

Análise Multidimensional

Milton

1. Propriedades Métricas do $\mathbb{R}^n$

O conjunto $\mathbb{R}^n$ das "n-uplas" $x = (x_1, \dots, x_n)$ com a "soma"

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \quad x, y \in \mathbb{R}^n$$

e a "multiplicação" por escalar

$$\lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n), \quad \lambda \in \mathbb{R} \text{ e } x \in \mathbb{R}^n$$

é um espaço vetorial real.

Produto interno Euclideano: $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Este produto goza das seguintes propriedades:

$$\text{I.1 } \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle, \quad x, y, z \in \mathbb{R}^n.$$

$$\text{I.2 } \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle, \quad \lambda \in \mathbb{R} \text{ e } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

$$\text{I.3 } \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

$$\text{I.4 } \langle x, x \rangle \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ e } \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0.$$

Norma Euclideana: $x \in \mathbb{R}^n$

(I.4) $\Rightarrow \langle x, x \rangle \geq 0$ e portanto $\sqrt{\langle x, x \rangle}$ é um número real bem definido e é denominado "norma" do vetor x , i.e.,

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Exemplo: $\mathbb{R}^2$, $x = (x_1, x_2)$

$$d = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \|x\|$$

No $\mathbb{R}^n$, $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$.

Propriedades da Norma

$$\text{N.1 } \|x\| \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \text{ e } \|x\| = 0 \iff x = 0.$$

$$\text{N.2 } \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Prova: $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$

$$(1) \quad \|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x_1)^2 + \dots + (\lambda x_n)^2} = \sqrt{\lambda^2(x_1^2 + \dots + x_n^2)} = |\lambda| \|x\|$$

$$\text{N.3 } \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \text{ (Desigualdade Triangular).}$$

LEMMA 1 (Desigualdade de Cauchy Schwarz). *Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

Prova do Lema: $0 \leq \|\lambda x - y\|^2 = \langle \lambda x - y, \lambda x - y \rangle = \lambda^2 \|x\|^2 - \lambda \langle x, y \rangle - \lambda \langle y, x \rangle + \|y\|^2$

$$\lambda^2 \|x\|^2 - 2\lambda \langle x, y \rangle + \|y\|^2 \geq 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \leq 0$$

$$\Delta = 4\langle x, y \rangle^2 - 4\|x\|^2 \|y\|^2 \leq 0 \Rightarrow |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

Prova do (N.3): $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2$

Outras normas em $\mathbb{R}^n$:

a) Norma da Soma $\|x\|_s$

Dado $x \in \mathbb{R}^n$, $x \in (x_1, \dots, x_n)$, define-se

$$\|x\|_s = |x_1| + \dots + |x_n|.$$

b) Norma do Máximo $\|x\|_\infty$

Dado $x \in \mathbb{R}^n$, $x \in (x_1, \dots, x_n)$, define-se

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}.$$

Relação entre $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_s$, $\|\cdot\|_\infty$:

$$a) \quad \|x\|_\infty \leq \|x\|_s \leq n \|x\|_\infty$$

Prova:

$$\|x\|_s = |x_1| + \dots + |x_n|$$

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$$

$$|x_i| \leq \|x\|_\infty, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

daí

$$|x_1| + \dots + |x_n| \leq n \|x\|_\infty$$

$$\|x\|_s \leq n \|x\|_\infty.$$

Por outro lado,

$$|x_i| \leq |x_1| + \dots + |x_n|, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

$$\max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i|\} \leq |x_1| + \dots + |x_n|$$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_s.$$

$$\text{b)} \quad \|x\|_\infty \leq \|x\| \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty$$

Prova:

$$|x_i| = \sqrt{x_i^2} \leq \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = \|x\|, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

$$\max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i|\} \leq \|x\| \Rightarrow \|x\|_\infty \leq \|x\|$$

Por outro lado, dado $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, seja $|x_1| = \|x\|_\infty$. Então,

$$|x_1| = \|x\|_\infty, |x_2| \leq \|x\|_\infty, \dots, |x_n| \leq \|x\|_\infty$$

$$\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \leq n \|x\|_\infty^2 \Rightarrow \|x\|^2 \leq n \|x\|_\infty^2 \Rightarrow \|x\| \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty.$$

Combinando (a) e (b), segue imediatamente que existem constantes positivas c_1, c_2, c_3 e c_4 tais que

$$c_1 \|x\| \leq c_2 \|x\|_s \leq c_3 \|x\|_\infty \leq c_4 \|x\|$$

DEFINIO 2. Duas normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ são "equivalentes" quando existirem constantes c_1 e c_2 , positivas, tais que

$$c_1 \|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_1 \leq c_2 \|\cdot\|_2.$$

Notação: $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$.

LEMMA 3. $\sim$ é uma relação de equivalência, i. e.,

(a) Se $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$ então $\|\cdot\|_2 \sim \|\cdot\|_1$.

(b) $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_1$

(c) Se $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_2 \sim \|\cdot\|_3$, então $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_3$.

EXAMPLE 4. $C^0([a, b], \mathbb{R}) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \text{ contínuas}\}$

(a) Produto Interno em $E = C^0([0, T], \mathbb{R})$ ($\dim \infty$, base $\{1, t, t^2, \dots\}$)

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$$

$$\langle f, f \rangle = 0 \Leftrightarrow \int_a^b f^2(t)dt = 0 \Rightarrow f \equiv 0.$$

Se $f(x_0) > 0$, então $f^2(x_0) > 0, \forall x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ (pela continuidade de f) $\Rightarrow \int_a^b f^2 dt \geq \int_{x_0 - \epsilon}^{x_0 + \epsilon} f^2 dt > 0$.

(Todo produto interno gera uma norma)

Norma associada: $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$; $f \in E$ ou $\|f\| = \{\int_a^b f^2(t)dt\}^{\frac{1}{2}}$.

(b) **Outra norma em E :** $\|f\|_{\infty} = \max_{[a,b]} |f(t)|$. (Não provém de um produto interno, o máximo é atingido, domínio compacto, função contínua. Se for apenas limitada, $\|f\|_{\infty} = \sup |f(t)|$).

REMARK 5. Uma norma $\|\cdot\|$ num espaço vetorial E provém de um produto interno $\iff$ é válido a lei do paralelogramo:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Distância em $\mathbb{R}^n$: Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$ a distância entre x e y com relação à norma $\|\cdot\|$, é definida por:

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Três subconjuntos especiais

a) Esfera de centro x_0 e raio r

$$S_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n; d(x, x_0) = r\};$$

b) Bola aberta de centro x_0 e raio r

$$B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n, d(x, x_0) < r\};$$

c) Bola fechada de centro x_0 e raio r

$$B_r[x_0] = \{x \in \mathbb{R}^n, d(x, x_0) \leq r\};$$

$$B_r[x_0] = B_r(x_0) \cup S_r(x_0).$$

EXAMPLE 6. $\mathbb{R}^2$, $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_s$, $\|\cdot\|_{\infty}$

(a) Bola Euclideana

$$d(x, 0) = \|x\| \leq r \Leftrightarrow \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq r \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = r^2.$$

(b) Bola do Máximo

$$d(x, 0) = \|x\|_{\infty} \leq r \Rightarrow \max\{|x_1|, |x_2|\} \leq r \Rightarrow |x_1| \leq r \text{ e } |x_2| \leq r.$$

(c) Bola da Soma

$$\|x\|_s \leq r \Rightarrow |x_1| + |x_2| \leq r.$$

2. Topologia do $\mathbb{R}^n$

Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto e $x_0 \in \mathbb{R}^n$ um ponto fixado.

Posição de x_0 com relação a S :

(A) Existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x_0) \subset S$;

(B) Existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x_0) \subset S^c = \mathbb{R}^n - S$;

(C) Para qualquer $\epsilon > 0$, a bola $B_\epsilon(x_0)$ contém algum ponto de S e algum ponto de S^c .

No caso (A) o ponto x_0 é denominado "ponto interior". No caso (B) o ponto é denominado "ponto exterior" e no caso (C) ele é dito "ponto de fronteira".

Notação:

Os pontos interiores a S constituem o "interior do conjunto S " que é denotado por $\text{int}(S)$; o "exterior de S " será denotado por $\text{ext}(S)$ e sua fronteira por ∂S . O "fecho de S " e o conjunto $\bar{S} = S \cup \partial S$.

EXAMPLE 7. $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \geq 0\} \cup \{(0, -1)\}$

$\text{int } S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$

a não é ponto interior, nem exterior.

$\text{ext } S = \text{int } S^c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y < 0\} - \{(0, -1)\}$

$\partial S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = 0\} \cup \{(0, -1)\}$

$\bar{S} = S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq 0\} \cup \{(0, -1)\}$

$\text{int } S \subset S$

$\partial S \subset S$

EXAMPLE 8. $S = \{(x, y); 1 < x^2 + y^2 \leq 4\}$ não é aberto nem fechado.

$\mathbb{R}^n$ é aberto e fechado.

$\text{int } S = \{(x, y); 1 < x^2 + y^2 < 4\}$

$\text{ext } S = \{(x, y); x^2 + y^2 < 1 \text{ ou } x^2 + y^2 > 4\}$

$\partial S = \{(x, y); x^2 + y^2 = 1 \text{ ou } x^2 + y^2 = 4\}$

$\bar{S} = \{(x, y); 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

$\text{int } S \subsetneq S$

$\partial S \not\subset S$

DEFINIO 9. $S \subset \mathbb{R}^n$ é dito "aberto" quando $\text{int}S = S$, i.e., todos os pontos de S são interiores. Quando $\partial S \subset S$ então S é denominado "fechado".

