Universidade Federal da Paraiba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática

Disciplina: Análise Real- Prof. Milton

$2^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios

1. Use $f(x) = x^2$ para mostrar que a imagem de um aberto por uma função contínua pode não ser um aberto.
2. Prove que se $f : S \to \mathbb{R}^n$ é contínua e $F \subset \mathbb{R}^n$ é fechado, então $f^{-1}(F)$ é fechado em S.
3. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Prove que o conjunto dos zeros de f, $Z(f) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ f(x) = 0\}$ é fechado.
4. Prove que a imagem de uma sequência de Cauchy por uma função uniformemente contínua é uma sequência de Cauchy. E se a função for apenas contínua?
5. O cone $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ z \geq 0,\ x^2 + y^2 - z = 0\}$ é homeomorfo a $\mathbb{R}^2$.
6. Estabeleça um homeomorfismo entre $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ e $S^n \times \mathbb{R}$.
7. O conjunto das aplicações lineares injetivas é aberto em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. Onde $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ é o conjunto das aplicações lineares de $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}^n$. Idem para as sobrejetivas.
8. Mostre que as operações usuais de soma de aplicações e produto de uma aplicação por um número real fazem do conjunto $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ um espaço vetorial. Analogamente, para o conjunto $M(n \times m)$. Exiba, explicitamente, bases para os espaços $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ e $M(n \times m)$. ($M(n \times m)$ é o conjunto das matrizes reais (a_{ij}) com n linhas e m colunas).
9. Dado $x = (x_1, \cdots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, tem-se

$$x = x_1 e_1 + \cdots + x_m e_m$$

onde $\{e_1, \cdots, e_m\}$ é a base canônica do $\mathbb{R}^m$. Tal base permite estabelecer uma bijeção natural entre o conjunto $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ das transformações lineares $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ e o conjunto $M(n \times m)$. A matriz (a_{ij}) que corresponde à transformação linear T é definido por

$$T \cdot e_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i \quad (j = 1, \cdots, m). \qquad ((*))$$

Ou seja, mostre que a aplicação $\begin{array}{rccc} \Psi : & \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) & \to & M(n \times m) \\ & T & \mapsto & \Psi(T) = A \end{array}$, onde A é tal que $T \cdot e_j = Ae_i$, é bijetora.

10. Considere em $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$ a norma euclideana. Dada uma aplicação linear $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, existe uma única aplicação linear $A^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, chamada a *transposta (ou adjunta)* de A, tal que $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle$, $\forall x \in \mathbb{R}^m$, $\forall y \in \mathbb{R}^n$. Dado $b \in \mathbb{R}^n$, mostre que a equação $Ax = b$ possui solução $x \in \mathbb{R}^m$ se, e somente se, b é ortogonal a todo elemento do núcleo de A^*.

11. Uma aplicação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ diz-se *simétrica* quando $T = T^*$. Prove que o conjunto S das aplicações lineares simétricas constitui um subespaço vetorial de dimensão $n(n+1)/2$ em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Quando $T^* = -T$, diz-se que T é *anti-simétrica.* Prove que o conjunto U das aplicações lineares anti-simétricas é um subespaço vetorial de dimensão $n(n-1)/2$ em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ e que toda aplicação linear T se escreve, de modo único, como soma de uma aplicação simétrica com uma anti-simétrica, isto é, $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) = S \oplus U$.

12. Dado um subconjunto $X \subset \mathbb{R}^m$, seu *complemento ortogonal* é o conjunto $X^\perp = \{y \in \mathbb{R}^m : \langle x, y\rangle = 0,\ \forall x \in X\}$. Mostre que $X^\perp$ é um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^m$ e que se $E \subset \mathbb{R}^m$ é um subespaço vetorial então $E^{\perp\perp} = E$.

13. Dada $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, supomos fixadas uma norma em $\mathbb{R}^m$, outra em $\mathbb{R}^n$ e pomos, $|T| = \sup\{|Tx|\,;\ x \in \mathbb{R}^m,\ |x| = 1\}$. Prove que $|T| = \inf\{c \in \mathbb{R};\ |Tx| \leq c\,|x|\,,\ \forall x \in \mathbb{R}^m\}$.

14. Uma forma quadrática $H : I\!R^n \to I\!R$ é uma função cujo valor num vetor $v = (v_1, \cdots, v_n)$ é dado por $\sum_{i,j=1}^n h_{ij} v_i v_j$, onde h_{ij} é uma matriz simétrica $n \times n$. Denotamos por $H \cdot v^2$. Definimos a *Hessiana* de uma função diferenciável $f : U \subset I\!R^n \to I\!R$ no ponto x por $H(x) = d^2 f(x)$, isto é,

$$H(x) \cdot v^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) v_i v_j.$$

Dada uma função diferenciável $f : U \to I\!R$, um ponto $a \in U$ é ponto crítico de f (ou ponto *singular*) quando $df(a) = 0$, isto é, $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \cdots = \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(a) = 0$.Diz-se que f tem um *máximo* (resp. *mínimo*) *local* no ponto $a \in U$ quando existe $\delta > 0$ tal que $|v| < \delta \Rightarrow f(a+v) \leq f(a)$ (resp. $f(a) \leq f(a+v)$).

