8. Aplicações da Integral

8.1 Áreas Planas

Suponha que uma certa região D do plano xy seja delimitada pelo eixo x, pelas retas $x = a$ e $x = b$ e pelo gráfico de uma função contínua e não negativa $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, como mostra a figura 8.1a. A área da região D é denotada por $A(D)$ e calculada com auxílio da fórmula:

$$A(D) = \int_a^b f(x)dx.$$

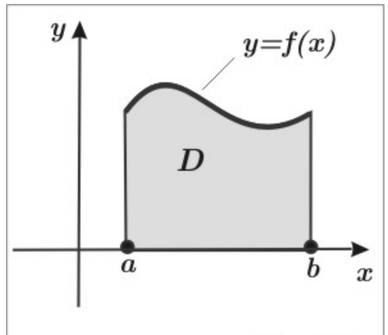


Fig. 8.1a

8.1A Calcule a área de um círculo de raio R e da elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. (resp. πR^2 e πab)

8.1B Calcule a área da região delimitada pelo eixo x, pelas retas $x = \pm B$, $B > 0$, e pelo gráfico da função $y = x^2 \exp\left(-\left|x^3\right|\right)$. Esta área tem um limite com $B \to \infty$? (resp. $\frac{2}{3} + \frac{2}{3}e^{-B^3}$; área limite 2/3)

8.1C Considere $B > 2$ e calcule a área sob a curva $y = \left[x(\ln x)^2\right]^{-1}$, entre as retas $x = 2$ e $x = B$. Esta área tem um limite com $B \to \infty$? (resp. $1/\ln 2 - 1/\ln B$); área limite $1/\ln 2$)

8.2 Comprimento de Curvas

Forma Cartesiana. Considere uma curva γ no plano xy, que é representada pelo gráfico de uma função $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, contínua com derivada primeira também contínua no intervalo $[a, b]$ (uma tal função é dita ser de *classe* C^1). O comprimento $L(\gamma)$ da curva γ é calculado pela integral:

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}dx$$

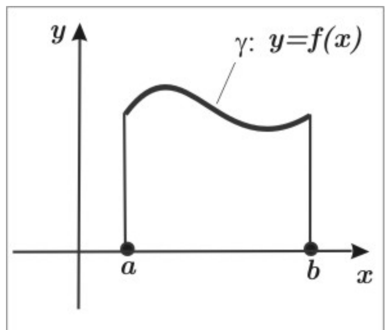


Fig. 8.1b

8.2A Calcule o comprimento de uma circunferência de raio R. (resp. $2\pi R$)

8.2B As curvas abaixo são dadas na forma cartesiana. Em cada caso calcule o comprimento do arco indicado (respostas na página 72)

(a) $y = x^2 + 2x - 1,\ 0 \le x \le 1$ (b) $y = e^x,\ 0 \le x \le 1$

(c) $y = 1 - \ln(\operatorname{sen} x),\ \frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{4}$ (d) $y = \dfrac{x^3}{12} + \dfrac{1}{x},\ 1 \le x \le 2$

(e) $y = \frac{2}{3}\left(1 + x^2\right)^{3/2},\ 0 \le x \le 3$ (f) $x = \dfrac{y^3}{2} + \dfrac{1}{6y},\ 1 \le y \le 3$

(g) $y = \sqrt{x}\,(1 - x/3),\ 0 \le x \le 3$ (h) $8x^2 = 27y^3,\ 1 \le x \le 8$

(i) $y = x^{3/2},\ 1 \le x \le 3$ (j) $y + \dfrac{1}{4x} + \dfrac{x^3}{3} = 0,\ 2 \le x \le 3$

(k) $(y+1)^2 = (x-4)^3,\ 5 \le x \le 8$ (l) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{2} - \dfrac{2}{3}x^{3/2},\ 0 \le x \le 1$

Aplicação: *Fabricando Folhas Metálicas*

Uma fábrica produz, a partir de folhas planas, folhas metálicas onduladas como as mostradas na Figura 8.2 abaixo.

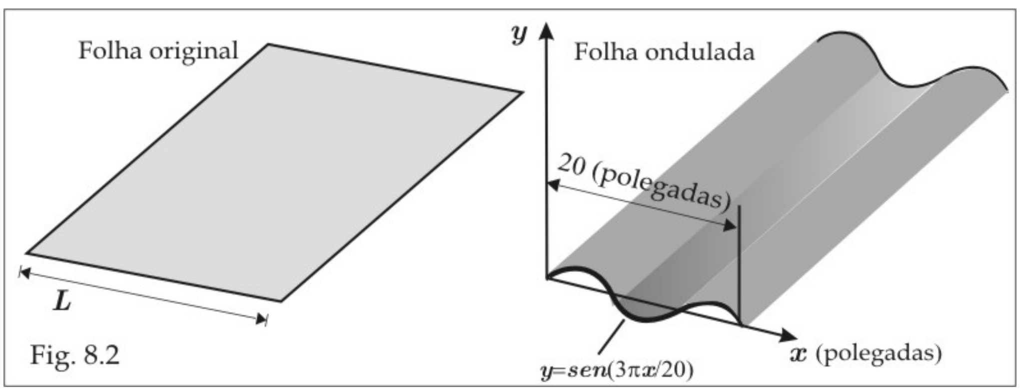


Fig. 8.2

As seções transversais dessas folhas têm o formato da curva

$$y = \operatorname{sen}(3\pi x/20),\ 0 \le x \le 20 \text{ polegadas}$$

e as folhas devem ser moduladas por um processo que não estique o material. Qual deve ser a largura L da folha original? De acordo com a fórmula do comprimento, deduzimos que a largura da folha é:

$$L = \int_0^{20} \sqrt{1 + a^2 \cos^2 ax}\,dx, \quad \text{sendo } a = 3\pi/20.$$

O valor numérico dessa integral será determinado usando a aproximação: $\sqrt{1+\theta} \simeq 1 + \frac{1}{2}\theta$, com

$\theta = a^2 \cos^2 ax$. Temos, portanto:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{20} \sqrt{1 + a^2 \cos^2 ax} dx \simeq \int_0^{20} \left(1 + \frac{1}{2}a^2 \cos^2 ax\right) dx = \\ &= 20 + \frac{1}{2}a^2 \int_0^{20} \cos^2 ax dx = 20 + \frac{1}{4}a^2 \left[x + \frac{\operatorname{sen} 2ax}{2}\right]_{x=0}^{x=20} \simeq 21.09 \text{ polegadas.} \end{aligned}$$

Um valor mais preciso poderia ser obtido com a aproximação: $\sqrt{1+\theta} \simeq 1 + \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\theta^2$.