EXAMPLE 10. 1) $B_r(x_0)$ é um conjunto aberto. De fato, seja $x \in B_r(x_0)$ e $\varepsilon > 0$, com $\varepsilon = r - \|x - x_0\| > 0$. Afirmação: $B_\varepsilon(x) \subset B_r(x_0)$. Seja $y \in B_\varepsilon(x)$, então $\|y - x\| < \varepsilon$ e $\|y - x_0\| \leq \|y - x\| + \|x - x_0\| < \varepsilon + \|x - x_0\| = r$.

2) $\partial B_r(x_0) = S_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - x_0\| = r\}$.

3) $B_r[x_0] = B_r(x_0) \cup S_r(x_0)$;

$\partial B_r[x_0] = \partial B_r(x_0) = S_r(x_0) \Rightarrow \partial B_r[x_0] \subset B_r[x_0] \Rightarrow B_r[x_0]$ é um conjunto fechado.

Propriedades:

A₁) Se A e B são abertos, então $A \cap B$ é aberto;

A₂) Se $\{A_\lambda\}$ é uma coleção de abertos, então $\cup_\lambda A_\lambda$ é aberto;

F₁) Se F e G são fechados, então $F \cup G$ é fechado;

F₂) Se $\{F_\lambda\}$ é uma coleção de fechados, então $F = \cap_\lambda F_\lambda$ é fechado.

Prova: A₁) Seja $x \in A \cap B$, $x \in A \Rightarrow \exists \varepsilon_1 > 0$, $B_{\varepsilon_1}(x) \subset A$ já que A é aberto.

$x \in B \Rightarrow \exists \varepsilon_2 > 0$, $B_{\varepsilon_2}(x) \subset B$.

Tome $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ então

$B_\varepsilon(x) \subset B_{\varepsilon_1}(x) \subset A$, e $B_\varepsilon(x) \subset B_{\varepsilon_2}(x) \subset B \Rightarrow B_\varepsilon(x) \subset A \cap B \Rightarrow x$ é interior.

A₂) Seja $x \in \cup_\lambda A_\lambda = A$, $\exists \lambda$, $x \in A_\lambda \Rightarrow \exists \varepsilon_\lambda > 0$; $B_{\varepsilon_\lambda}(x) \subset A_\lambda \Rightarrow B_{\varepsilon_\lambda}(x) \subset \cup_\lambda A_\lambda \Rightarrow x$ é interior. ■

EXAMPLE 11. 1) $A_n = B_{\frac{1}{n}}(0)$ é aberto e $B = \cap_{n=1}^\infty B_{\frac{1}{n}}(0) = \{0\}$, pois $\partial B = B \Rightarrow \partial B \subset B$.

2) $I_n = (-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n})$ aberto, $\cap_\lambda I_\lambda = [0, 1]$ que é fechado.

LEMMA 12. $F \subset \mathbb{R}^n$ é fechado $\Leftrightarrow F^C$ é aberto.

Prova: ($\Rightarrow$) Suponha F fechado. Seja $x \in F^C \Rightarrow x \notin F \Rightarrow x \notin \partial F \Rightarrow x \in \text{ext } F \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ tq. $B_\varepsilon(x) \subset F^C \therefore F^C$ é aberto.

($\Leftarrow$) Suponhamos agora que F^C é aberto.

Seja $x \in \partial F$. Se x estivesse em F^C , existiria $\varepsilon > 0$ tq $B_\varepsilon(x) \subset F^C$ e isto contradiz a definição de fronteira. Logo, $x \in F$ e assim $\partial F \subset F$ e F é fechado. ■

Prova de F_1 : $(F \cup G)^C = F^C \cap G^C$ é aberto, pelo lema e prop. $A_1 \therefore F \cup G$ é fechado (lema). ■

Prova de F_2 : $[\bigcap_\lambda F_\lambda]^C = \bigcup_\lambda F_\lambda^C$ aberto (lema + A_2). ■

EXAMPLE 13. $I = (0, 1)$; $I_n = [\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}]$, $n = 1, 2, 3, \dots$ $\bigcup I_n = I$.

A coleção de todos os subconjuntos abertos do $\mathbb{R}^n$ é a "Topologia Usual" do $\mathbb{R}^n$.

Topologia Relativa

Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto.

DEFINIO 14. Dizemos que $A \subset S$ é "aberto em S " quando existir um aberto A^* do $\mathbb{R}^n$ tal que $A = S \cap A^*$.

PROPOSITION 15. Um subconjunto $A \subset S$ é aberto em S quando: dado $x \in A$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \cap S \subset A$.

Prova: Se A é aberto em S , existe A^* aberto do $\mathbb{R}^n$ tal que $A = S \cap A^*$. Dado $x \in A$, então $x \in A^*$ e portanto existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subset A^*$. Logo, $S \cap B_\varepsilon(x) \subset S \cap A^* = A$.

Reciprocamente, suponhamos para cada $x \in A$ existe $\varepsilon_x > 0$ tal que $B_{\varepsilon_x}(x) \cap S \subset A$. Seja $A^* = \bigcup_{x \in A} B_{\varepsilon_x}(x)$ (aberto do $\mathbb{R}^n$). Temos $S \cap A^* = S \cap (\bigcup_{x \in A} B_{\varepsilon_x}(x)) = \bigcup_{x \in A} (S \cap B_{\varepsilon_x}(x)) \supset A$, por outro lado $S \cap A^* = \bigcup_{x \in A} (S \cap B_{\varepsilon_x}(x)) \subset A$.

EXAMPLE 16. $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq 0\}$

$A = \{(x, y) \in S; x^2 + y^2 < 1\}$

$B = \{(x, y) \in S; x^2 + y^2 < 1 \text{ ou } x^2 + y^2 = 1 \text{ e } x \geq 0\}$

$C = \{(x, y) \in S; x^2 + y^2 \leq 1\}$

i) A não é aberto no $\mathbb{R}^2$;

A é aberto em S , porque $A = S \cap B_1(0)$.

ii) B não é aberto em $\mathbb{R}^2$ nem em S , pois $\exists x \in B$ tq $\forall \varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(x) \cap S = B_\varepsilon(x) \not\subset B$.

iii) C não é aberto em $\mathbb{R}^2$ nem em S .

iv) $C^C = S - C$ é aberto em S , pois $C^C = S \cap B_1^C[0]$ é aberto em S mas não no $\mathbb{R}^2$.

Conjuntos Conexos

$$S \subset \mathbb{R}^n$$

DEFINIO 17. S é "CONEXO " quando não puder ser decomposto em união de dois subconjuntos abertos (em S) disjuntos e não-vazios, isto é, se

$$S = A \cup B$$

com A e B abertos (em S) e $A \cap B = \emptyset$, então $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$.

EXAMPLE 18. i) A bola $B_\varepsilon(x)$ é conexa,

ii) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 - y^2 \geq 1\}$ é desconexo pois $S = A \cup B$, onde $A \cap B \neq \emptyset$ e $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x < 0\} \cap S$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0\} \cap S$ ambos abertos em S . Note que A e B são conexos.

PROPOSITION 19. Seja $\{S_\alpha\}$ uma família de conexos do $\mathbb{R}^n$ com $\cap_\alpha S_\alpha \neq \emptyset$. Então $S = \cup_\alpha S_\alpha$ é conexo.

Prova: Suponhamos $S = A \cup B$, A e B abertos em S e disjuntos. Fixemos $x_0 \in \cap_\alpha S_\alpha$. Temos que

$$\begin{aligned} S_\alpha &= S_\alpha \cap S = (S_\alpha \cap A) \cup (S_\alpha \cap B) \\ &= V_\alpha \cup W_\alpha \end{aligned}$$

como S_α é conexo, então $S_\alpha \cap A = \emptyset$ ou $S_\alpha \cap B = \emptyset$, para cada α . Suponhamos que $S_{\alpha_0} \cap A = \emptyset$, para algum α_0 . Mostremos que $S_\alpha \cap A = \emptyset$, $\forall \alpha$. De fato, $x_0 \in \cap_\alpha S_\alpha \Rightarrow x_0 \in S_{\alpha_0} \Rightarrow x_0 \notin A \Rightarrow x_0 \in B \Rightarrow x_0 \in S_\alpha \cap B \Rightarrow S_\alpha \cap B \neq \emptyset \Rightarrow S_\alpha \cap A = \emptyset$, $\forall \alpha$. Logo, $A = S \cap A = (\cup_\alpha S_\alpha) \cap A = \cup_\alpha (S_\alpha \cap A) = \emptyset$. ■

EXAMPLE 20. Os "Retângulos do $\mathbb{R}^2$ " são conexos .

$R = I \times J$; $I, J \subset \mathbb{R}$ intervalos, fixemos $(a, b) \in \mathbb{R}$.

$C_x = I \times \{b\} \cup \{x\} \times J$ é conexo

"os intervalos da reta são conexos "

$R = \cup_{x \in I} C_x$ é conexo.

$(a, b) \in \cap_{x \in I} C_x$.

PROPOSITION 21. Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}$ é conexo $\Leftrightarrow S$ é um intervalo.

Prova: ($\Rightarrow$) i) Se S não é um intervalo, então S não é conexo.

