Universidade Federal da Paraiba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Curso de Pós-Graduação em Matemática

Disciplina: Análise real- Prof. Milton

1^a Lista de Exercícios

Propriedades Métricas do $\mathbb{R}^n$

1) Se $\|\cdot\|$ é uma norma em $\mathbb{R}^1$, mostre que existe $c > 0$ tal que $\|x\| = c\,|x|$, $\forall x \in \mathbb{R}^1$.

2) Prove que $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$.

3) Mostre que $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$ é uma relação de equivalência.

4) Verifique que em $\mathbb{R}^n$ as normas $\|\cdot\|_s$ e $\|\cdot\|_\infty$ não provém de produtos internos.

5) Sejam $|\cdot|$ e $\|\cdot\|$ normas nos espaços vetoriais E e F, respectivamente. Prove que em $E \times F$ cada uma das seguintes funções define uma norma e que elas são duas a duas equivalentes

$$\|(x,y)\|_1 = \sqrt{|x|^2 + \|y\|^2},\ \|(x,y)\|_2 = \max\{\ |x|\,, \|y\|\},\ \ \|(x,y)\|_3 = |x| + \|y\|\,.$$

Supondo que as normas $|\cdot|$ e $\|\cdot\|$ provêm de produtos internos, defina em $E \times F$ um produto interno que dá origem à norma $\|\cdot\|_1$.

6) Seja $\mathcal{P}$ o espaço vetorial dos polinômios reais. Mostre que cada uma das funções

$$\|p\|_1 = \max_{0 \leq t \leq 1} |p(t)| \quad \text{e} \quad \|p\|_2 = \max_{0 \leq t \leq 2} |p(t)|$$

define uma norma em $\mathcal{P}$. Se $\alpha > 0$, mostre que existe um polinômio $p(t)$ tal que

$$|p(t)| < \alpha \text{ em } [0,1] \text{ e } p(2) \geq 1.$$

Usando estes fatos conclua que as normas acima não são equivalentes.

II. Topologia do $\mathbb{R}^n$

1) Encontre o exterior, o interior, a fronteira e o fecho de cada subconjunto do $\mathbb{R}^2$ dado abaixo, classificando-o topologicamente em : aberto, fechado, conexo, compacto, etc

(a) $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = 1\}$.

(b) $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y > 0 \text{ ou } \ (x > 0 \text{ e } y = 0)\}$

(c) $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 - y^2 \geq 1\}$

(d) $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + \frac{y^2}{4} > 1\}$

(e) $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x$ e y são racionais$\}$.

2) O produto cartesiano $R = I \times J$ de dois intervalos abertos da reta é denominado um *retângulo aberto* do $\mathbb{R}^2$. Mostre que nos conceitos de interior, exterior e fronteira o termo "bola aberta" pode ser substituído por retângulo aberto, independente da norma utilizada. Generalize para o $\mathbb{R}^n$.

3) Mostre que $S \subset \mathbb{R}^n$ é aberto se e só se $S \cap \partial S = \emptyset$.

4) Mostre que $x \in \overline{S}$ se e só se $S \cap B_\varepsilon(x) \neq \emptyset$, para todo $\varepsilon > 0$.

5) Prove que para todo $S \subset \mathbb{R}^n$, tem-se $\partial S = \overline{S} \cap \overline{S^C}$.

6) Mostre que o interior de S é o maior aberto contido em S e que o fecho de S é o menor fechado que contém S.

7) Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto. Mostre que os subconjuntos abertos em S são, precisamente, os abertos de $\mathbb{R}^n$ contidos em S.

8) Prove a igualdade de conjuntos $A - B = A \cap B^C$. Conclua que se A é aberto e B é fechado, $A - B$ é aberto e que se A é fechado e B é aberto, então $A - B$ é fechado.

9) Um ponto $x_0 \in S \subset \mathbb{R}^n$ é denominado um *ponto isolado* de S se existir $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x_0) \cap S = \{x_0\}$. Prove que todo ponto de S ou é um ponto de acumulação de S.

10) Para o conjunto S do exercício 1(a), prove que dois pontos quaisquer de S^C podem ser ligados por uma poligonal inteiramente contida em S^C. Por esta razão o conjunto S^C é denominado *Conexo por Caminho.*

11) Prove que um subconjunto aberto $S \subset \mathbb{R}^n$ é conexo se, e somente se, é conexo por caminho.

12) Mostre que se $S \subset \mathbb{R}^n$ e S^C são abertos, então $S = \mathbb{R}^n$ ou $S = \emptyset$. O mesmo ocorre se ambos são fechados.

13) Mostre que $\overline{S} = S \cup S'$, onde S' denota o conjunto dos pontos de acumulação de S.

14) Para qualquer $S \subset \mathbb{R}^n$ mostre que S' é fechado.

15) Seja $S \subset \mathbb{R}^2$ um subconjunto não-enumerável. Prove que S tem um ponto de acumulação.

16) Se $A \subset [0, 1]$ é a união de intervalos abertos (a_i, b_i) tal que cada número racional de $(0, 1)$ pertence a algum (a_i, b_i), mostre que $\partial A = [0, 1] - A$.

17) Se A é um conjunto fechado da reta que contém todos os números racionais de $[0, 1]$, mostre que $[0, 1] \subset A$.

18) Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto fechado e $x \notin A$. Prove que existe um número real positivo d tal que $\|y - x\| \geq d$ para qualquer $y \in A$.

19) Se A é fechado, B é compacto e $A \cap B = \emptyset$, prove que existe $d > 0$ tal que $\|y - x\| \geq d$, para qualquer $y \in A$ e qualquer $x \in B$. Dê um exemplo em $\mathbb{R}^2$ mostrando que isto pode não ocorrer se os conjuntos A e B forem apenas fechados.

20) Se $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto e $K \subset A$ é compacto, mostre que existe um conjunto compacto K^* tal que $K \subset int(K^*)$ e $K^* \subset A$.