Forma Paramétrica. Nesse caso a curva c é descrita por um par de equações: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \le t \le b$, onde as funções $x(t)$ e $y(t)$ são de classe C^1 no intervalo $[a, b]$.). O comprimento $L(\gamma)$ da curva γ é calculado agora pela integral:

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt.$$

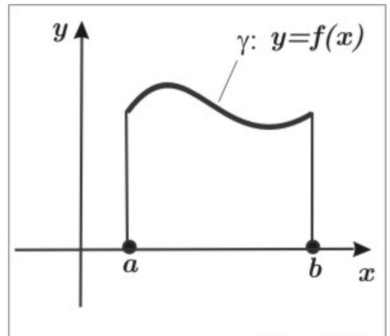


Fig. 8.1b

8.2C. Considere uma circunferência de raio R na forma parametrizada e calcule seu comprimento utilizando a fórmula acima. (resp. $2\pi R$)

8.2D Parametrizando a Elipse. Observando a figura ao lado, nota-se que as coordenadas do ponto $P(x, y)$ da elipse são: $x = OC$ e $y = DB$. Se t representa o ângulo entre o eixo x e o eixo OA, obtenha a seguinte parametrização para a elipse do Exercício 8.1A:

$$x = a\cos(t), \quad y = b\mathrm{sen}(t), \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

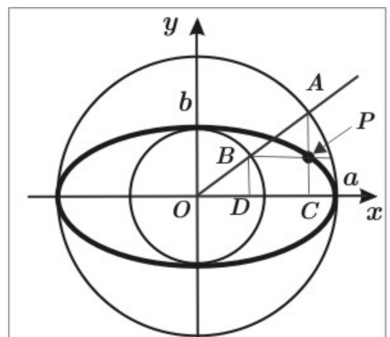


Fig. 8.3

B8. Parametrizando a Hipérbole. Observando a Figura 8.4, deduza que a hipérbole $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ pode ser parametrizada da seguinte forma:

$$x = a\sec(t), \quad y = b\mathrm{tg}(t), \; 0 \le t \le 2\pi,$$

onde t representa o ângulo entre o eixo x e o eixo OC.

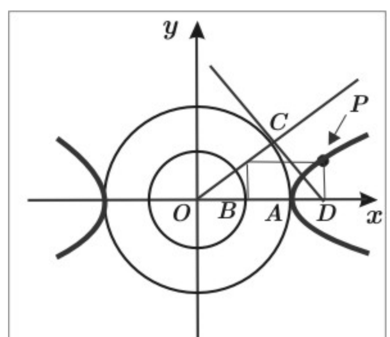


Fig. 8.4

8.2F Calcule o comprimento da *hipociclóide* de equação $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$. (resp. $6a$)

8.2G Calcule a distância percorrida por uma partícula entre os instantes $t = 0$ e $t = 4$, se sua posição $P(x, y)$ no instante t vem dada por: $x = \frac{1}{2}t^2$ e $y = \frac{1}{3}(2t+1)^{3/2}$. (resp.12)

8.2H Em cada caso abaixo, calcule o comprimento do arco indicado:

(a) $\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2, \ -1 \leq t \leq 3 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \operatorname{sen} t, \ 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x = 2(1 - \operatorname{sen} t) \\ y = 2(1 - \cos t), \ 0 \leq t \leq \pi \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x = t \cos t \\ y = t \operatorname{sen} t, \ 0 \leq t \leq \pi/4 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \operatorname{sen}^2 t, \ 0 \leq t \leq \pi \end{cases}$ (a) $\begin{cases} x = \frac{1}{2}t^2 + t \\ y = \frac{1}{2}t^2 - t, \ 0 \leq t \leq 1. \end{cases}$

8.2I Considere a curva γ na forma paramétrica descrita por: $x = t^3 - 3t, \ y = t^3 - 5t - 1, \ t \in \mathbb{R}$. Determine a reta tangente à curva γ no ponto correspondente a $t = 2$. Em que pontos a reta tangente é: (a) vertical e (b) horizontal? (resp. $9y - 7x + 41 = 0$; a reta tangente será vertical nos pontos correspondentes a $t = \pm 1$ e horizontal nos pontos correspondebtes a $t = \pm\sqrt{5/3}$)

8.3 Coordenadas Polares

8.3A Localize no plano cartesiano os seguintes pontos dados em coordenadas polares e, em seguida, determine suas coordenadas cartesianas:

(a) $(2, \pi/4)$ (b) $(2, 3\pi/2)$ (c) $(3, \pi/6)$ (d) $(1, -\pi/4)$

(e) $(2, 5\pi/6)$ (f) $(-1, -\pi/4)$ (g) $(-2, 7\pi/6)$ (f) $(-3, 13\pi/6)$

8.3B Determine as coodenadas polares dos pontos cujas coordenadas cartesianas são:

(a) $(1/2, 1/2)$ (b) $(\pi/2, \pi/2)$ (c) $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ (d) $(3, 3\sqrt{3})$

(e) $(-1, -1)$ (f) $(1, \sqrt{3})$ (g) $(-\sqrt{7}, 3)$ (h) $(0, -4)$

8.3C Passe para a forma polar $r = f(\theta)$ as curvas abaixo:

(a) $xy = 2$ (b) $x^2 + y^2 - 3y = 0$ (c) $3x^2 + 5y^2 = 15$

(d) $x + 1 = 0$ (e) $x^2 - y^2 = 1$ (f) $y^2 - 4x = 0$.

8.3D Passe para forma cartesiana $F(x, y) = 0$ e esboce o gráfico de cada curva abaixo:

(a) $r = 2 + \operatorname{sen} 2\theta$ (b) $r = \operatorname{sen} 2\theta$ (c) $r = \dfrac{4}{1+\cos\theta}$ (d) $r = a\cos\theta$ (e) $r = 5$

(f) $r = 5 + 2\cos\theta$ (g) $r = 3\sec\theta$ (h) $r = 1 + \sqrt{2}\cos\theta$ (i) $r = 2\tan\theta$ (j) $r = \theta$

(k) $r^2 = \frac{2}{3}a^2\cos\theta$ (l) $r = 1/\theta$ (m) $r = \dfrac{4}{1-\cos\theta}$ (n) $r = 2\operatorname{sen}\theta$ (o) $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

8.3E Sejam (r,θ) e (ρ,φ) as coordenadas polares dos pontos P e Q, respectivamente. Use a Lei dos co-senos e deduza que a distância entre P e Q pode ser calculada por:

$$\operatorname{dist}(P,Q) = \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos(\theta-\varphi)}.$$

Use esse resultado e deduza que em coordenadas polares (r,θ) a equação de um círculo de raio R e centro no ponto (ρ,φ) é $r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos(\theta-\varphi) = R^2$.

8.3F Considere a curva de equação polar $r = \operatorname{sen}\theta + \cos\theta,\ -\pi/4 \le \theta \le 3\pi/4$. De duas maneiras identifique a curva como um arco de circunferência: primeiro passe a equação para coordenadas cartesianas; depois use o exercício precedente.