S não é um intervalo $\Rightarrow$ existem $a, b \in S$ e $a < c < b$, com $c \notin S$.

$$S = \underbrace{[(-\infty, c) \cap S]}_A \cup \underbrace{[(c, \infty) \cap S]}_B$$

(i) $A \neq \emptyset$, $a \in A$.

(ii) $B \neq \emptyset$, $b \in B$.

(iii) $A \cap B = \emptyset$.

(iv) A e B são abertos em $S \Rightarrow S$ é desconexo.

($\Leftarrow$) Suponha que S é um intervalo e que S não é conexo.

$S = A \cup B$, A e B abertos em S , $A \cap B = \emptyset$ e $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$.

Sejam $a \in A$ e $b \in B$, com $a < b$. Como S é um intervalo e $a, b \in S$ então $[a, b] \subset S$. Seja $c = \sup\{[a, b] \cap A\}$ então

(i) $a \leq c \leq b$

(ii) $a < c$

prova de (ii) : $a \in A \Rightarrow \exists \delta > 0$; $(a, a + \delta) = (a, a + \delta) \cap S \subset A$.

Se $a = c$, então $A \subset]-\infty, a] \Rightarrow (a, a + \delta) \cap A = \emptyset$ (contradição).

(iii) $c < b$

$b \in B \Rightarrow \exists \delta > 0$; $(b - \delta, b) = (b - \delta, b) \cap S \subset B$

se $b = c$, então $b - \delta$ não é cota superior e portanto existe $x \in]b - \delta, b] \cap A \Rightarrow x \in A \cap B$ (contradição).

Logo, $a < c < b$.

Afirmção: $c \in A \cap B$ (contradizendo $A \cap B = \emptyset$).

(i) A e B são fechados em S , isto é, $A = \overline{A}$ e $B = \overline{B}$.

(ii) $x_k = c + \frac{1}{k} \rightarrow c \Rightarrow c \in \overline{B}$

(iii) $y_k = c - \frac{1}{k} \rightarrow c \Rightarrow c \in \overline{A}$

$\Rightarrow c \in A \cap B$. ■

DEFINIO 22. *Seja $S \subset \mathbb{R}^n$. Um ponto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ é um "ponto de acumulação" de S quando: $\forall \varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(x_0)$ contém uma infinidade de pontos de S .*

EXAMPLE 23. (i) $S = (0, 1) \subset \mathbb{R} = (0, 1) \subset \mathbb{R}$.

Dado $0 < x_0 < 1$, então $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap S = \text{intervalo (não-degenerado)} \Rightarrow (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap S$ é infinito. x_0 é ponto de acumulação.

$S' = \text{conjunto dos pontos de acumulação de } S = [0, 1]$.

(ii) $S = \{(1, \frac{1}{n}), n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}^2$, $S' = \{(1, 0)\}$.

(iii) $S = \{((-1)^n, \frac{1}{n}); n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}^2$, $S' = \{(-1, 0), (0, 1)\}$

DEFINIO 24. Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ é "limitado " quando existir $R > 0$ tal que $S \subset B_R(0)$.

TEOREMA 25. (Bolzano-Weierstrass) Todo subconjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ infinito e limitado tem um ponto de acumulação.

Demonstração:

1º Caso: Unidimensional

Seja $a = \inf S$, $b = \sup S$. Então, $S \subset [a, b]$.

(i) Se a for um ponto de acumulação de S o Teorema estará provado.

(ii) Suponhamos que a não é um ponto de acumulação de S .

Seja $L = \{x \in \mathbb{R}, [a, x] \cap S \text{ é finito}\}$

(i) $L \neq \emptyset$.

Prova: a não é ponto de acumulação de $S \Rightarrow \exists \delta > 0$ tal que $(a - \delta, a + \delta) \cap S$ é finito. Escolha $x \in [a, a + \delta[$, $x \in L$, porque $[a, x] \cap S \subset [a - \delta, a + \delta] \cap S$.

(ii) L é limitado superiormente.

Prova:

Seja $y > b$, com $y \in L$

$[a, y] \cap S$ é finito $\Rightarrow [a, b] \cap S$ é finito $\Rightarrow S$ é finito (contradição).

Logo, $L \subset (-\infty, b]$

Seja $\beta = \sup L$.

Afirmção: $\beta \in S'$. De fato, se β não fosse ponto de acumulação de S existiria $\varepsilon > 0$ tal que $(\beta - \varepsilon, \beta + \varepsilon) \cap S$ é finito. Sejam $x \in (\beta - \varepsilon, \beta)$ e $y \in (\beta, \beta + \varepsilon)$ então

$[x, y] \cap S \subset (\beta - \varepsilon, \beta + \varepsilon) \cap S$ é finito. Como $[a, x] \cap S$ é finito então $[a, y] \cap S \subset ([a, x] \cap S) \cup ([x, y] \cap S)$ é finito $\Rightarrow y \in L$ (contradição).

2º Caso: Multidimensional

Seja $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n, \dots\} \subset S$, limitado com $\mathbf{x}_i \neq \mathbf{x}_j$, $i \neq j$, $\mathbf{x}_k =$

$(x_k^1, x_k^2, \dots, x_k^n) \in S \subset \mathbb{R}^n$, $|x_k^j| \leq \|\mathbf{x}_k\| \leq C$

$S_1 = \{x_1^1, x_2^1, x_3^1, \dots\} \subset \mathbb{R}$

$S_2 = \{x_1^2, x_2^2, x_3^2, \dots\} \subset \mathbb{R}$

$\vdots$

$$S_k = \{x_1^k, x_2^k, x_3^k, \dots\} \subset \mathbb{R}$$

Supor S_1 é infinito e sendo limitado possui um ponto de acumulação.

Seja $P = (x, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, onde a_j é um ponto de acumulação de S_j , se existir, ou a_j é o valor constante em S_j , se S_j for finito. P é ponto de acumulação de S .

Conjuntos Compactos

- (1) Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto e seja $\mathcal{C}$ uma coleção de abertos do $\mathbb{R}^n$ cuja união contém S , isto é,

$$S \subset \bigcup_{A_\lambda \in \mathcal{C}} A_\lambda.$$

Uma tal coleção $\mathcal{C}$ é denominada "cobertura aberta" de S .

Uma "subcobertura aberta" de S é um subconjunto $\mathcal{C}^*$ de $\mathcal{C}$ que ainda é uma cobertura de S .

EXAMPLE 26. 1. Seja $S \subset \mathbb{R}^n$. Dado $r > 0$ fixado, considere a seguinte

$$\mathcal{C} = \{B_r(x), x \in S\}; S \subset \mathbb{R}^n$$

$\mathcal{C}$ é uma cobertura aberta de S . A coleção

$$\mathcal{C}^* = \{B_r(x), x \in S \cap \mathbb{Q}^n\}$$

$\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{Q}^n$ é denso no $\mathbb{R}^n$.

$S \cap \mathbb{Q}^n$ é denso em S ($\overline{S \cap \mathbb{Q}^n} = \overline{S} \cap \overline{\mathbb{Q}^n} = \overline{S}$).

Dado $x \in S$, seja $y \in S \cap \mathbb{Q}^n$ tal que $\|x - y\| < r$ (por densidade) $x \in B_r(y)$ e $B_r(y) \in \mathcal{C}^*$. Logo, $\mathcal{C}^*$ é uma subcobertura aberta.

$$2. \mathcal{C} = \{(\frac{1}{n}, 1); n = 1, 2, 3, \dots\}$$

$\mathcal{C}$ é uma cobertura (aberta) de $(0, 1)$.

Prova de 2.: Seja $x \in (0, 1)$. Como $\lim_n \frac{1}{n} = 0$, existe um índice n_0 tal que $\frac{1}{n} < x < 1, \forall n \geq n_0 \Rightarrow x \in (\frac{1}{n_0}, 1)$. ■

$\mathcal{C}$ não admite subcobertura finita.

Prova: Seja $n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_k$

$\mathcal{C}^* = \{(\frac{1}{n_j}, 1); j = 1, \dots, k\} \Rightarrow \bigcup_{j=1}^k (\frac{1}{n_j}, 1) = (\frac{1}{n_k}, 1) \Rightarrow (0, 1)$ não é compacto.

DEFINIO 27. Um subconjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ é "compacto" quando toda cobertura aberta admitir uma subcobertura finita.

EXAMPLE 28. (1) $(0, 1), (0, 1], [0, 1)$ não são compactos para $[0, 1]$ considere $\mathcal{C} = \{(-\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}); n \in \mathbb{N}\}$.

(2) $K = [a, b], -\infty < a \leq b < \infty$ é compacto.

Prova de (2): Seja $\mathcal{C}$ uma cobertura aberta de $[a, b]$. Seja $L = \{x \in [a, b]; [a, x] \text{ pode ser coberto por um número finito de abertos de } \mathcal{C}\}$

$\cdot L \neq \emptyset$ (porque $a \in L$)

$\cdot \cdot L$ é limitado ($L \subset [a, b]$).

Seja $\alpha = \sup L$

$\cdot \cdot \cdot \alpha \in [a, b]$, pois $[a, b]$ é fechado.

Afirmção: $\alpha \in L$

Como $\alpha \in [a, b]$ e $\mathcal{C}$ é uma cobertura de $[a, b] \Rightarrow \exists A \in \mathcal{C}$ tal que $\alpha \in A$. Logo existe $\delta > 0$ tq $(\alpha - \delta, \alpha + \delta) \subset A \Rightarrow \exists x \in L; \beta < x$. Seja $x \in A \cap L$; $\alpha - \delta < x \leq \alpha$, temos $[a, x] \subset A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$, $A_j \in \mathcal{C} \Rightarrow [a, \alpha] \subset A_1 \cup \dots \cup A_k \cup A \Rightarrow \alpha \in L$.

