UFPB/CCEN/CAMPUS I — PERÍODO 09.2

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA — DATA:22.08.2009

DISCIPLINA: Análise Real I — TURMA: 01

PROFESSOR: Milton — TURNO: Tarde

ALUNO:________________________ MATRICULA:_________

5ª Lista de Exercícios

1. Mostre usando a definição de integral as seguintes propriedades: sejam $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (A cubo fechado) funções integráveis.

   a) $f \pm g$ é integrável;

   b) f^2 é integrável;

   c) $f \cdot g$ é integrável;

   d) $|f|$ é integrável;

   e) se $f(x) > 0,\ \forall x \in A$, então $\sqrt{f}$ é integrável.

2. Mostre um exemplo de um conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ onde ∂C não tem medida nula.

3. Mostre que um conjunto ilimitado não pode ter conteúdo nulo.

4. Dê um exemplo de um conjunto fechado de medida nula, mas que não tenha conteúdo nulo.

5. a) Se um conjunto C tem conteúdo nulo, mostre que $\overline{C}$ e ∂C tem conteúdo nulo.

   b) Dê exemplo de conjunto de medida nula, mas que a fronteira do conjunto não tenha medida nula.

6. a) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função não decrescente. Mostre que o conjunto $\{x \in [a, b] : f \text{ é descontínua em } x\}$ tem medida nula.

   b) Conclua do item (a) que toda função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monótona é integrável em $[a, b]$.

7. Mostre que se C tem conteúdo nulo, então $C \subset A$ para algum retângulo fechado A e C é Jordan-Mensurável com $\int_A \chi_C = 0$.

8. Dê um exemplo de um conjunto limitado C de medida nula tal que $\int_A \chi_C$ não existe.

9. Se C é um conjunto limitado de medida nula e $\int_A \chi_C$ existe, mostre que $\int_A \chi_C = 0$.(Sugestão: Mostre que $L(f, P) = 0, \forall P$.)

10. Se $f : A \to \mathbb{R}$ (A retângulo fechado) é não negativa e $\int_A f = 0$, mostre que o conjunto $\{x : f(x) \neq 0\}$ tem medida nula. (Sugestão: Mostre que o conjunto $\{x : f(x) > 1/n\}$ tem conteúdo nulo.

11. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que o gráfico de f tem conteúdo nulo.

12. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável e não-negativa e considere $A_f = \{(x, y) : a \leq x \leq b \text{ e } 0 \leq y \leq f(x)\}$. Mostre que A_f é Jordan-Mensurável e tem área $\int_a^b f$.

13. Se $f : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ é integrável, mostre que
$$\int_a^b \int_a^y f(x, y)dxdy = \int_a^b \int_x^b f(x, y)dydx.$$

14. Use o teorema de Fubini para mostrar que $D_{12}f = D_{21}f$ se estas funções são contínuas. (Sugestão: Se $D_{12}f - D_{21}f > 0$, existe um retângulo A contendo a tal que $D_{12}f(x) - D_{21}f(x) > 0, \forall x \in A$.

15. Se $A = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ e $f : A \to \mathbb{R}$ é contínua, defina $F : A \to \mathbb{R}$ por
$$F(x) = \int_{[a_1,x_1]\times\cdots\times[a_n,x_n]} f.$$
Qual o valor de $D_iF(x)$ para $x \in intA$?

16. Seja $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ e suponha D_2f contínua. Defina $F(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$. Prove a regra de Leibniz:
$$F'(y) = \int_a^b D_2f(x, y)dx.$$

(Sugestão: $F(y) = \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b (\int_c^y D_2 f(x,s)ds + f(x,c))dx$.)