8.3G Deduza que as equações $\theta = \theta_0$, $r\cos\theta = \pm a$ e $r\operatorname{sen}\theta = \pm b$ representam retas e faça um esboço do gráfico em cada caso. De forma geral, se $N(\rho,\varphi)$ é o pé da perpendicular traçada do pólo a uma reta que não passa pelo pólo, então a equação dessa reta é:

$$r\cos(\theta-\varphi) = \rho \quad \text{ou} \quad r = \rho/(A\cos\theta + B\operatorname{sen}\theta), \qquad \text{sendo } A = \cos\varphi \text{ e } b = \operatorname{sen}\varphi.$$

8.3H Determine, se existir, a interseção entre os seguintes pares de curvas:

(a) $r = 2$ e $r = 4\cos\theta$ (b) $r = 1 + \cos\theta$ e $r = 1/3(1-\cos\theta)$

(c) $r^2 = 4\operatorname{sen} 2\theta$ e $r = 2\sqrt{2}\cos\theta$ (d) $\theta = \pi/4$ e $r = 2\cos\theta$

8.4 Comprimento e Área (forma polar)

As curvas em coordenadas polares aqui consideradas são descritas por uma equação do tipo $r = f(\theta)$, sendo a função f e sua derivada primeira contínuas e o angulo θ varia no intervalo $[\theta_1, \theta_2]$, como sugere a Figura 8.5 abaixo. Representa-se por L o comprimento do arco entre θ_1 e θ_2 e por $A(D)$ a área da região D correspondente. O comprimento L e a área $A(D)$ são calculados, respectivamente, pelas fórmulas: $L = \displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{f(\theta)^2 + f'(\theta)^2}\,d\theta$ e $A(D) = \displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_2} \tfrac{1}{2} f(\theta)^2\,d\theta$

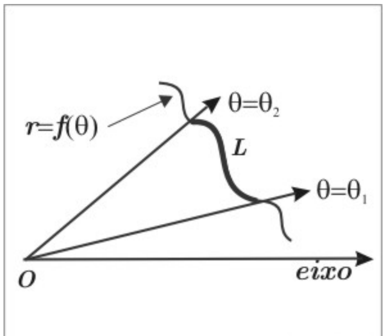


Fig. 8.5

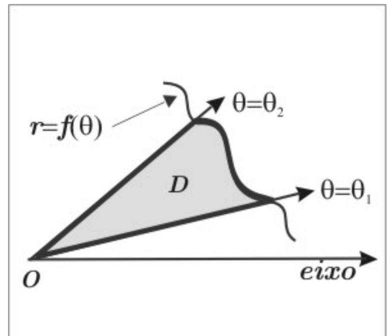


Fig. 8.6

8.4A Calcule o comprimento das seguintes curvas dadas na forma polar:

(a) $r = 3\cos\theta,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ (b) $r = 2\sec\theta,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{3}$ (c) $r = 1 - \cos\theta,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

(d) $r = \theta/3,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ (e) $r = |\operatorname{sen}\theta|\,,\ 0 \le \theta \le 2\pi$ (f) $r = 3\cos^2(\frac{\theta}{2}),\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

(g) $r = a\theta^2,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ (h) $r = a\operatorname{sen}^3(\frac{\theta}{3}),\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ (i) $r = \operatorname{sen}\theta + \cos\theta,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

8.4B Calcule a área da região interior a cada curva dada abaixo:

(a) $r^2 = a^2\cos 2\theta$ (b) $r = a\,(2 - \cos\theta)$ (c) $r = 2a\operatorname{sen}\theta$

(d) $r = a\,(1 + \cos 2\theta)$ (e) $r^2 = 1 - \cos\theta$ (f) $r^2 = 2a^2\cos^2(\theta/2)$

8.4C Em cada caso, esboce a região e calcule sua área.

(a) região interior ao círculo $r = a$ e exterior à *cardióide* $r = a\,(1 - \cos\theta)$. (resp. $A = a^2\,(2 - \pi/4)$);

(b) região delimitada pelas curvas $r = 2,\ \theta = \pi/4$ e $\theta = \pi/2$. (resp. $A = \pi/2$);

(c) região interior à cardióide $r = a\,(1 + \operatorname{sen}\theta)$ e exterior ao círculo $r = a\operatorname{sen}\theta$. (resp. $A = 5\pi a^2/4$);

(d) região comum aos círculos $r = 2a\cos\theta$ e $r = 2a\operatorname{sen}\theta$. (resp. $A = a^2\,(1 + \pi/2)$;

(e) região interior à leminiscata $r^2 = 2a^2\cos 2\theta$ e exterior ao círculo $r = a$. (resp. $A = \frac{a^2}{3}(3\sqrt{3} - \pi)$;

(f) região interior ao círculo $r = 3a\cos\theta$ e exterior à cardióide $r = a\,(1 + \cos\theta)$. (resp. $A = \pi a^2$);

(g) região delimitada pela rosácea de 4 pétalas $r = a\,|\operatorname{sen} 2\theta|$ da Fig. 8.7b;

(h) região interior ao círculo $r = \cos\theta$ e exterior à cardióide $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$. (resp. $A = 1 + \pi/4$);

(i) região interior ao círculo $r = \operatorname{sen}\theta$ e exterior à cardióide $r = 1 - \cos\theta$. (resp. $A = 1 + \pi/4$).

Algumas Curvas Especiais

As curvas em coordenadas polares que aparecem com mais freqüência são apresentadas abaixo, com as respectivas equações. Acompanhe a figura com os valores de $\theta : 0,\ \pi/6,\ \pi/3,\ \pi,\ 3\pi/2,\ $ e 2π.

