja f uma função de duas variáveis dotada de derivadas parciais segundas contínuas em todo o disco aberto $B_R(a,b)$.

Se $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ e $D(a,b) > 0$ então $f(a,b)$ é

(i) máximo local de f se $f_{xx}(a,b) < 0$; $(f_{yy}(a,b) < 0)$

(ii) mínimo local de f se $f_{xx}(a,b) > 0$. $(f_{yy}(a,b) > 0)$

Um ponto $P(a,b,f(a,b))$ do gráfico de f é ponto de sela se $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ e se existe um disco $B_R(a,b)$ tal que $f(x,y) > f(a,b)$ para alguns pontos (x,y) de $B_R(a,b)$ e $f(x,y) < f(a,b)$ para alguns pontos $(x,y) \in B_R(a,b)$.

Teorema: Seja f dotada de derivadas parciais segundas contínuas em todo um disco aberto $B_R(a,b)$. Se $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ e $D(a,b) < 0$, então o ponto $P(a,b,f(a,b))$ é ponto de sela do gráfico de f.

Exemplo 3: Se $f(x,y) = x^2 - 4xy + y^3 + 4y$, ache os extremos locais e os pontos de sela de f.

Sol.: As derivadas parciais primeiras de f

$$f_x(x,y) = 2x - 4y \quad , \quad f_y(x,y) = -4x + 3y^2 + 4$$

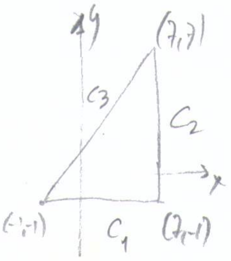
$$\begin{cases} 2x - 4y = 0 \\ -4x + 3y^2 + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow (4,2) \text{ e } \left(\tfrac{4}{3}, \tfrac{2}{3}\right) \text{ ptos críticos de } f.$$

$$f_{xx} = 2, \quad f_{yy} = 6y, \quad f_{xy} = -4$$

Logo, $D(x,y) = 2(6y) - 16 = 12y - 16$

Ponto crítico	Discrim.	valor de f_{xx}	Conclusão
$(4,2)$	$D(4,2) = 8 > 0$	$f_{xx}(4,2) = 2 > 0$	$f(4,2) = 0$ é mínimo local.
$\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$	$D\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right) = -8 < 0$	irrelevante	$\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, f\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)\right)$ é ponto de sela.

Ex. 4: Se $f(x,y) = x^2 - 4xy + y^3 + 4y$. Ache os extremos de f na região triangular R de vértices $(-1,-1)$, $(7,-1)$, $(7,7)$.



Sol.: $\partial R = C_1 \cup C_2 \cup C_3$.

Em C_1: $y = -1$

$f(x,-1) = x^2 + 4x - 5 \quad (-1 \leq x \leq 7)$

$f(-1,-1) = -8$, $f(7,-1) = 72$.

Em C_2: $x = 7$

$f(7,y) = y^3 - 24y + 49$, $-1 \leq y \leq 7$.

$f'(7,y) = 3y^2 - 24 = 0 \Rightarrow y = 2\sqrt{2}$ $\quad f''(7,y) = 6y$, $f''(7, 2\sqrt{2}) = 12\sqrt{2} > 0$.

↳ pto mínimo local.

$f(7, 2\sqrt{2}) = 49 - 32\sqrt{2} \approx 3{,}7$ mínimo local de f em C_2.

$f(7,-1) = 72$, $f(7,7) = 224$.

$48 - 36 = 12$

Em C_3: $y = x$.

$12 \cdot 4 = 48$

$f(x,x) = x^3 - 3x^2 + 4x$ $\quad f'(x) = 3x^2 - 6x + 4 = 0$ $\quad x = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 4\cdot 3\cdot 4}}{2\cdot 3} = \dfrac{6 \pm \sqrt{36-48}}{6}$ (<0) ñ raíz real.

$f(-1,-1) = \underline{-8}$, $f(7,7) = \underline{224}$. $\quad$ valor máximo 224, valor mínimo -8.

Ex.: $f(x,y) = xy - x^2 - y^2 - 2x - 2y + 4$ $\quad x = y = -2$.

Ex.: $f(x,y) = 2 + 2x + 2y - x^2 - y^2$

Triang.: $x = 0$, $y = 0$, $y = 9 - x$. $f(1,1) = 4$

MULTIPLICADORES DE LAGRANGE Em muitas aplicações devemos achar os extremos de uma função f de várias variáveis, sujeitos a algum vínculo. Ex.: Encontrar o volume da maior caixa retangular de faces paralelas aos planos coord. que possa ser inscrita no elipsoide $16x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 144$. $V = 8xyz$, $V = \frac{32}{3}xy\sqrt{144 - 16x^2 - 4y^2}$.