Afirmção: $\alpha = b$.

Se α fosse $< b$, existiria $A \in \mathcal{C}$ e $x \in A$ tq. $\alpha < x < b$ e $[\alpha, x] \subset A$. Logo $[a, \alpha] \subset A_1 \cup \dots \cup A_k$ e $[a, x] \subset A_1 \cup \dots \cup A_k \cup A$; $A, A_j \in \mathcal{C} \Rightarrow x \in L$ (contradição). ■

EXAMPLE 29. $K \subset \mathbb{R}^n$ e $L \subset \mathbb{R}^m$ são compactos, então $K \times L \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \approx \mathbb{R}^{n+m}$ é compacto.

Dados $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, seja $\mathcal{C} = \{V \times W\}$ uma cobertura aberta de $K \times L$. Sejam $\mathcal{C}_K = \{V\}$ e $\mathcal{C}_L = \{W\}$ temos que $\mathcal{C}_K$ e $\mathcal{C}_L$ admitem subcoberturas finitas, porque K e L são compactos, $\mathcal{C}_K^* = \{V_1, V_2, \dots, V_r\}$, $\mathcal{C}_L^* = \{W_1, W_2, \dots, W_s\}$

$\mathcal{C}^* = \{V_i \times W_j\}_{1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s}$ temos $K \subset \cup_{i=1}^r V_i$, $L \subset \cup_{j=1}^s W_j \Rightarrow K \times L \subset \cup_{V_i \times W_j \in \mathcal{C}^*} V_i \times W_j$. ■

EXAMPLE 30. $S \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto finito é compacto.

$S = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$

Seja $\mathcal{C}$ uma cobertura de S , então $x_1 \in A_1, \dots, x_k \in A_k$, $A_i \in \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{C}^* = \{A_1, \dots, A_k\}$ cobre S .

EXAMPLE 31. Se K é compacto e $F \subset K$ é fechado, então F é compacto.

Prova: Seja $\mathcal{C}$ uma cobertura de F . Então, $\mathcal{C}_K = \mathcal{C} \cup \{\mathbb{R}^n - F\}$ é uma cobertura aberta de K a qual admite subcobertura finita

$$K \subset (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) \cup (\mathbb{R}^n - F) \Rightarrow F \subset A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k. \blacksquare$$

TEOREMA 32. (Heine-Borel) $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto $\Leftrightarrow$ é fechado e limitado.

Demonstração: $(\Leftarrow) K$ limitado $\Rightarrow K \subset I^n = I \times \dots \times I$, $I = [a, b]$. Temos que I^n é compacto (veja o exemplo acima). Como K é fechado e $K \subset I^n \Rightarrow K$ é compacto.

$(\Rightarrow)$ Suponhamos $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto.

(i) K é limitado

$\mathcal{C} = \{B_1(x), x \in K\}$ é uma cobertura aberta de K e sendo K compacto esta cobertura admite uma subcobertura finita, isto é,

$$K \subset B_1(x_1) \cup \dots \cup B_1(x_r)$$

Dado $x \in K$, $x \in B_1(x_i)$, para algum $i = 1, 2, \dots, r$.

$$\|x\| = \|x - x_i + x_i\| \leq \|x - x_i\| + \|x_i\| < 1 + \|x_i\| \leq 1 + \|x_1\| + \dots + \|x_r\|$$

$$\|x\| \leq M, \forall x \in K.$$

(ii) K é fechado

Se K não fosse fechado, existiria $x \in \partial K$ tq. $x \notin K$. Tome $\mathcal{C} = \{\mathbb{R}^n - B_{\frac{1}{n}}[x], n \in \mathbb{N}\}$.

Seja $y \in K$ e considere n tq. $\frac{1}{n} < \|x - y\| \Rightarrow y \notin B_{\frac{1}{n}}[x] \Rightarrow y \in \mathbb{R}^n - B_{\frac{1}{n}}[x]$. Portanto $\mathcal{C}$ é uma cobertura aberta de K . Se $n_1 < n_2 < \dots < n_r$ então

$$\cup_{j=1}^{n_r} (B_{\frac{1}{n_j}}[x])^C = \cup_{j=1}^{n_r} (\mathbb{R}^n - B_{\frac{1}{n_j}}[x]) = (B_{\frac{1}{n_r}}[x])^C$$

isto contradiz o fato de $x \in \partial K$.

3. Sequências em $\mathbb{R}^n$

Uma sequência em $\mathbb{R}^n$ é uma função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida no conjunto

$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ dos números naturais.

Notação: (x_n) representa a sequência $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $f(n) = x_n$.

Convergência:

Fixemos uma norma $\|\cdot\|$ em $\mathbb{R}^n$. Dizemos que uma sequência (x_n) em $\mathbb{R}^n$ "converge" para x quando:

$$(2) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \text{ tal que } \|x_n - x\| < \varepsilon, \forall n \geq n_0$$

Interpretação:

$$\|x_n - x\| < \varepsilon \Leftrightarrow x_n \in B_\varepsilon(x).$$

A sentença (2) afirma que fora da bola $B_\varepsilon(x)$ existe, no máximo, $n_0 - 1$ termos da sequência.

Exemplo: (1) $x_n = (\frac{1}{n}, -\frac{n}{n^2+1})$ (sequência em $\mathbb{R}^2$, $\|\cdot\|_\infty$)

$$\|x_n - 0\|_\infty = \|x_n\|_\infty = \max\{\frac{1}{n}, \frac{n}{n^2+1}\} = \frac{1}{n}$$

$\forall \varepsilon > 0$, seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Se $n \geq n_0$ então $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$.

Logo,

$$\|x_n - 0\|_\infty < \varepsilon, \forall n \geq n_0 \Rightarrow x_n \rightarrow 0 \text{ ou } \lim x_n = 0 \text{ ou } \lim(\frac{1}{n}, -\frac{n}{n^2+1}) = (0, 0).$$

$$(2) \quad y_n = ((-1)^n, \frac{1}{n}) \text{ (não converge)}$$

$$y_{2n} = (1, \frac{1}{2n}) \rightarrow (1, 0)$$

$$y_{2n-1} = (-1, \frac{1}{2n-1}) \rightarrow (-1, 0).$$

O que acontece com a convergência quando se muda a norma do $\mathbb{R}^n$?

$$|\cdot| \sim \|\cdot\| \Leftrightarrow c_1|x| \leq \|x\| \leq c_2|x|, \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Seja (x_n) uma sequência convergente na norma $|\cdot|$.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, |x_n - x| < \varepsilon, \forall n \geq n_0$$

Logo, $\|x_n - x\| \leq c_2|x_n - x| < c_2\varepsilon, \forall n \geq n_0 \Rightarrow x_n \rightarrow x$, na norma $\|\cdot\|$.

Resultados Clássicos

1. Toda sequência (x_n) convergente é limitada.

$$\text{Prova: } \exists n_0 \in \mathbb{N}; \|x_n - x\| < 1, \forall n \geq n_0$$

$$\|x_n\| \leq \|x_n - x\| + \|x\| < 1 + \|x\|, \forall n \geq n_0.$$

$$\text{Seja } M = \|x_1\| + \dots + \|x_{n_0}\| + 1 + \|x\| \Rightarrow \|x_n\| \leq M, \forall n. \blacksquare$$

2. Seja $\vec{x}_n = (x_n, y_n, z_n)$ uma sequência em $\mathbb{R}^3$. Então, $\vec{x}_n \rightarrow \vec{x} = (x, y, z) \Leftrightarrow x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y, z_n \rightarrow z$.

Prova: $(\Rightarrow)$ Suponhamos que $\vec{x}_n \rightarrow \vec{x}$ e consideremos $\mathbb{R}^3$ com a norma $\|\cdot\|_\infty$.

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|\vec{x}_n - \vec{x}\|_\infty < \varepsilon, \forall n \geq n_0$. Como

$\|\vec{x}_n - \vec{x}\|_\infty = \max\{|x_n - x|, |y_n - y|, |z_n - z|\}$ segue que $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y$ e $z_n \rightarrow z$.

$(\Leftarrow)$ Consideremos em $\mathbb{R}^3$ a norma $\|\cdot\|_s$:

$$x_n \rightarrow x \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_1; |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{3}; n \geq n_1$$

$$y_n \rightarrow y \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_2; |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{3}; n \geq n_2$$

$$z_n \rightarrow z \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_3; |z_n - z| < \frac{\varepsilon}{3}; n \geq n_3$$

Escolha $n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$ se $n \geq n_0$, então

$$\|x_n - x\|_s = |x_n - x| + |y_n - y| + |z_n - z| < \varepsilon, \forall n \geq n_0. \blacksquare$$

3. Seja $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y$ em $\mathbb{R}^n$ e $\lambda_n \rightarrow \lambda$ em $\mathbb{R}$.

Então:

$$(3.1) \quad x_n + y_n \rightarrow x + y;$$

$$(3.2) \quad \lambda_n x_n \rightarrow \lambda x;$$

$$(3.3) \quad \langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle.$$

Prova (3.2): Seja $\varepsilon > 0$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|\lambda_n - \lambda| < \varepsilon$ e $\|x_n - x\| < \varepsilon, \forall n \geq n_0$. Temos

$$\begin{aligned} \|\lambda_n x_n - \lambda x\| &= \|\lambda_n x_n - \lambda x_n + \lambda x_n - \lambda x\| \leq \|(\lambda_n - \lambda)x_n\| + \|\lambda(x_n - x)\| \\ &\leq |\lambda_n - \lambda| \|x_n\| + |\lambda| \|x_n - x\| \end{aligned}$$

Seja $M \geq \|x_n\|; \forall n$ (tal M existe porque (x_n) sendo convergente é limitada).