Leminiscata: $r^2 = a^2 \cos 2\theta$

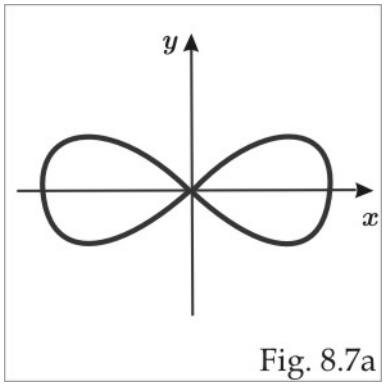


Fig. 8.7a

Rosácea de 4 pétalas: $r = a\,|\text{sen}\,2\theta|$

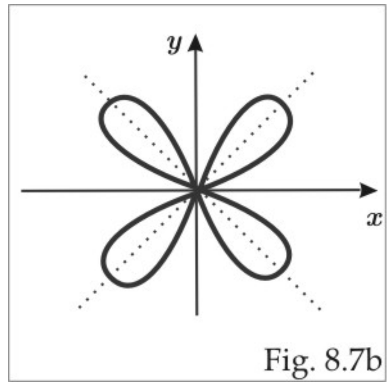


Fig. 8.7b

Hipociclóide: $x = a\cos^3 t;\ y = a\,\text{sen}^3\,t$

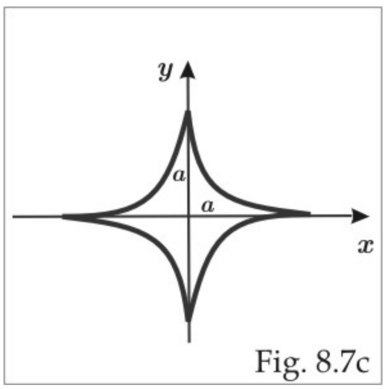


Fig. 8.7c

Espiral de Arquimedes: $r = a\theta$

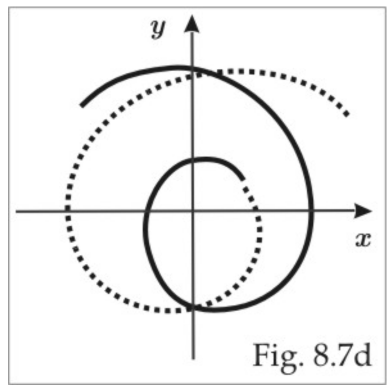


Fig. 8.7d

Limaçon: $r = a + b\,\text{sen}\,\theta,\ a < b$

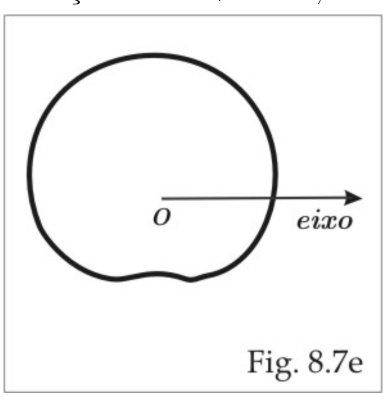


Fig. 8.7e

Limaçon: $r = a + b\,\text{sen}\,\theta,\ b < a$

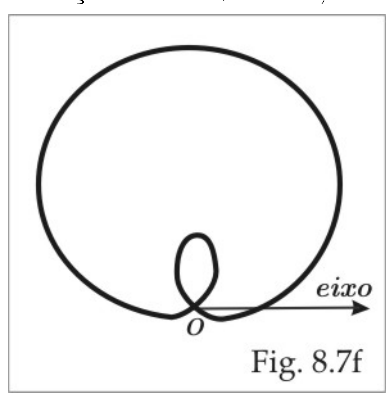
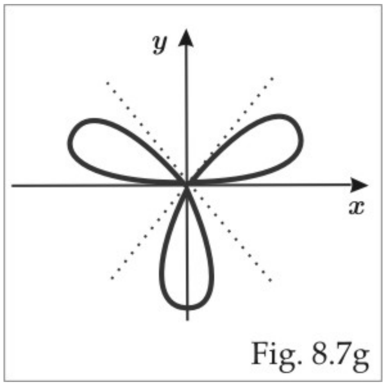
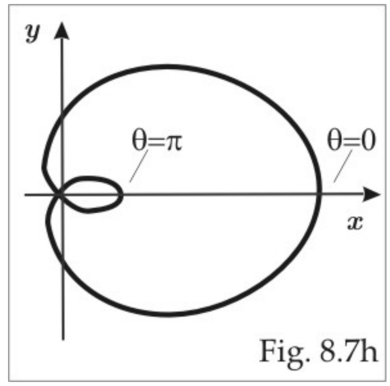


Fig. 8.7f

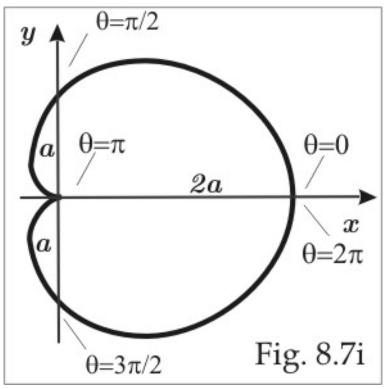
Rosácea de 3 pétalas: $r = 2\,\mathrm{sen}\,3\theta$



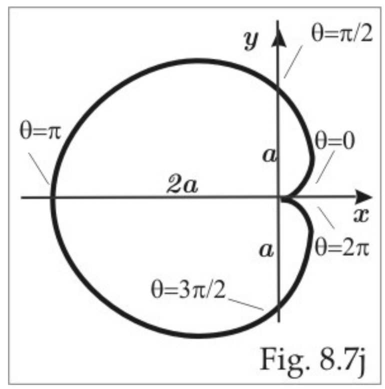
Limaçon: $r = 1 + 2\cos\theta$



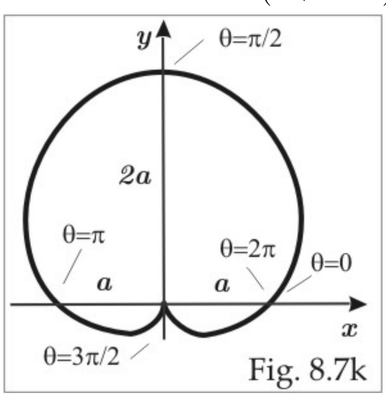
Cardióide I: $r = a\,(1 + \cos\theta)$



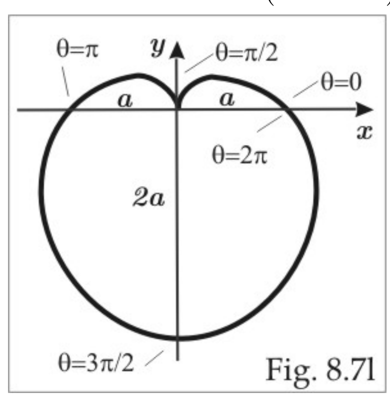
Cardióide II: $r = a\,(1 - \cos\theta)$



Cardióide III: $r = a\,(1 + \mathrm{sen}\,\theta)$



Cardióide IV: $r = a\,(1 - \mathrm{sen}\,\theta)$



8.5 Sólidos de Revolução

Equação de uma superfície de revolução: Consideremos uma curva γ no plano xy descrita pela relação $F\,(x, y) = 0$, aqui denominada *geratriz*, e denotemos por S a superfície obtida pela rotação da curva γ em torno do eixo x. É claro que cada ponto da curva γ irá descrever uma circunferência de centro no ponto $C(x,0,0)$ e a superfície S é caracterizada por $\left\|\overrightarrow{CP}\right\| = \left\|\overrightarrow{CQ}\right\|$, onde P é um ponto genérico da superfície S e Q é o ponto de interseção da curva γ com o plano que passa por P, perpendicularmente ao eixo x (eixo de rotação). A equação cartesiana de S é, portanto:

$$\boxed{F(x, \pm\sqrt{y^2+z^2}) = 0}$$

No caso em que a curva é descrita pela equação $y = f(x)$ a equação cartesiana assume a forma

$$\boxed{y^2 + z^2 = [f(x)]^2}$$

8.5A Identifique a geratriz e o eixo de rotação da superfície de revolução cuja equação é:

(a) $z = x^2 + y^2$ (b) $x = y^2 + z^2$ (c) $y^2 = x^2 + z^2$

(d) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ (e) $x^2 + y^2 = 1$ (f) $4x^2 + 9y^2 - z^2 = 36$.

Superfície de Revolução: volume

Método das Fatias

Vamos estabelecer uma fórmula para o cálculo do volume do sólido Ω gerado pela rotação de uma região D do plano xy em torno do eixo horizontal $y = c$. Observando a Figura 8.8 abaixo, vemos que o *volume infinitesimal* dV, isto é, o volume da fatia de largura dx, vem dado por:

$$dV = \pi[f(x) + c]^2 dx - \pi c^2 dx.$$

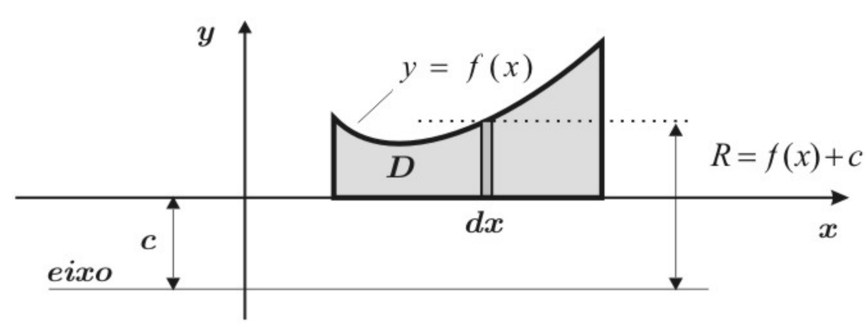


Fig. 8.8

O volume do sólido Ω é, portanto:

$$\boxed{\mathrm{vol}(\Omega) = \int_a^b \pi\left(R^2 - c^2\right) dx}$$

No caso em que o eixo de rotação é o eixo x, temos $c = 0$ e o volume do sólido é calculado pela fórmula:

$$\boxed{\mathrm{vol}\,(\Omega) = \int_a^b \pi f\,(x)^2\,dx}$$

Método das Cascas Cilíndricas

Aqui o sólido Ω é gerado pela rotação da região D em torno do eixo (reta vertical) $x = c$. O *volume infinitesimal* dV, é, neste caso:

$$dV = \pi\left[(x + c + dx)^2 - (x + c)^2\right] f\,(x) = 2\pi\,(x + c)\,f\,(x)\,dx$$

e o volume de Ω é a *soma* desses volumes infinitesimais, isto é:

$$\boxed{\mathrm{vol}\,(\Omega) = \int_a^b 2\pi\,(x + c)\,f\,(x)\,dx}$$

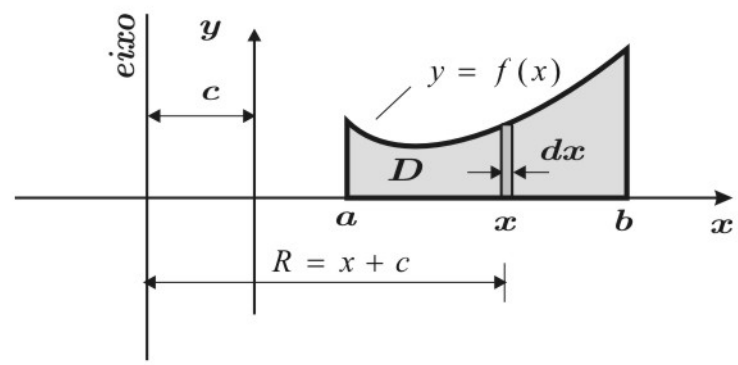


Fig. 8.9

Se a rotação ocorresse em torno do eixo y, então o volume seria: $\boxed{\mathrm{vol}\,(\Omega) = \int_a^b 2\pi x f\,(x)\,dx}$

8.5B Em cada caso abaixo, esboce a região D delimitada palas curvas dadas e em seguida calcule o volume do sólido gerado pela rotação da região D em torno do eixo indicado.

(a) $y = x^4 - 2x^2,\ y = 2x^2,\ x \geq 0$; eixo y (b) $y = x^2 - 4x,\ y = 0$; eixo x

(c) $y = \sqrt{x},\ y = 0,\ x = 4$; eixo $x = 4$ (d) $x^2 + y^2 = 1$; eixo $x = 2$

(e) $y = \sqrt{x},\ y = 0,\ x = 4$; eixo $y = 2$ (f) $y = x,\ y = 0,\ x = 2$; eixo y

(g) $y = x^2,\ y = 4 - x^2$; eixo x (h) $xy = 1,\ y = 0,\ x = 1$ e $x = 2$; eixo x.

8.5C Uma região D do plano xy é delimitada pelo triângulo de vértices $(0,0)$, $(h,0)$ e (h,r), sendo h e r números positivos. Calcule o volume do sólido resultante da rotação da região D em torno do eixo x(resp. $\pi r^2 h/3$). E se a rotação fosse em torno do eixo y? (resp. $2\pi r h^2/3$)

8.5D Qual o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo x da região do plano xy delimitada pela parábola $y = x^2$, pelo eixo x e pelas retas $y = 2x - 1$ e $y = x + 2$? (resp. $13\pi/6$)

8.5E Considere a curva de equação $y^2 = x^3$ e as regiões R_1 e R_2 mostradas na Figura 8.10.

Determine o volume do sólido em cada situação a seguir:

(a) R_2 gira em torno do eixo x;

(b)R_1 gira em torno do eixo y;

(c) R_2 gira emtorno do eixo BC;

(d) R_1 gira em torno do eixo AC.

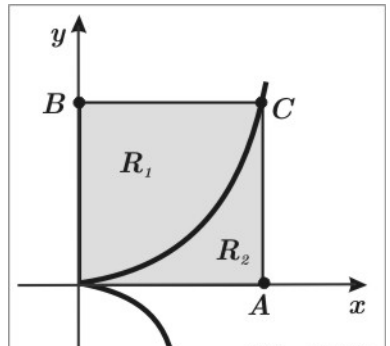


Fig. 8.10

8.5F É feito um orifício de raio $2\sqrt{3}$ pelo centro de um sólido esférico de raio $R = 4$. Calcule o volume da porção retirada do sólido. (resp. $224\pi/3$)

8.5G Calcule o volume de um tronco de cone circular reto de altura h, raio da base inferior R e raio da base superior r. (resp.)

8.5H Calcule o volume de uma calota determinada em uma esfera de raio r por um plano cuja distância ao centro da esfera é h, $h < r$. (resp. $2\pi R^3/3 + \pi h^3/3 - \pi r^2 h$)

8.5I Calcule pelos dois métodos (Fatiamento e Cascas Cilíndricas) o volume do sólido obtido por rotação em torno do eixo y da região delimitada pela curva $y = 2x - x^2$ e o eixo x.

8.5J Ao girar em torno do eixo y uma certa região do plano xy, obteve-se a seguinte expressão para o volume do sólido resultante:

$$V = 2\pi \int_0^{\pi/4} (x \cos x - x \operatorname{sen} x)\, dx.$$

Identifique a região e calcule o volume V.

8.5K. A curva de A a B é descrita por $y = f(x),\ a \le x \le b$. Identifique o sólido de revolução cujo volume é:

(a) $\int_a^b \pi f(x)^2 dx$ (b) $\int_c^d \pi f^{-1}(y)^2 dy$ (c) $\int_a^b \pi f(x)^2 dx - \frac{1}{2}\pi e^2(b-c)$

(d) $\int_a^b 2\pi x f^{-1}(x) dx$ (e) $\int_a^b 2\pi f(x) dx$ (f) $\pi(be^2 - ad^2) - \int_a^b \pi f(x)^2 dx$.

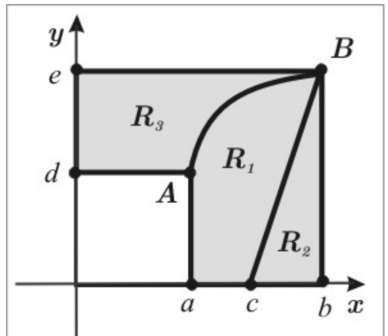


Fig. 8.11

8.5L Calcule o volume do sólido gerado pela rotação da região delimitada pelas retas $y = 0,\ x = 2$ e $x = 2y$, em torno da reta $y = x$ (sug. use uma rotação de eixos).

8.5M Calcule o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo y do disco delimitado pela circunferência $(x-a)^2 + y^2 = b^2,\ 0 < b < a$.