(a) Mostre que se f tem um máximo local (ou mínimo local) no ponto a, então a é um ponto crítico de f.

O ponto crítico a diz-se *não degenerado* quando a matriz Hessiana nesse ponto é invertível, i. e., $\det(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)) \neq 0$.

(b) Seja $f : U \to I\!R$ de classe C^2. Mostre que todo ponto crítico não-degenerado $a \in U$ é um ponto crítico isolado.

Para mostrar (b), prove primeiro o seguinte resultado:

(c) Seja $F = (f_1, \cdots, f_n) : U \to IR^n$, onde cada $f_i : U \to IR$ $(1 \leq i \leq n)$ é diferenciável no ponto $a \in U \subset IR^n$. Se a matriz $H = (\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a))$, tem determinante $\neq 0$ então existe $\delta > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow F(x) \neq F(a)$.

(d) Conclua com esses resultados que o conjunto dos pontos críticos não-degenerados de uma função de classe C^2 é enumerável. E que em cada compacto $K \subset U$ há apenas um número finito deles.

15. Seja $H : IR^n \to IR$ uma forma quadrática, dada por $H \cdot v^2 = \sum h_{ij} v_i v_j$ para $v = (v_1, \cdots, v_n)$. Diremos que H é *positiva* quando tivermos $H \cdot v^2 > 0$, $\forall v \neq 0$ em IR^n. Se for $H \cdot v^2 < 0, \forall v \neq 0$ em IR^n, diremos que ela é uma forma quadrática *negativa*. Se uma forma quadrática for positiva ou negativa, diremos que ela é uma *forma definida.* Diremos que H é *indefinida* quando existirem vetores $v, w \in IR^n$ tais que $H \cdot v^2 > 0$ e $H \cdot w^2 < 0$.

    (a) Dê exemplos de formas quadráticas definidas e indefinidas.

    (b) Seja $f : U \to IR$, $f \in C^2$, $a \in U$ um ponto crítico de f e H a forma Hessiana de f em a. Mostre que se H é positiva então a é um ponto de mínimo local não-degenerado.

    (c) Sejam f e a nas mesmas condições de (b), mostre que se H é negativa então a é um ponto de máximo local não-degenerado.

    (d) Sejam f e a nas mesmas condições de (b), mostre que se H é indefinida então a não é ponto de mínimo local nem de máximo local para f.

    (e) Dê exemplos para as três situações (b), (c) e (d).

16. Mostre que se $f : [a, b] \to IR^n$ é um caminho contínuo e possui derivada nula em todos os pontos de (a, b) então f é constante.

17. Seja $f : U \subset IR^n \to IR$ diferenciável em U aberto. Se para $i = 1, \cdots, n$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} : U \to IR$ são diferenciáveis num ponto $a \in U$ então diz-se que f é *duas vezes diferenciável* no ponto a. Neste caso, $\forall i, j = 1, \cdots, n$, existem as derivadas parciais de segunda ordem

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a).$$

    Assim, ficam definidas n^2 funções $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} : U \to IR$, $1 \leq i, j \leq n$. Se todas essas funções são diferenciáveis num ponto, então f é *três vezes diferenciável* naquele ponto. E assim por diante.

    Utilizando a regra de Leibniz prove a seguinte versão do Teorema de Schwarz: "Seja $f : U \to IR$ tal que existem $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ em todos os pontos de U. Se as funções $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} : U \to IR$ são contínuas, então a derivada $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ existe em todos os pontos de U e vale $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$.

18. Seja $f : IR^m \to IR$ tal que $f(tx) = |t| f(x)$ para $x \in IR^m$ e $t \in IR$ quaisquer. Se f é diferenciável na origem, então $f(x) = 0$ para todo x.

19. Se $f : U \to IR$, $U \subset IR^n$ aberto, assuma seu máximo (ou mínimo) num ponto $a \in U$ então qualquer derivada parcial de f que exista em a é nula.

20. Seja $f : U \to IR$ contínua no aberto limitado $U \subset IR^n$, possuindo derivadas parciais em todos os pontos de U. Se, para todo $a \in \partial U$ tem-se $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ então existe $c \in U$ tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(c) = 0$, $i = 1, \cdots, n$.

21. Se $f : U \to IR$ possui derivadas parciais, com $\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right| \leq M$ $(i = 1, \cdots, n)$ em todos os pontos do aberto convexo $U \subset IR^m$ então $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ (norma da soma) para quaisquer $x, y \in U$. Conclua que se f possui derivadas parciais limitadas num aberto qualquer então ela é contínua (mas não necessariamente uniformemente contínua).

22. Uma função $f : IR^m \to IR$ tal que $f(0) = 0$ e $f(tx) = tf(x)$ para quaisquer $x \in IR^m$ e $t > 0$ tem todas as derivadas direcionais na origem, e vale $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0) = f(v)$.