Logo,

$$\|\lambda_n x_n - \lambda x\| \leq M |\lambda_n - \lambda| + |\lambda| \|x_n - x\| < M\varepsilon + |\lambda| \varepsilon, \forall n \geq n_0. \blacksquare$$

$$(3.3) \quad \|x_n - x\| < \varepsilon, \forall n \geq n_0$$

$$\|y_n - y\| < \varepsilon, \forall n \geq n_0$$

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| &= |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, y \rangle + \langle x_n, y \rangle - \langle x, y \rangle| \\ &\leq |\langle x_n, y_n - y \rangle| + |\langle x_n - x, y \rangle| \\ &\leq \|x_n\| \|y_n - y\| + \|y\| \|x_n - x\| \\ &< \varepsilon(M + \|y\|), \forall n \geq n_0. \blacksquare \end{aligned}$$

4. $x \in \overline{S} \Leftrightarrow$ Existe uma sequência (x_n) em S que converge para x .

Prova:

$$(\Rightarrow) x \in \overline{S} = S \cup \partial S.$$

Se $x \in S$ considere a sequência constante $x_n = x, \forall n$. Então $(x_n) \subset S$ e $\|x_n - x\| = 0, \forall n \Rightarrow x_n \rightarrow x$. Se $x \notin S$, então $x \in \partial S$ e para cada $n \in \mathbb{N}$ a bola $B_{\frac{1}{n}}(x)$ contém um ponto x_n de S . Temos que

$$(i) (x_n) \subset S;$$

$$(ii) \|x_n - x\| < \frac{1}{n} \Rightarrow x_n \rightarrow x.$$

$$(\Leftarrow) x_n \rightarrow x, x_n \in S, \forall n. x \in \overline{S} \Leftrightarrow x \in S \text{ ou } x \in \partial S.$$

Se $x \notin S$, então $x \in \partial S$. De fato, $\forall \varepsilon > 0$, a bola $B_\varepsilon(x)$ contém os termos x_n para $n \geq n_0$. Logo, $B_\varepsilon(x) \cap S \neq \emptyset$. Como $x \notin S$, então $B_\varepsilon(x) \cap S^C \neq \emptyset$. Logo, $x \in \partial S$.

4. Subsequências

Dada uma sequência $\mathbf{x}_n = (x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^N)$ em $\mathbb{R}^N$ a restrição de (x_n) a um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$ é denominada "subsequência" de (x_n) .

EXAMPLE 33. $x_n = ((-1)^n, \frac{n}{n+1}); n \in \mathbb{N}$. Considere $\mathbb{N}_1 = \{2, 4, 6, \dots\} \subset \mathbb{N}$, $\mathbb{N}_2 = \{1, 3, 5, \dots\} \subset \mathbb{N}$. Temos que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_1} = \{(1, \frac{2}{3}), (1, \frac{4}{5}), (1, \frac{6}{7}), \dots\} \rightarrow (1, 1)$

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}_2} = \{(-1, \frac{1}{2}), (-1, \frac{3}{4}), (-1, \frac{5}{6}), \dots\} \rightarrow (-1, 1)$$

Em geral: $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < n_3 < \dots\}$

$(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ é uma subsequência de (x_n) .

LEMMA 34. Se (x_n) converge para x então qualquer subsequência de (x_n) também converge para x .

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_n - x\| < \varepsilon, \forall n \geq n_0.$$

Se $n_k \geq n_0$ então $\|x_{n_k} - x\| < \varepsilon$. ■

PROPOSITION 35. Todo subconjunto limitado $S \subset \mathbb{R}^n$ possui uma subsequência convergente.

Prova: $S \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto limitado. Suponhamos que S é infinito. Pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass S tem um ponto de acumulação x .

Para $n = 1$ escolha $x_{n_1} \in B_1(x) \cap S$; $x_{n_1} \neq x$.

Para $n = 2$ escolha $x_{n_2} \in B_{\frac{1}{2}}(x) \cap S$; $x_{n_2} \neq x_{n_1}$.

$\vdots$

Para $n = k$, escolha $x_{n_k} \in B_{\frac{1}{k}}(x) \cap S$; $x_{n_k} \neq x_{n_j}, \forall j$

$\|x_{n_k} - x\| < \frac{1}{k} \rightarrow 0 \Rightarrow x_{n_k} \rightarrow x$.

Se S for finito considere a subsequência constante. ■

PROPOSITION 36. *Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ com a seguinte propriedade: Toda sucessão de pontos de S possui uma subsequência convergente. Então, S é limitada.*

Prova: Suponha que S não é limitado. Para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos encontrar $x_n \in S$ tal que $\|x_n\| \geq n$. Nenhuma subsequência de (x_n) é limitada, pois $\|x_{n_k}\| \geq n_k \rightarrow \infty \Rightarrow (x_n)$ não possui subsequência convergente. ■

PROPOSITION 37. *$S \subset \mathbb{R}^n$ é compacto $\Leftrightarrow$ toda sequência de pontos de S possui uma subsequência convergente para um ponto de S .*

Prova: $(\Rightarrow)$ Suponhamos S compacto e seja (x_n) uma sequência em S . S é limitado $\Rightarrow (x_n)$ é limitada $\Rightarrow (x_n)$ possui uma subsequência convergente, seja $x = \lim x_{n_k}$. Temos que $(x_{n_k}) \subset S \Rightarrow x \in \overline{S}$. Como S é fechado $\Rightarrow S = \overline{S} \Rightarrow x \in S$.

$(\Leftarrow)$ Pela proposição anterior, segue que S é limitado. Dado $x \in \overline{S}$, então $x = \lim x_n, x_n \in S \Rightarrow x \in S \Rightarrow \overline{S} \subset S \Rightarrow S = \overline{S} \Rightarrow S$ é fechado. ■

Sequências de Cauchy

Uma sequência (x_n) em $\mathbb{R}^n$ é de *Cauchy* quando : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}; \|x_n - x_m\| < \varepsilon, \forall n, m \geq n_0$.

EXAMPLE 38. $S = (0, 1]$; $x_n = \frac{1}{n}, y_n = 1 - \frac{1}{n}, n \geq 2$. $\lim x_n = 0$, $\lim y_n = 1$; (y_n) converge em S (porque $\lim y_n = 1 \in S$), (x_n) não converge em S (porque $\lim x_n = 0 \notin S$).

PROPOSITION 39. *Toda sequência convergente é de Cauchy.*

Prova: $x_k \rightarrow x$; $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\|x_k - x\| < \varepsilon$, $\forall k \geq n_0$.

$$\|x_n - x_m\| \leq \|x_n - x\| + \|x_m - x\| < 2\varepsilon, \quad m, n \geq n_0. \blacksquare$$

LEMMA 40. *Toda sequência de Cauchy é limitada.*

Prova: $\exists n_0 \in \mathbb{N}; \|x_n - x_m\| < 1$, $n, m \geq n_0$.

$\|x_n - x_{n_0}\| < 1 \Rightarrow \|x_n\| \leq \|x_n - x_{n_0}\| + \|x_{n_0}\| < 1 + \|x_{n_0}\|$. Daí se conclui o resultado. $\blacksquare$

PROPOSITION 41. $\mathbb{R}^n$ é completo (*ser completo significa que toda sequência de Cauchy é convergente*).

Prova: Seja (x_n) de Cauchy em $\mathbb{R}^n$. Pelo Lema (x_n) é limitada e portanto (x_n) possui uma subsequência (x_{n_k}) convergente para $x \in \mathbb{R}^n$.

$\|x_{n_k} - x\| < \varepsilon$; $n_k \geq n_0$. Assim temos que

$$\|x_n - x\| \leq \|x_{n_k} - x_n\| + \|x_{n_k} - x\| < 2\varepsilon, \quad n \geq n_0. \blacksquare$$

$(-1)^n$ não é de Cauchy $\Rightarrow (-1)^n$ é divergente .

$$|(-1)^n - (-1)^{n+1}| = 2.$$

COROLLARY 42. *Todo subconjunto (subespaço) fechado do $\mathbb{R}^n$ é completo.*

Prova: Seja (x_n) de Cauchy em $S \Rightarrow (x_n)$ é de Cauchy em $\mathbb{R}^n \Rightarrow x_n \rightarrow x$ em $\mathbb{R}^n$ (pela completeza do $\mathbb{R}^n$). Como $(x_n) \subset S$ então $x \in \overline{S} = S$.

CHAPTER 2

Funções Contínuas

DEFINIO 43. $f : S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, x_0 \in S$. f é contínua em x_0 quando "pontos vizinhos" de x_0 são transformados em "pontos vizinhos" de $f(x_0)$. Analiticamente, f é contínua em x_0 , quando: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $f(B_\delta(x_0) \cap S) \subset B_\varepsilon(f(x_0))$.

Equivalentemente: $x \in S, \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$.

Exemplos do Cálculo:

- (1) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$, se $(x, y) \neq (0, 0)$ e $f(0, 0) = 0$.