Sólidos Gerais

O Método das Fatias pode ser utilizado no cálculo do volume de um sólido qualquer, quando se conhece a área das seções transversais perpendiculares ao eixo x, por exemplo. De fato: suponhamos que um sólido Ω é limitado pelos planos $x = a$ e $x = b$ e que $A(x)$ representa a área da seção tranversal no ponto x. O volume dV da fatia compreendida entre x e $x + dx$ é calculada por $dV = A(x)\,dx$, de modo que o volume do sólido Ω, que é a "soma"de todos esses volumes elementares, é calculado por:

$$\boxed{\operatorname{vol}(\Omega) = \int_a^b A(x)\,dx}$$

Utilize essa fórmula nos exercícios 8.5M a 8.5P.

8.5N A base de um sólido é o disco $x^2 + y^2 \le a^2$ e cada seção tranversal do sólido determinada por planos perpendiculares ao eixo x é um quadrado cujo lado está sobre a base do sólido Qual o volume do sólido?

8.5O A base de um sólido é a região do plano xy limitada pelo eixo x e pela curva $y = \operatorname{sen} x,\ 0 \le x \le \pi/2$. Toda seção plana do sólido perpendicular ao eixo x é um triângulo equilátero com um dos lados sobre a base do sólido. Calcule o volume do sólido.

8.5P De um cilindro circular reto de raio r corta-se uma *cunha* por meio de um plano passando por um diâmetro da base e formando um ângulo de 45^o com o plano da base. Calcule o volume da cunha.

8.5Q As seções transversais de um sólido por planos perpendiculares ao eixo x são círculos cujos diâmetros estão compreendidos entre as curvas $y = x^2$ e $y = 8 - x^2$. Sabendo-se que o sólido se encontra entre os planos perpendiculares ao eixo x que passam pelos pontos de interseção dessas curvas, calcule seu volume.

Superfície de Revolução: área

Antes de deduzir uma fórmula para a área de uma superfície de revolução, vamos calcular de maneira simples as áreas de duas superfícies bastante familiar: o cilindro e o cone circular reto. Para o cilindro de raio R e altura H, quando cortado e aberto, sua área lateral é calculada como se ele fosse um retângulo de altura H e base $2\pi R$, como sugere a Figura 8.12.

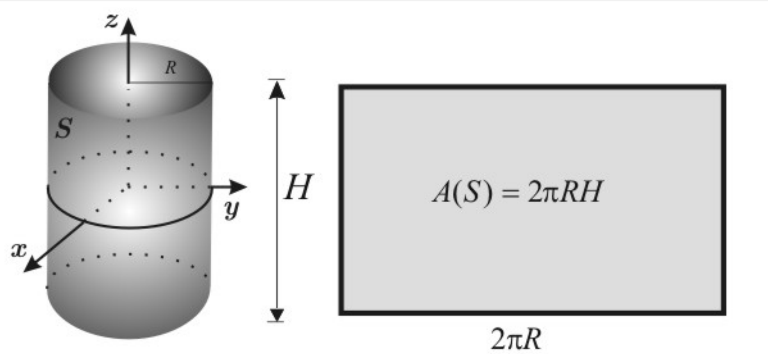


Fig. 8.12

Para o cone o procedimento é análogo. Aqui usaremos a fórmula básica da área do setor circular: $A(D) = \frac{1}{2}Rs$, sendo R o raio e s o comprimento do arco, como na figura ao lado. Um cone circular reto de altura H, geratriz de comprimento g e raio da base R após cortando e aberto se identifica com o setor circular de raio g e comprimento do arco $2\pi R$, como na Figura 8.14 abaixo.

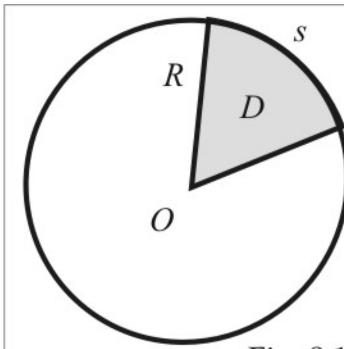


Fig. 8.13

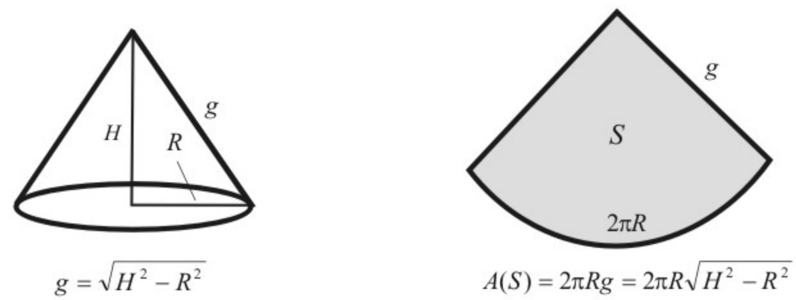


Fig. 8.14

Em uma situação geral, supõe-se que S seja obtida por rotação em torno do eixo x, do gráfico de uma *função suave* $y = f(x)$, $a \le x \le b$. Por função suave entende-se um função f que é contínua e tem primeira derivada contínua no intervalo $[a, b]$. A área infinitesimal dS é aproximada pela área do cilindro de raio $f(x)$ e altura ds, sendo ds o comprimento do arco sobre o gráfico de f, como sugere a Figura 8.15.

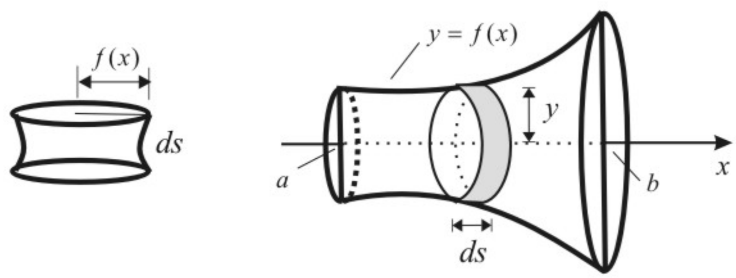


Fig. 8.15

Temos que

$$dS = 2\pi f(x)\, ds$$

e, lembrando que $ds = \sqrt{1 + f'(x)^2}dx$, encontramos por integração a seguinte fórmula para o cálculo da área de S :

$$\boxed{A(S) = \int_a^b 2\pi f(x)\, ds = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}dx}$$

8.5R Calcule a área de uma esfera de raio R. (resp. $4\pi R^2$)

8.5S Calcule a área da superfície gerada pela rotação da curva $y = \sqrt{x}$, $1 \le x \le 4$, em torno do eixo x. (resp. $\frac{4\pi}{3}\left[(17/4)^{3/2} - (5/4)^{3/2}\right] \simeq 30.85$)

8.5T Calcule a área do cone gerado pela rotação do segmento de reta $y = 3x + 2,\ 0 \leq x \leq 3$, em torno do eixo x. (resp. $39\pi\sqrt{10}$)

8.5U A curva $8x = y^4 + 2/y^2,\ 1 \leq y \leq 2$, gira em torno do eixo y. Calcule a área da superfície resultante. (resp. $1179\pi/256$)

