

4ª Lista de Exercícios

1. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(0) = 0$ e

$$f(x, y) = xy/(x^2 + y^2) \quad \text{se} \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

- (a) Para quais vetores $u \neq 0$ existe a derivada direcional $\frac{\partial f}{\partial u}(0)$?
- (b) Existe $D_1 f$ e $D_2 f$ em 0?
- (c) f é diferenciável em 0?
- (d) f é contínua em 0?

2. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(t) = (\cos t, \sin t)$. Fixado $a \in \mathbb{R}^2$, encontre $z \in (0, 2\pi)$ tal que $a[f(y) - f(x)] = a\{f'(z)(y - x)\}$, com $x = 0$ e $y = 2\pi$.

3. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^{-x^{-2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Prove que f é classe C^∞ .

4. Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $|f(x)| \leq \|x\|^2$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Mostre que f é diferenciável na origem. Ache $df(0)$.

5. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ um caminho diferenciável tal que $\|f(t)\| = 1, \forall t \in \mathbb{R}$. Mostre que $\langle f'(t), f(t) \rangle = 0$.

6. Mostre que a função $f(x, y) = |xy|$ é diferenciável em 0, mas não é de classe C^1 em qualquer vizinhança de 0.

7. Seja $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ satisfazendo as condições $f(0) = (1, 2)$ e

$$Df(0) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Seja $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$g(x, y) = (x + 2y + 1, 3xy).$$

Achar $D(g \circ f)(0)$.

8. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada pelas equações

$$f(x) = (e^{2x_1+x_2}, 3x_2 - \cos x_1, x_1^2 + x_2 + 2),$$

$$g(x) = (3y_1 + 2y_2 + y_3^2, y_1^2 - y_3 + 1).$$

- (a) Se $F(x) = g(f(x))$ achar $DF(0)$.
 (b) Se $G(x) = f(g(y))$ achar $DG(0)$.

9. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy).$$

- (a) Mostre que f é injetora sobre o conjunto A consistindo de todos os (x, y) com $x > 0$.
 (b) Quem é $B = f(A)$.
 (c) Se g é a função inversa, achar $DG(0, 1)$.

10. Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada pela equação $f(x) = \|x\|^2 x$. Mostre que f é de classe C^∞ e que f leva a bola unitária $B(0, 1)$ sobre ela mesma de um modo injetor. Mostre, contudo, que a função inversa não é diferenciável em 0.

11. Sejam $\xi : I \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , com $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$ em todos os pontos. Se $f(x, \xi(x)) = 0$ para todo $x \in I$, prove que ξ é de classe C^1 .

12. Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^2$, tal que $(x^2 + y^2)f(x, y) + f(x, y)^2 = 1$ para qualquer $(x, y) \in U$. Prove que $f \in C^\infty$.

13. Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Se a função $g : U \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $g(x) = \int_0^{f(x)} (t^2 + 1)dt$, for de classe C^∞ , então f também será C^∞ .

14. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ , com $f(x, 0) = f(0, y) = 0$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. Mostre que existe $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ tal que $f(x, y) = g(x, y) \cdot x \cdot y$ para qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

15. Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k ($i \leq k \leq \infty$) no aberto convexo $U \subset \mathbb{R}^2$, contendo a origem. Suponha que f e todas as suas derivadas parciais de ordem $\leq i$ se anulam na origem. Prove que existem funções $a_0, a_1, \dots, a_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^{k-i} , tais que $f(x, y) = \sum_{j=0}^i a_j(x, y)x^j y^{i-j}$ para todo ponto $(x, y) \in U$.

16. Seja $f(x, y) = \begin{cases} 2xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. Mostre que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$.

17. Seja $f : U \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, com derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ contínuas em $U \times [a, b]$. Seja $g : U \rightarrow [a, b]$ de classe C^1 , $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Defina a seguinte função: $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \int_a^{g(x)} f(x, t) dt$.

(a) Mostre que φ é de classe C^1 .

(b) Mostre que $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = \int_a^{g(x)} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, t) dt + \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) f(x, g(x))$.