Vamos investigar a continuidade em $x_0 = (0, 0)$.

$$\begin{aligned} \|f(x, y) - f(0, 0)\| &= \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} - 0 \right| = \frac{x^2 |y|}{x^2 + y^2} \leq \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} \sqrt{x^2 + y^2} = \\ &= \sqrt{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Temos que: $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $\|(x, y) - (0, 0)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Se $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ então $\|f(x, y) - f(0, 0)\| < \delta$. Dado $\varepsilon > 0$

tome $\delta = \varepsilon$.

- (2) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

A função $f(x, y)$ não é contínua na origem, pois

$$f(x, y) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}, \text{ se } x \neq 0$$

$$f(0, 0) = 0$$

Tomando $\varepsilon = \frac{1}{4}$, $\nexists \delta > 0$ tal que $|f(x, y) - f(0, 0)| < \varepsilon, \forall (x, y) \in B_\delta(0, 0)$.

f não é contínua em x_0 quando: $\exists \varepsilon > 0; \forall \delta > 0$ se tem

$\|f(x) - f(x_0)\| \geq \varepsilon$ e $\|x - x_0\| < \delta$, para algum $x \in S$.

- (3) *Projeções*: $\pi_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}; \pi_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_j, j = 1, \dots, n$.

$$|\pi_j(x) - \pi_j(x_0)| = |x_j - x_j^0| \leq \|x - x_0\|$$

Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta = \varepsilon$. Se $\|x - x_0\| < \delta$, então $|\pi_j(x) - \pi_j(x_0)| < \varepsilon$. Logo, π_j é contínua em qualquer ponto x_0 do $\mathbb{R}^n$.

(4) *Funções Componentes*

Seja $f : S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e defina $f_j = \pi_j \circ f$

$f(\mathbf{x}_0) = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x}_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n) \in S \subset \mathbb{R}^n$.

$\pi_j(f(x_0)) = y_j$, isto é, $f_j(\mathbf{x}_0) = y_j$.

$f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$

As funções $f_1, f_2, \dots, f_m$ são as "componentes de f ".

$f_j : S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

PROPOSITION 44. *Sejam $f, g : S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ contínuas em x_0 e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então as funções $f + \lambda g$ e $\langle f, g \rangle$ são contínuas em x_0 .*

Prova: Dado $\varepsilon > 0$, existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que

$x \in S$ e $\|x - x_0\| < \delta_1 \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \frac{\varepsilon}{2}$

$x \in S$ e $\|x - x_0\| < \delta_2 \Rightarrow \|g(x) - g(x_0)\| < \frac{\varepsilon}{2|\lambda|}$

$$\begin{aligned} \|(f + \lambda g)(x) - (f + \lambda g)(x_0)\| &\leq \|f(x) - f(x_0)\| + |\lambda| \|g(x) - g(x_0)\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + |\lambda| \frac{\varepsilon}{2|\lambda|} = \varepsilon \end{aligned}$$

quando $x \in S$ e $\|x - x_0\| < \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.

Para a função $x \rightarrow \langle f(x), g(x) \rangle$, temos

$$\begin{aligned} &|\langle f(x), g(x) \rangle - \langle f(x_0), g(x_0) \rangle| = \\ &|\langle f(x), g(x) \rangle - \langle f(x_0), g(x) \rangle + \langle f(x_0), g(x) \rangle - \langle f(x_0), g(x_0) \rangle| \\ &\leq |\langle f(x) - f(x_0), g(x) \rangle| + |\langle f(x_0), g(x) - g(x_0) \rangle| \\ &\leq \|f(x) - f(x_0)\| \|g(x)\| + \|f(x_0)\| \|g(x) - g(x_0)\| \end{aligned}$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0$ tal que $\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$, se $\|x - x_0\| < \delta_1$

$\exists \delta_2 > 0$ tal que $\|f(x) - f(x_0)\| < 1$, se $\|x - x_0\| < \delta_2$

$\exists \delta_3 > 0$ tal que $\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$, se $\|x - x_0\| < \delta_3$

tome $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$. Logo,

$$|\langle f(x), g(x) \rangle - \langle f(x_0), g(x_0) \rangle| < \varepsilon(1 + \|f(x_0)\| + \|g(x_0)\|). \blacksquare$$

COROLLARY 45. *A função produto : $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \rightarrow xy \in \mathbb{R}$ é contínua.*

Prova: $\pi_1, \pi_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\pi_1(x, y) = x$, $\pi_2(x, y) = y$ são contínuas e $xy = \langle \pi_1, \pi_2 \rangle$. $\blacksquare$

PROPOSITION 46. $f : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $g : W \rightarrow \mathbb{R}^p$ com $f(V) \subset W$. Se f é contínua em $x_0 \in V$ e g é contínua em $y_0 = f(x_0) \in W$, então $g \circ f$ é contínua em x_0 .

Prova: g é contínua em $y_0 = f(x_0) \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; g(B_\delta(f(x_0)) \cap W) \subset B_\varepsilon(g(y_0))$.

f é contínua em $x_0, \exists \delta' > 0; f(B_{\delta'}(x_0) \cap V) \subset B_\delta(f(x_0)) \subset B_\delta(f(x_0)) \cap W \Rightarrow g(f(B_{\delta'}(x_0) \cap V)) \subset g(B_\delta(f(x_0)) \cap W) \subset B_\varepsilon(g(y_0)) \Rightarrow (g \circ f)(B_{\delta'}(x_0) \cap V) \subset B_\varepsilon(g \circ f(x_0)). \blacksquare$

PROPOSITION 47. $f = (f_1, \dots, f_m) : S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é contínua em $x_0 \in S \Leftrightarrow$ cada componente $f_j : S \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em x_0 .

Prova: $(\Rightarrow) f_j = \pi_j \circ f$ é contínua.

$(\Leftarrow)$ Suponhamos cada componente $f_j, j = 1, 2, \dots, m$ contínua em x_0 . Temos

$\|f(x) - f(x_0)\|_S = |f_1(x) - f_1(x_0)| + \dots + |f_m(x) - f_m(x_0)|$
 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m > 0$ tais que $x \in S, \|x - x_0\| < \delta_k \Rightarrow |f_k(x) - f_k(x_0)| < \varepsilon/m, k = 1, \dots, m$. Tome $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m\}$ se $\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon/m + \dots + \varepsilon/m = \varepsilon. \blacksquare$

PROPOSITION 48. Uma função $f : S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é contínua no ponto x_0 de $S \Leftrightarrow$ para toda sequência (x_n) em $S, x_n \rightarrow x_0$, tem-se $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$.

Prova: $(\Rightarrow)$ Suponhamos f contínua em x_0 e seja $\varepsilon > 0$ dado. $\exists \delta > 0$ tal que $f(B_\delta(x_0) \cap S) \subset B_\varepsilon(f(x_0))$. Como $x_n \rightarrow x_0$, ao $\delta > 0$ corresponde um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} \|x_n - x_0\| < \delta, n \geq n_0 &\Rightarrow x_n \in B_\delta(x_0) \text{ e } x_n \in S \\ &\Rightarrow x_n \in B_\delta(x_0) \cap S \Rightarrow f(x_n) \in B_\varepsilon(f(x_0)) \\ &\Leftrightarrow \|f(x_n) - f(x_0)\| < \varepsilon, n \geq n_0 \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x_0). \end{aligned}$$

$(\Leftarrow)$ Suponhamos que $x_n \rightarrow x_0, x_n \in S \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x_0)$. Se f não fosse contínua em x_0 , existiria um $\varepsilon > 0$ e um $y_n \in S$ tal que

$$\|y_n - x_0\| < \frac{1}{n} \text{ e } \|f(y_n) - f(x_0)\| \geq \varepsilon$$

o que é uma contradição com a hipótese.

EXAMPLE 49. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ (não é contínua em $x = 0$)

$x_n = \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}} \rightarrow 0$, $f(x_n) = \operatorname{sen}(n\pi + \frac{\pi}{2}) = (-1)^n$ diverge.

DEFINIO 50. $f : S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é dita "contínua" quando for contínua em cada ponto de S .

PROPOSITION 51. $f : S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é contínua $\Leftrightarrow f^{-1}(A)$ é aberto em S , para todo conjunto A aberto do $\mathbb{R}^m$.

(Exercício: pode-se substituir aberto por fechado)

Prova: ($\Rightarrow$) Suponhamos que f é contínua e seja $A \subset \mathbb{R}^m$ aberto.

$$f^{-1}(A) = \{x \in S; f(x) \in A\}$$

seja $x \in f^{-1}(A)$, então $f(x) \in A$ e como A é aberto, $\exists \varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(f(x)) \subset A$. Como f é contínua em x , existe um $\delta > 0$ tal que $f(B_\delta(x) \cap S) \subset B_\varepsilon(f(x))$. Logo,

$$B_\delta(x) \cap S \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(x))) \subset f^{-1}(A).$$

($\Leftarrow$) Suponhamos que $f^{-1}(A)$ é aberto em S , para todo $A \subset \mathbb{R}^m$ aberto. Mostremos que f é contínua em $x \in S$. Seja $\varepsilon > 0$ dado. O conjunto $A = B_\varepsilon(f(x))$ é aberto em $\mathbb{R}^m$ e portanto $A_1 = f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ é aberto em S e $x \in A_1$ (pois $f(x) \in B_\varepsilon(f(x))$).

Logo, $\exists \delta > 0$ tal que $B_\delta(x) \cap S \subset A_1 \Rightarrow f(B_\delta(x) \cap S) \subset f(A_1) \subset B_\varepsilon(f(x))$. ■

EXAMPLE 52. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 - y^2 < 1\}$. $f(x, y) = x^2 - y^2$ é contínua e $A = f^{-1}(]-\infty, 1[)$ é aberto.

