Universidade Federal da Paraiba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Disciplina: Análise II
Professor: Milton

3ª Lista de Exercícios

1. Se $K \subseteq \mathbb{R}^n$ é compacto e (f_n) é uma sequência de funções contínuas de K em $\mathbb{R}^m$ que é uniformemente convergente em K, mostre que a família $\{f_n\}$ é equicontínua em K.

2. Seja $\mathcal{F}$ uma coleção uniformemente limitada e equicontínua de funções $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e seja $f^* : D \to \mathbb{R}$ definida por
$$f^*(x) = \sup\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}.$$
Mostre que f^* é contínua em D.

3. Mostre que o Teorema de Arzelá-Àscoli pode falhar quando consideramos as seguintes sequências de funções
   (a) $f_n(x) = x + n,\ x \in [0, 1]$.
   (b) $f_n(x) = x^n,\ x \in [0, 1]$.
   (c) $f_n(x) = \frac{1}{1+(x-n)^2},\ x \in [0, \infty)$.

   Quais as hipóteses que falham no Teorema?

4. Se $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ é contínua em $[0, \infty)$ e $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, mostre que f é uniformemente contínua em $[0, \infty)$.

5. Mostre que se, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função $f_n : I \to \mathbb{R}$ é monótona crescente e se $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ é contínua em I, então a convergência é uniforme em I.

6. Suponhamos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformemente contínua em $\mathbb{R}$ e , para $n \in \mathbb{N}$, seja $f_n(x) = f(x + \frac{1}{n})$ para $x \in \mathbb{R}$. Mostre que (f_n) converge uniformemente em $\mathbb{R}$ para f.

7. Considere as sequências (f_n) de $D = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ em $\mathbb{R}$ definidas pelas seguintes fórmulas:
   (a) $\frac{x^n}{n}$, (b) $\frac{x^n}{1+x^n}$, (c) $\frac{x^n}{n+x^n}$,
   (d) $\frac{x^{2n}}{1+x}$, (e) $\frac{x^n}{1+x^{2n}}$, (f) $\frac{x}{n}e^{-\frac{x}{n}}$.

8. Dê exemplo de uma sequência de funções descontínuas em toda parte, que converge uniformemente para uma função contínua.

9. Dê exemplo de uma sequência de funções contínuas que converge num compacto para uma função que tem um número infinito de descontinuidades.

10. Seja (f_n) uma sequência de funções contínuas de $D \subseteq \mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$ tal que (f_n) converge uniformemente para f em D, e seja (x_n) uma sequência de elementos de D que converge para $x \in D$. Decorre que $(f_n(x_n))$ converge para $f(x)$?