8.5V Calcule a área do parabolóide $y = x^2 + z^2,\ 0 \leq y \leq 4$. (resp. $\frac{4\pi}{3}\left[\left(\frac{17}{4}\right)^{3/2} - \frac{1}{8}\right] \simeq 36.18$)

Respostas & Sugestões

8.2B (a) $\sqrt{17} - \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{4}\ln\left[(2+\sqrt{5})(\sqrt{17}-4)\right]$ (b) $\sqrt{1+e^2} - \sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln\left[\dfrac{2+e^2-2\sqrt{1+e^2}}{(3+\sqrt{2})e^2}\right]$ (c) $\ln\left[\frac{1}{3}(2+\sqrt{3})(\sqrt{2}-1)\right]$ (d) $13/12$ (e) 21 (f) $\sqrt{6}\,(2+\ln 3)$ (g) $2\sqrt{3}$ (h) $\frac{680\sqrt{85}}{729} - \frac{97\sqrt{97}}{729}$ (i) $\frac{1}{27}(31\sqrt{31} - 13\sqrt{13})$ (j) $53/6$ (k) $\frac{1}{27}(80\sqrt{10} - 13\sqrt{13})$ (l) $\frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{7}{6}$

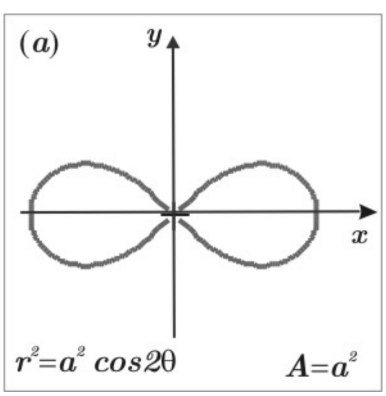
8.2H (a) $\frac{1}{27}\left[(85)^{3/2} - (13)^{3/2}\right]$ (b) $\sqrt{2}\,(e-1)$ (c) 2π (d) $\frac{\pi}{2}\sqrt{1+\pi^2}$ (e) $2\sqrt{5}$ (f) $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\ln(\sqrt{2} - 1)$

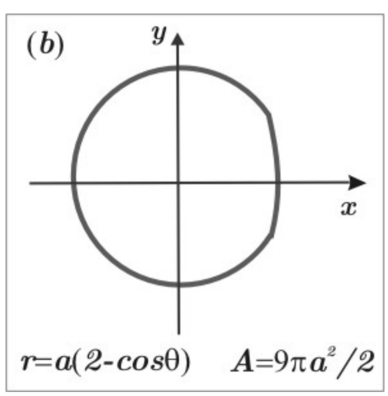
8.3B (a) $(1/\sqrt{2}, \pi/4)$ (b) () (c) $(1, 3\pi/4)$ (d) $(6, \pi/3)$ (e) $(\sqrt{2}, 5\pi/4)$ (f) () (g) $(2\sqrt{3}, \pi/3)$ (h) $(4, -\pi/2)$

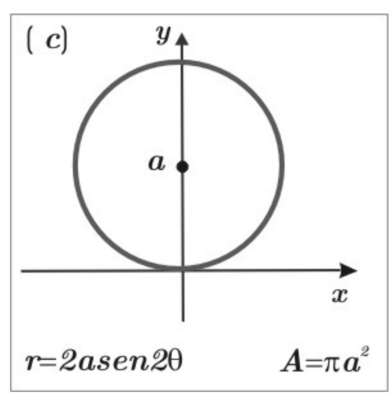
8.3H (a) $\{(2,\pi/3)\,,\ (2,-\pi/3)\}$ (b) $\{(1/2, 2\pi/3),\ (1/2, 4\pi/3)\}$ (c) $(0,\pi/2)\,,\ (0, 3\pi/2)$(d) $\{(1+\sqrt{2}/2, \pi/4),\ (1-\sqrt{2}/2, 3\pi/4),\ (1-\sqrt{2}/2, 5\pi/4),\ (1+\sqrt{2}/2, 73\pi/4)\}$

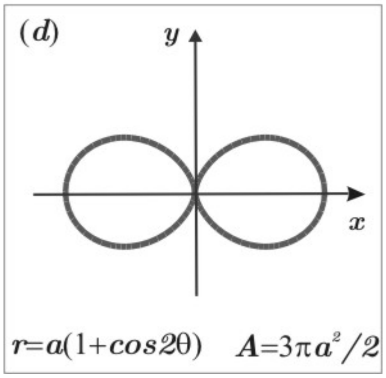
8.4A (a) $3\pi/2$ (b) $2\sqrt{3}$ (c) $2\sqrt{2}-2$ (d) $\frac{\pi}{24}\sqrt{4+\pi^2} + \frac{1}{6}\ln(\sqrt{1+\pi^2/4} + \pi/4)$ (e) 2π (f) $3\sqrt{2}$ (g) $\frac{a}{24}\left(16+\pi^2\right)^{3/2} - 8a/3$ (h) $\frac{a}{8}(2\pi - 3\sqrt{3})$ (h) $\sqrt{2}\pi/2$

