UFPB/CCEN/CAMPUS I	PERÍODO 09.2
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA	DATA:22.08.2009
DISCIPLINA: Análise Real I	TURMA: 01
PROFESSOR: Milton	TURNO: Tarde

ALUNO:________________________ MATRICULA:_________

6^a Lista de Exercícios

1. Sejam $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $T(x) = \alpha x + \beta$ com $\alpha \neq 0$ e $I \subset \mathbb{R}$, compacto. Dada $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ limitada em $J = T(I)$ tem-se
$$\overline{\int}_J f(y)dy = |\alpha| \overline{\int}_I f(\alpha x + \beta)dx$$

2. Sejam $Y \subset \mathbb{R}$, $[a, b]$ contendo Y e sua imagem $T(Y)$, ($onde \quad T(x) = \alpha x + \beta$) e $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada, que se anula fora de $T(Y)$. Então
$$\overline{\int_a^b} f(y)dy = \overline{\int_a^b} f(\alpha x + \beta)|\alpha|dx$$

3. Toda transformação linear invertível $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ pode ser escrita como produto de transformações lineares elementares(necessariamente invertíveis) $E_1 \cdot E_2 \cdots E_k$ dos tipos listados abaixo:

   (a) $x = (x_1, \cdots, x_n) \rightarrowtail E \cdot x = (\phi(x), \cdots, x_k)$, onde $\phi(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i$.

   (b) $x = (x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots, x_m) \rightarrowtail E \cdot x = (x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_i, \cdots, x_m)$.

4. Se $h : U \longrightarrow V$ é um difeomorfismo de classe C^1 entre abertos de $\mathbb{R}^m$ então (por h ser um homeomorfismo) tem-se $h(\partial X) = \partial h(X)$ para todo conjunto X tal que $\bar{X} \subset U$.

5. Se $X \subset \mathbb{R}^m$ tem medida nula e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é localmente Lipschitziana, então$f(X)$ tem medida nula em $\mathbb{R}^m$.

6. Se X é J-mensurável e $\bar{X} \subset U$, sua imagem $h(X)$ é J-mensurável.

7. Se $f : h(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ então o conjunto dos pontos de descontinidade de f e $f \circ h : X \longrightarrow \mathbb{R}$ estão relacionadas pela igualdade

$$D(f \circ h) = h^{-1}(D(f))$$

8. h^{-1} localmente Lipschitziana, temos $med[D(f \circ h)] = 0 \Longleftrightarrow med[D(f)] = 0$, isto é f é integrável se, e somente se $f \circ h$ é integrável.

9. O que é uma decomposição de $X \subset \mathbb{R}^m$ J-mensurável? O que é uma decomposição pontilhada?Defina a soma de Riemann de $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ (limitada) relativamente a decomposição pontilhada $D^* = (D, (\xi_i))$ de X.

10. Sejam $T : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma transformação linear invertível, $X \subset \mathbb{R}^m$ J-mensurável e $f : T(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ integrável. Então

$$\int_{T(X)} f(y)dy = \int_X f(T.x) \mid \det T \mid dx.$$

Este é o caso linear do Teorema de mudança de variáveis.

11. Se $X \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto J-mensurável. Para toda transformação linear $T : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$, tem-se

$$vol\, T(X) =\mid \det T \mid .vol\, X$$

12. Sejam X compacto, U aberto, $X \subset U \subset \mathbb{R}^m$, e $\varphi : U \times U \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua, com $\varphi(x, x) = 1 \forall\ x \in X$. Dado $\epsilon > 0$, pode-se obter $\delta > 0$ tal que $\mid \varphi(x, y) - 1 \mid < \epsilon$ quaisquer que sejam $x, y \in X$ com $\mid y - x \mid < \delta$.

13. Sejam $U, V \subset \mathbb{R}^m$ abertos, $h : U \longrightarrow V$ um difeomorfismo C^1, $X \subset U$ compacto J-mensurável e $N = N(h, X) = \sup\{\mid h'(x) \mid ; x \in X\}$. Então $h(X)$ é J-mensurável e $volh(X) \leq N^m.volX$

14. Lema de Duhamel: Seja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ integrável no conjunto J-mensurável $X \subset \mathbb{R}^m$. Para cada decomposição $D = X_1, ..., X_k$ de X, suponhamos dados os números $\eta_1 = \eta_1(D), ..., \eta_k = \eta_k(D)$ tais que $\lim\limits_{|D| \longrightarrow 0} \eta_i = 0$. Nestas condições, tem-se

$$\lim_{|D| \longrightarrow 0} \sum [f(\xi_i) + \eta_i] vol X_i = \int_X f(x)dx$$

15. Junte todos os itens anteriores e prove o Teorema de Mudança de Variáveis: Sejam $h : U \longrightarrow V$ um difeomorfismo de classe C^1 entre abertos, $U, V \subset \mathbb{R}^m$, $X \subset U$ compacto J-mensurável e $f : h(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ integrável. Então $f \circ h : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é integrável e

$$\int_{h(X)} f(y)dy = \int_X f(h(x)). \det \mid h'(x) \mid dx$$