Teorema: Sejam f e g funções de duas variáveis dotadas de derivadas parciais primeiras contínuas, e suponhamos $\nabla g \neq 0$ numa região do plano-xy. Se f tem um extremo $f(x_0,y_0)$ sujeito ao vínculo $g(x,y) = 0$, então existe um nº real λ tal que

$$\nabla f(x_0,y_0) = \lambda \nabla g(x_0,y_0).$$

Dem.: O gráfico de $g(x,y) = 0$ é uma curva C no plano-xy. Suponha que C admite as parametrizações: $x = h(t)$, $y = k(t)$ $\quad t \in I$

Seja: $\quad \vec{r}(t) = x\vec{i} + y\vec{j} = h(t)\vec{i} + k(t)\vec{j}$

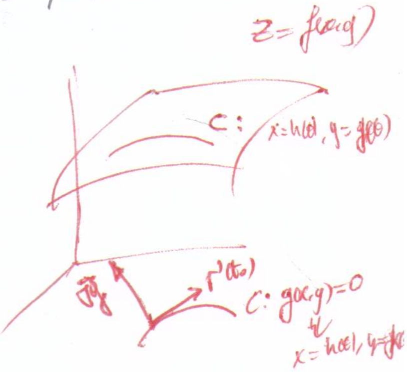
Suponha que f tem um extremo em $P_0(x_0,y_0)$ tal que $\vec{r}(t_0) = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} = h(t_0)\vec{i} + k(t_0)\vec{j}$.

(5)

Definindo uma função F de uma variável por

$$F(t) = f(h(t), k(t))$$

qdo t varia obtemos valores de $f(x,y)$ com (x,y) em C, isto é, $f(x,y)$ está sujeito ao vínculo $g(x,y)=0$. Como $f(x_0,y_0)$ é um extremo de f sob estas condições, segue-se que $F(t_0) = f(h(t_0), k(t_0))$ é um extremo de $F(t)$. Assim, $F'(t_0)=0$. F como função composta pode ser derivada de modo que



$$F'(t) = f_x(x,y)\frac{dx}{dt} + f_y(x,y)\frac{dy}{dt}$$
$$= f_x(x,y)\,h'(t) + f_y(x,y)\,k'(t).$$

Fazendo $t=t_0$

$$0 = F'(t_0) = f_x(x_0,y_0)\,h'(t_0) + f_y(x_0,y_0)\,k'(t_0) = \nabla f(x_0,y_0)\cdot \vec{r}\,'(t_0)$$

Isto mostra que o vetor $\nabla f(x_0,y_0)$ é ortogonal ao vetor $\vec{r}\,'(t_0)$ tangente a C. Mas $\nabla g(x_0,y_0)$ é também ortogonal a $\vec{r}\,'(t_0)$, pois C é uma curva de nível para g. Como $\nabla f(x_0,y_0)$ e $\nabla g(x_0,y_0)$ são ortogonais ao mesmo vetor, então eles são paralelos, isto é,

$\nabla f(x_0,y_0) = \lambda \nabla g(x_0,y_0)$ para algum λ.

O nº λ é o <u>multiplicador</u> de <u>Lagrange</u>.

<u>Corolário:</u> Os pontos em que uma função f de duas variáveis tem extremos sujeitos ao vínculo $g(x,y)=0$ estão incluídos entre os pontos (x,y), determinados pelas duas primeiras coordenadas de (x,y,λ) do sistema de equações

$$\begin{cases} f_x(x,y) = \lambda g_x(x,y) \\ f_y(x,y) = \lambda g_y(x,y) \\ g(x,y) = 0. \end{cases}$$

Exemplo 1: Ache os extremos de $f(x,y)=xy$, se (x,y) está restrito à elipse $4x^2+y^2=4$.

Solução: Neste exemplo o vínculo é $g(x,y)=4x^2+y^2-4=0$.

Fazendo $\nabla f(x,y)=\lambda\nabla g(x,y)$ obtemos

$$y\vec{i}+x\vec{j}=\lambda(8x\vec{i}+2y\vec{j})$$

Assim o sistema é

$$\begin{cases} y=\lambda 8x \\ x=\lambda 2y \\ 4x^2+y^2-4=0 \end{cases}$$

Fazendo $y=8\lambda x$ em $x=2\lambda y$, obtemos:

$$x=2\lambda(8\lambda x)=16\lambda^2 x$$

ou

$$(1-16\lambda^2)x=0$$

Portanto, ou $x=0$ ou $\lambda=\pm\frac{1}{4}$.

Se $\lambda=\pm\frac{1}{4}$ então

$$y=8x\lambda=8x(\pm\tfrac{1}{4})=\pm 2x$$

Levando este valor em $4x^2+y^2-4=0$, obtemos.

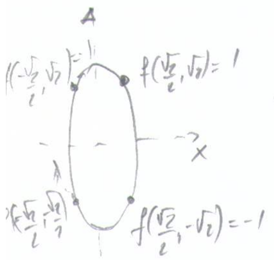
$$4x^2+(\pm 2x)^2-4=0 \Rightarrow 4x^2+4x^2-4=0 \Rightarrow 8x^2=4$$

ou $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Os valores correspondentes de y são

$$y=\pm 2x=\pm 2\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\pm\sqrt{2}$$

Pontos $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\pm\sqrt{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\pm\sqrt{2}\right)$



(x,y)	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\sqrt{2}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}\right)$,	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\sqrt{2}\right)$
$f(x,y)$	1	-1	-1	1

Assim $f(x,y)$ toma valor máximo 1 em $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}\right)$ ou $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\sqrt{2}\right)$ e valor mínimo -1 em $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\sqrt{2}\right)$ ou $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},+\sqrt{2}\right)$.