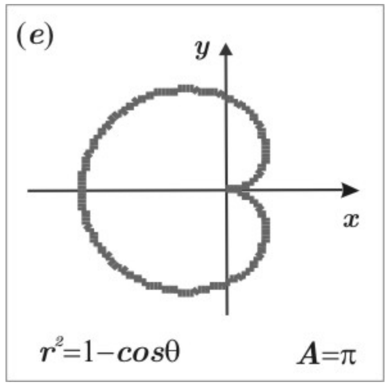
8.4B

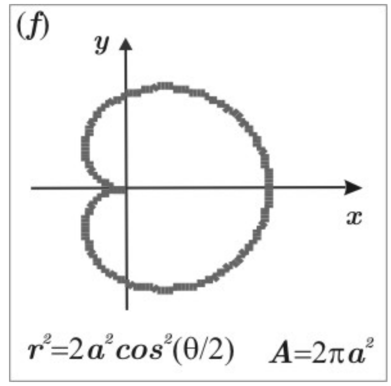






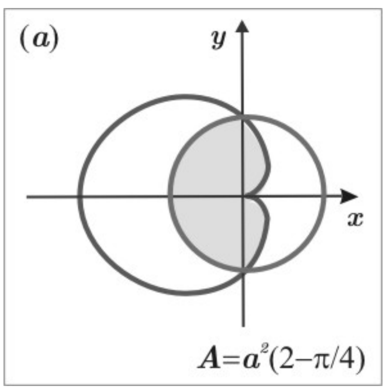




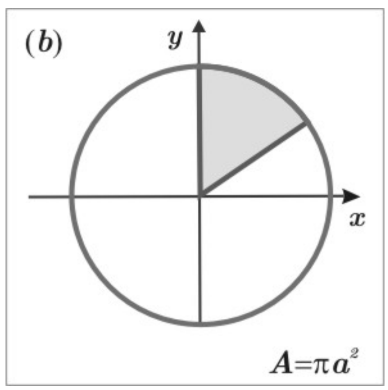


8.4C

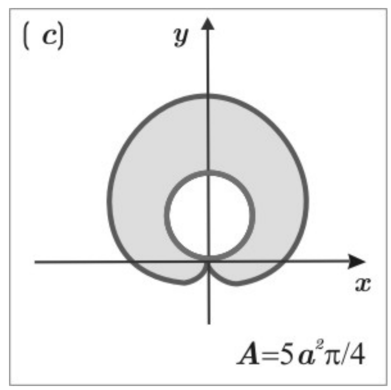
$r = a$ e $r = a\,(1-\cos\theta)$



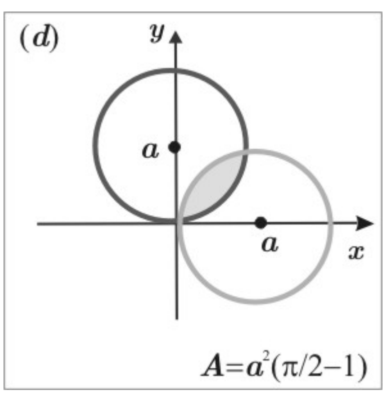
$r = 2$ e $\pi/4 \le \theta \le \pi/2$



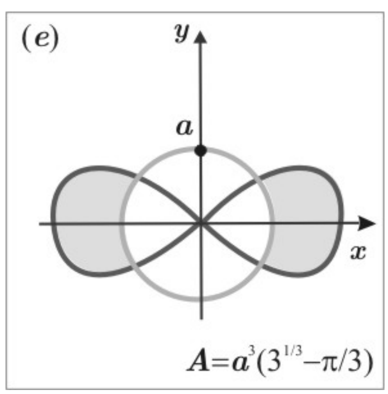
$a \operatorname{sen}\theta \le r \le a\,(1+\operatorname{sen}\theta)$



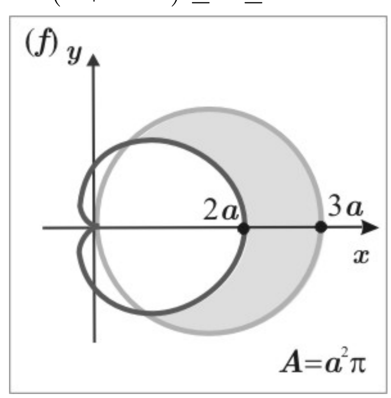
$r = 2a\cos\theta$ e $r = 2a\operatorname{sen}\theta$



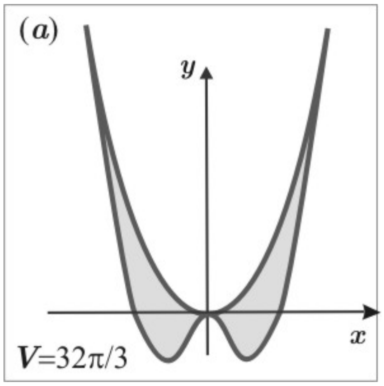
$a \le r \le 2a^2\cos 2\theta$

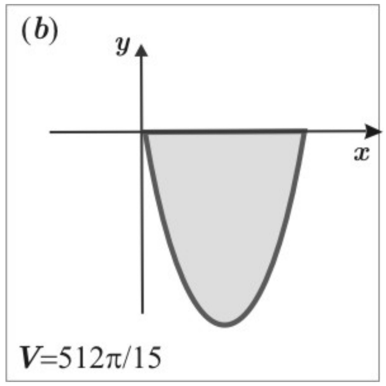


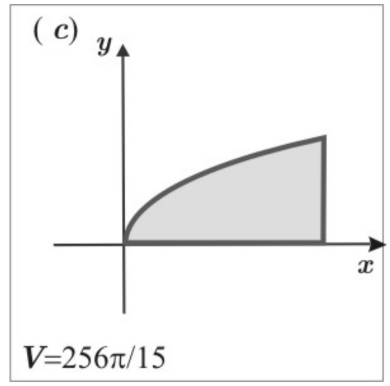
$a\,(1+\cos\theta) \le r \le 3a\cos\theta$

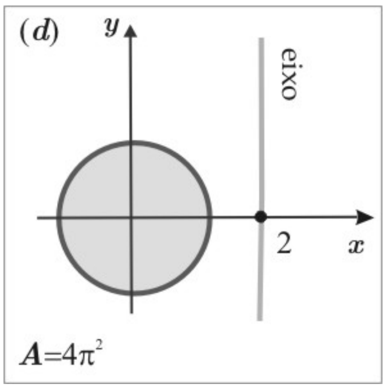


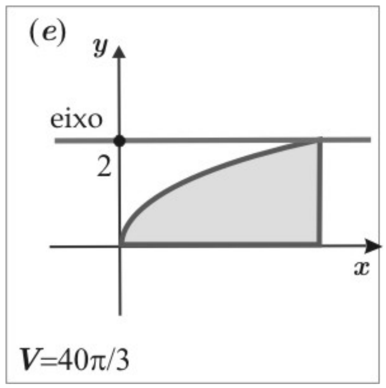
8.5B Em cada figura abaixo apresenta-se o gráfico da região que irá produzir o sólido.

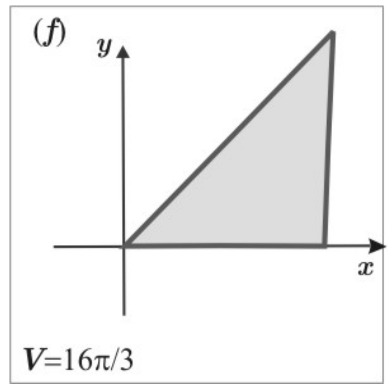

(a)
y
x
V=32π/3

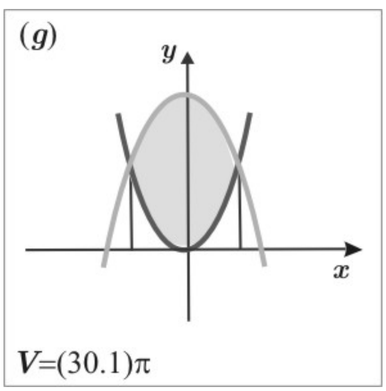

(b)
y
x
V=512π/15

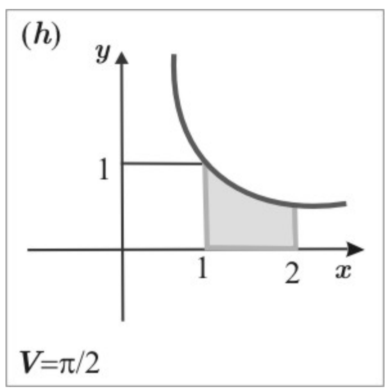

(c)
y
x
V=256π/15

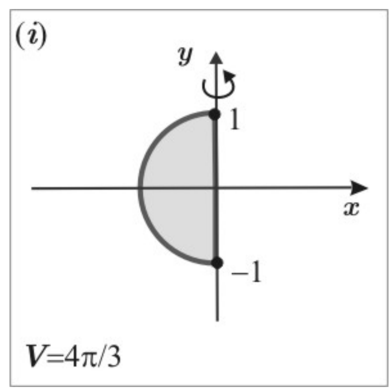

(d)
y
eixo
2
x
A=4π²


(e)
y
eixo
2
x
V=40π/3


(f)
y
x
V=16π/3


(g)
y
x
V=(30.1)π


(h)
y
1
1
2
x
V=π/2


(i)
y
1
x
−1
V=4π/3