23. Sejam $U \subset IR^m$ aberto, $f : U \to IR$ diferenciável no ponto $a \in U$ e $M = \{(x, y) \in IR^{m+1};\ x \in U, y = f(x)\}$ o gráfico de f. O conjunto E dos vetores $v = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m, \alpha_{m+1}) \in IR^{m+1}$ tais que $\alpha_{m+1} = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ é um subespaço vetorial de dimensão m em IR^{m+1}. Mostre que E coincide com o conjunto dos vetores $\lambda'(0)$ dos caminhos $\lambda : (-\varepsilon, \varepsilon) \to IR^{m+1}$, diferenciáveis no ponto $t = 0$, com $\lambda(0) = a$ e tais que $\lambda(t) \in M$ para todo t. Determine $\beta_1, \cdots, \beta_{m+1}$ de modo que o vetor $w = (\beta_1, \cdots, \beta_{m+1})$ seja não-nulo e ortogonal ao subespaço E.

24. Mostre que todo funcional linear $f : IR^m \to IR$ é diferenciável e $df(x) \cdot v = f \cdot v$ para quaisquer $x, v \in IR^m$.

25. Para cada uma das funções abaixo, escreva a diferencial sob a forma

$$df(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

e use esta expressão para calcular $df(x) \cdot v$ para x e v dados.

(a) $f : IR \times (IR - \{0\}) \to IR$, $f(x, y) = x/y$. Calcule $df(x) \cdot v$ com $v = (tx, ty)$ e relacione este resultado com as curvas de nível de f.

(b) $f : IR^3-\{0\} \to IR$, $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$. Mostre que $df(x,y,z)\cdot v = 0$ se, e somente se, v é perpendicular a (x,y,z). Calcule $df(x,y,z)\cdot v$ para $x = 1,\ y = 2,\ z = 3$, e $v = (4,2,2)$.

(c) $f : IR^2 - \{0\} \to IR$, $f(z) = \log|z|$. Calcule $df(z)\cdot v$, com $z = (x,y)$ e $v = (-y,x)$.

26. Considere em IR^m a norma euclideana. Se $f : IR^m - \{0\} \to IR$ é definida por $f(x) = |x|^a$, com $a \in IR$, então $df(x)\cdot v = a|x|^{a-2}\langle x,v\rangle$ para todo $v \in IR^m$.

27. Seja $f : IR^m \times IR^m \to IR$ dada por $f(x,y) = \langle x,y\rangle$.Mostre que f é diferenciável e que $df(x,y)\cdot(v,w) = \langle v,y\rangle + \langle x,w\rangle$. Generalize, considerando uma forma bilinear $\varphi : IR^m \times IR^n \to IR$ qualquer. Generalize ainda mais, tomando $\psi : IR^{m_1}\times\cdots\times IR^{m_k} \to IR$. Obtenha a diferencial da função determinante como caso particular.

28. Seja $U \subset IR^m$ aberto. Se a função diferenciável $f : U \to IR$ cumpre a condição de Lipschitz $|f(x)-f(y)| \leq c\,|x-y|$ então $|df(x)\cdot v| \leq c\,|v|$ para $x \in U$ e $v \in IR^m$.

29. Dada a transformação linear $A : IR^m \to IR^n$, defina as funções $f : IR^m \times IR^n \to IR$ e $g : IR^m \to IR$ pondo $f(x,y) = \langle A\cdot x, y\rangle$ e $g(x) = \langle A\cdot x, x\rangle$. Determine $grad\ f(x,y)$ e $grad\ g(x)$.

30. Sejam $\xi : I \to IR$ contínua e $f : IR^2 \to IR$ de classe C^1, com $\dfrac{\partial f}{\partial y} \neq 0$ em todos os pontos. Se $f(x,\xi(x)) = 0$ para todo $x \in I$, prove que ξ é de classe C^1.

31. Seja $f : U \to IR$ definida no aberto $U \subset IR^2$, tal que $(x^2+y^2)f(x,y)+f(x,y)^2 = 1$ para qualquer $(x,y) \in U$. Prove que $f \in C^\infty$.

32. Seja $f : U \to IR$ definida no aberto $U \subset IR^n$. Se a função $g : U \to IR$, dada por $g(x) = \int_0^{f(x)}(t^2+1)dt$, for de classe C^∞, então f também será C^∞.

33. Seja $f : IR^2 \to IR$ de classe C^∞, com $f(x,0) = f(0,y) = 0$ para quaisquer $x,y \in IR$. Mostre que existe $g : IR^2 \to IR$ de classe C^∞ tal que $f(x,y) = g(x,y)\cdot x\cdot y$ para qualquer $(x,y) \in IR^2$.

34. Seja $f : U \to IR$ de classe C^k $(i \leq k \leq \infty)$ no aberto convexo $U \subset IR^2$, contendo a origem. Suponha que f e todas as suas derivadas parciais de ordem $\leq i$ se anulam na origem. Prove que existem funções $a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_i : U \to IR$ de classe C^{k-i}, tais que $f(x,y) = \sum\limits_{j=0}^{i} a_j(x,y)x^jy^{i-j}$ para todo ponto $(x,y) \in U$.