EXAMPLE 53. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$. $g(x, y) = x^2 + y^2$ é contínua e $B = g^{-1}(\{1\})$. Como $\{1\}^C =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$ é aberto $\Rightarrow \{1\}$ é fechado $\Rightarrow g^{-1}(\{1\})$ é fechado.

COROLLARY 54. Se $f : S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é contínua e A é aberto em $f(S)$, então $f^{-1}(A)$ é aberto em S .

Prova: $A = f(S) \cap V$, V aberto do $\mathbb{R}^m \Rightarrow f^{-1}(A) = S \cap f^{-1}(V)$ é aberto em S . ■

PROPOSITION 55. *Se $f : S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é contínua e $S \subset \mathbb{R}^n$ é conexo, então $f(S)$ é conexo.*

Prova: Suponhamos que $f(S) = A \cup B$; onde A e B são abertos em $f(S)$, $A \cap B = \emptyset$ e $A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$. $f(S) = A \cup B \Rightarrow S = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \Rightarrow S$ é desconexo (contradição). ■

COROLLARY 56. *Se $S \subset \mathbb{R}^n$ é conexo e $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, então f assume todos os valores entre $f(a)$ e $f(b)$. ($f(a) < f(b)$).*

Prova: $f(S) \subset \mathbb{R}^m$ é conexo $\Rightarrow f(S)$ é um intervalo de extremos α e β . $f(a), f(b) \in f(S)$ e portanto todo $y \in [f(a), f(b)]$ está em $f(S)$. Logo, existe $x \in S$; $f(x) = y$. ■

PROPOSITION 57. *Se $f : K \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é contínua e K é compacto, então $f(K)$ é um compacto do $\mathbb{R}^m$.*

Prova: Seja $\{A_\lambda\}$ uma cobertura aberta de $f(K)$.

$$f(K) \subset \cup_\lambda A_\lambda \Rightarrow K \subset \cup_\lambda f^{-1}(A_\lambda).$$

$\{f^{-1}(A_\lambda)\}$ é cobertura aberta de K a qual possui uma subcobertura finita

$$\{f^{-1}(A_{\lambda_1}), f^{-1}(A_{\lambda_2}), \dots, f^{-1}(A_{\lambda_k})\}$$

segue que

$$K \subset \cup_{j=1}^k f^{-1}(A_{\lambda_j}) \Rightarrow f(K) \subset \cup_{j=1}^k A_{\lambda_j}. \blacksquare$$

PROPOSITION 58. *$f : K \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ contínua no compacto K . Então, f é limitada e atinge seus extremos, isto é, existem x_M e $x_m \in K$ tais que*

$$f(x_M) = \max\{|f(x)|; x \in K\}, \quad f(x_m) = \min\{|f(x)|; x \in K\}.$$

Prova: $f(K)$ é um compacto de $\mathbb{R}^m$ e portanto fechado e limitado. Logo, f é limitada. Seja $M = \sup_{x \in K} |f(x)|$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in K$ tal que

$$M - \frac{1}{n} \leq f(x_n) \leq M; \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como K é compacto, a sequência (x_n) de K possui alguma subsequência convergente. Seja $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ uma tal subsequência

$$M - \frac{1}{n_k} \leq f(x_{n_k}) \leq M, \forall k \in \mathbb{N}$$

Seja $x_M = \lim x_{n_k}$. Temos que $x_M \in K$ (K fechado) e como f é contínua, $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x_M)$, concluímos que

$$M \leq f(x_M) \leq M \therefore f(x_M) = M. \blacksquare$$

REMARK 59. : $A \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$

$$d(x_0, A) = \inf\{\|x_0 - x\|; x \in A\}.$$

Dados $A, B \subset \mathbb{R}^n$, define-se

$$d(A, B) = \inf\{d(x, B); x \in A\}.$$

Se F é fechado e K é compacto, com $K \cap F = \emptyset$, então $d(F, K) > 0$.

A figura acima mostra um exemplo em que $d(F, G) = 0$, $F \cap G = \emptyset$, F, G fechados.

1. Homeomorfismo

Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que a função $f : X \rightarrow Y$ é um *homeomorfismo* entre X e Y se for uma bijeção contínua, cuja inversa $f^{-1} : Y \rightarrow X$ também seja contínua.

Como exemplo, temos:

Exemplo 1) A aplicação linear e contínua $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

$$2) T_a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, T_a(x) = x + a, (T_a)^{-1} = T_{-a}.$$

$$3) H_\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, H_\lambda(x) = \lambda x, 0 \neq \lambda \in \mathbb{R}, (H_\lambda)^{-1} = H_{\lambda^{-1}}.$$

4) Duas bolas quaisquer são homeomorfas

$$\varphi : B_r(a) \rightarrow B_s(b)$$

$$\varphi = T_b \circ H_{s/r} \circ T_{-a}$$

5) $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$, aplicação contínua definida em $X \subset \mathbb{R}^m$.

Graf $f = G = \{(x, f(x)), x \in X\} \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n}$ é homeomorfo a X . Definimos a aplicação $f_1 : X \rightarrow G$, por $f_1(x) = (x, f(x))$ sua inversa $g : G \rightarrow X$ é definida por $g(x, f(x)) = x$. Note que $g = \pi_1|_G$ onde $\pi_1 : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Exemplo: $f : [0, 2\pi) \rightarrow S^1$, onde $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\}$, $f(t) = (\cos t, \sin t)$ é bijeção contínua mas não é um homeomorfismo. Sua inversa $f^{-1} : S^1 \rightarrow [0, 2\pi)$ aplica o compacto S^1 sobre o intervalo $[0, 2\pi)$ que não compacto, logo, f^{-1} é descontínua. Note que ela é descontínua em $a = (1, 0) = f(0) \in S^1$. Para todo $k \in \mathbb{N}$, temos que se $t_k = (1 - \frac{1}{k}) 2\pi$ e $z_k = (\cos t_k, \sin t_k)$ então $\lim z_k = a$, mas $\lim f^{-1}(z_k) = \lim t_k = 2\pi$, ou seja, $\lim f^{-1}(z_k) \neq f^{-1}(a) = 0$.

2. Continuidade Uniforme

Exemplos:

1. $f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$ e $x_n = \frac{1}{n}$. A sequência (x_n) é de Cauchy mas $f(x_n) = n$ não é de Cauchy.

2. Seja $f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$ e $\varepsilon > 0$ dado. Dado $x_1 > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que $f(B_{\delta_1}(x_1) \cap S) \subset B_\varepsilon(f(x_1))$.

"Dizer que $f : S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é contínua no ponto x_0 significa :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0 \text{ tq. } f(B_\delta(x_0) \cap S) \subset B_\varepsilon(f(x_0)).$$

3. $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \geq a > 0$. ($S = [a, +\infty)$).

Se (x_n) é de Cauchy em S será de Cauchy em $\mathbb{R}$ e portanto convergente. Seja $x = \lim x_n$. Então, $x \in \overline{S} = S$. Como f é contínua, temos $f(x) = \lim f(x_n)$. Em particular, $(f(x_n))$ é de Cauchy (f preserva

seqüências de Cauchy). Dados $x, y \in S = [a, +\infty)$, temos que:

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = \left| \frac{y - x}{xy} \right| = \frac{|y - x|}{xy}$$

como $x, y \geq a$, $xy > a^2$ e $\frac{1}{xy} \leq \frac{1}{a^2}$. Logo,

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{a^2} |y - x|$$

dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta = a^2 \varepsilon$. Se $x, y \in [a, +\infty)$ e $|y - x| < \delta$, então $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. (o δ não dependeu do ponto x , ao contrário do que ocorreu no ex. 2).

DEFINIO 60. $f : S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é "uniformemente contínua" quando:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ tq. } f(B_\delta(x) \cap S) \subset B_\varepsilon(f(x)), \forall x \in S.$$

REMARK 61. (1) Toda função uniformemente contínua é contínua.

(2) Toda função contínua num compacto é uniformemente contínua.

Prova de (2): $f : K \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ contínua, K compacto. Seja $x \in K$.

Dado $\varepsilon > 0, \exists \delta_x > 0$ tal que $f(B_{\delta_x}(x) \cap K) \subset B_\varepsilon(f(x))$. Como $K \subset \cup_{x \in K} B_{\delta_x}(x)$

(cobertura aberta), por compacidade, $K \subset B_{\delta_1}(x_1) \cup \dots \cup B_{\delta_p}(x_p)$ onde $\delta_j = \frac{1}{2} \delta_{x_j}$. Seja $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_p\}$.

Afirmção: Dado $x \in K$, então $f(B_\delta(x) \cap K) \subset B_{2\varepsilon}(f(x))$. Seja $y \in B_\delta(x) \cap K$, então $y \in B_{\delta_j}(x) \cap K$ e seja $j \in \{1, 2, \dots, p\}$ tal que $x \in B_{\delta_j}(x)$

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \|f(x) - f(x_j)\| + \|f(x_j) - f(y)\| < 2\varepsilon. \blacksquare$$

Em $\mathbb{R}^n$ quaisquer duas normas são equivalentes :

$\|\cdot\|$ = norma euclideana em $\mathbb{R}^n$

$|\cdot|$ = nova norma em $\mathbb{R}^n$

$|\cdot| \sim \|\cdot\|$?

$S = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| = 1\}$ é compacto.

Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ contínua

$$x \longmapsto \|x\|$$

$$|f(x) - f(y)| = ||x| - |y|| \leq \|x - y\|$$

Seja $x_1 \in S$, $|f(x)| \leq |f(x_1)| = M, \forall x \in S$. Dado $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, então $\frac{x}{|x|} \in S$ e

$$\left| f\left(\frac{x}{|x|}\right) \right| \leq M \Rightarrow \left\| \frac{x}{|x|} \right\| \leq M \Rightarrow \|x\| \leq M|x|, \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0. \blacksquare$$

3. Sequências de Funções

Fixemos um subconjunto S do $\mathbb{R}^n$. Para cada número natural k consideremos uma função $f_k : S \rightarrow \mathbb{R}^m$.

DEFINIO 62. Dizemos que a sequência de funções (f_k) "converge pontualmente" em S para uma função $f : S \rightarrow \mathbb{R}^m$ quando para cada x de S a sequência em $\mathbb{R}^m$ $(f_k(x))$ converge para $f(x)$. Em outras palavras, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 = n_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_k(x) - f(x)\| < \varepsilon$, $\forall k \geq n_0$.

Exemplos:

$$(1) f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_k(x) = \frac{x}{k}. \text{ Seja } f \equiv 0. \|f_k(x) - f(x)\| = \frac{|x|}{k} \rightarrow 0,$$

para cada x fixado. Neste caso, dado $\varepsilon > 0$, tome $k_0 > \frac{|x|}{\varepsilon}$, $x \neq 0$.

Se $k \geq k_0$, então $\frac{|x|}{k} \leq \frac{|x|}{k_0} < \varepsilon$. (se $x = 0$, a sequência $(f_k(x))$ é identicamente nula).

$$(2) f_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}; f_k(x) = x^k.$$

$$\text{i) se } x = 0 \Rightarrow f_k(x) = 0, \forall k.$$

$$\text{ii) } x = 1 \Rightarrow f_k(x) = 1, \forall k$$

$$\text{iii) } 0 < x < 1 \Rightarrow f_k(x) = x^k \rightarrow 0.$$

$$\text{Função limite: } f(x) = \begin{cases} 0; & x \in [0, 1) \\ 1; & x = 1 \end{cases}$$

$f_k \rightarrow f$ pontualmente em S .

$$(3) f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f_k(x) = \frac{\cos(x^2 + kx)}{k^2}.$$

$$|f_k(x)| = \left| \frac{\cos(x^2 + kx)}{k^2} \right| \leq \frac{1}{k^2} \rightarrow 0, \text{ independente do ponto } x.$$

Dado $\varepsilon > 0$, seja $k_0 > \sqrt{1/\varepsilon}$. Se $k \geq k_0 \Rightarrow \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k_0^2} < \varepsilon \Rightarrow |f_k(x)| < \varepsilon$.

DEFINIO 63. Dizemos que a sequência (f_k) "converge uniformemente" para a função f quando:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ tal que } \|f_k(x) - f(x)\| < \varepsilon$$

para todo $k \geq n_0, \forall x \in S$.

Notação: $f_k \rightarrow f$ uniformemente.

EXAMPLE 64. $f_k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}; f_k(x) = \frac{x}{k} \cdot f_k \rightarrow 0$ uniformemente.

$|f_k(x)| = \frac{|x|}{k} \leq \frac{b}{k} \rightarrow 0$, independente do ponto x . Neste caso, dado $\varepsilon > 0$, toma-se $k_0 > \frac{b}{\varepsilon}$.

EXAMPLE 65. A sequência $f_k(x) = x^k, x \in [0, 1]$ não converge uniformemente para $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 1 \\ 0 & \text{se } x \in [0, 1) \end{cases}$.

LEMMA 66. O limite uniforme de uma sequência de funções contínuas é uma função contínua.

Prova: Seja $f_k : S \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma sequência de funções contínuas convergindo uniformemente para uma função $f : S \rightarrow \mathbb{R}^m$. Seja $x_0 \in S$ e seja $\varepsilon > 0$ dado. Existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$k \geq k_0 \Rightarrow \|f_k(x) - f(x)\| < \varepsilon, \forall x \in S$$

Temos

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(x_0)\| &\leq \|f_k(x) - f(x)\| + \|f_k(x) - f_k(x_0)\| + \|f_k(x_0) - f(x_0)\| \\ &< 3\varepsilon, \text{ se } k \geq k_0 \text{ e } \|x - x_0\| < \delta. \end{aligned}$$

4. O espaço $B(S : \mathbb{R}^m)$

Denotemos por $B(S : \mathbb{R}^m)$ (ou simplesmente B) o espaço vetorial real das funções $f : S \rightarrow \mathbb{R}^m$ limitadas.

$$f \in B, \exists M > 0, \|f(x)\| \leq M, \forall x \in S.$$

Denotemos por

$$\|f\|_\infty = \sup\{\|f(x)\|, x \in S\}.$$

O espaço B será equipado com a norma $\|\cdot\|_\infty$.

Convergência em B :

O que significa $f_k \rightarrow f$ em B ?

$$f_k \rightarrow f \text{ em } B \Leftrightarrow \|f_k - f\|_\infty \rightarrow 0.$$

EXAMPLE 67. $f_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}; f_k(x) = \frac{x^2 + kx}{k}$.

$f_k \in B([0, 1]; \mathbb{R})$. Seja $f(x) = x; x \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \|f_k - f\|_\infty &= \sup\{\|f_k(x) - f(x)\|, x \in [0, 1]\} \\ &= \sup_{x \in [0, 1]} \left| \frac{x^2}{k} \right| = \frac{1}{k} \Rightarrow \|f_k - f\|_\infty = \frac{1}{k} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Logo $f_k \rightarrow f$ em B .

TEOREMA 68. $f_k \rightarrow f$ uniformemente $\Leftrightarrow f_k \rightarrow f$ em B .

Prova: ($\Rightarrow$) Suponhamos que $f_k \rightarrow f$ uniformemente. Por definição, dado $\varepsilon > 0$, $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} \|f_k(x) - f(x)\| &< \varepsilon, \forall x \in S, k \geq k_0 \\ \sup_{x \in S} \|f_k(x) - f(x)\| &\leq \varepsilon \Leftrightarrow \|f_k - f\|_\infty \leq \varepsilon, k \geq k_0 \\ \Leftrightarrow \|f_k - f\|_\infty &\rightarrow 0 \Leftrightarrow f_k \rightarrow f \text{ em } B. \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Se $f_k \rightarrow f$ em B , então dado $\varepsilon > 0$, $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_k - f\|_\infty < \varepsilon, k \geq k_0$$

para qualquer $x \in S$, $\|f_k(x) - f(x)\| \leq \|f_k - f\|_\infty < \varepsilon \Rightarrow f_k \rightarrow f$ uniformemente.

EXAMPLE 69. $C^0([a, b]; \mathbb{R})$ o subespaço vetorial de $B([a, b]; \mathbb{R})$ constituído das funções $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas. Se $f_k \rightarrow f$ em $C^0([a, b]; \mathbb{R})$, então

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f_k(x) dx &= \int_a^b f(x) dx. \\ \left| \int_a^b f_k(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| &= \left| \int_a^b (f_k(x) - f(x)) dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f_k(x) - f(x)| dx \leq \int_a^b \|f_k - f\|_\infty dx \end{aligned}$$

$$\leq (b-a) \|f_k - f\|_\infty < (b-a)\varepsilon, \quad k \geq k_0.$$

5. O Teorema de Arzelá-Áscoli

Fixemos $K \subset \mathbb{R}^n$ um compacto e denotemos por $C^0(K, \mathbb{R}^m)$ o espaço vetorial das funções $f : K \rightarrow \mathbb{R}^m$ contínuas equipado da norma da convergência uniforme:

$$\|f\|_\infty = \sup_K |f(x)|.$$

Seja $\mathcal{F} \subset C^0(K, \mathbb{R}^m)$ uma coleção de funções contínuas.

Objetivo: Sob que condições uma sequência $\{f_n\}$ em $\mathcal{F}$ possui uma subsequência $\{f_{n_k}\}$ uniformemente convergente?

DEFINIO 70. A coleção $\mathcal{F}$ é "uniformemente limitada" quando existir uma constante positiva C tal que

$$\|f\|_\infty \leq C, \quad \forall f \in \mathcal{F}.$$

EXAMPLE 71. Seja $\{f_n\}$ uniformemente convergente e $\mathcal{F} = \{f_n; n \in \mathbb{N}\}$, então $\mathcal{F}$ é uniformemente limitada.

Seja $f : K \rightarrow \mathbb{R}^m$ o limite uniforme da sequência $\{f_n\}$, i.e., $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$

Dado $\varepsilon = 1$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_n - f\|_\infty < 1, \quad \forall n \geq n_0$$

para cada $x \in K$

$$\|f_n(x)\| \leq \|f_n(x) - f(x)\| + \|f(x)\| \leq \|f_n - f\|_\infty + \|f\|_\infty$$

$$\|f_n\| \leq \|f_n - f\|_\infty + \|f\|_\infty < 1 + \|f\|_\infty, \quad \forall n \geq n_0$$

Seja $C = \max\{\|f_1\|_\infty, \dots, \|f_{n_0}\|_\infty, 1 + \|f\|_\infty\}$, então

$$\|f_n\| \leq C, \quad \forall n.$$

DEFINIO 72. A coleção $\mathcal{F}$ é "equicontínuo" quando: Dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon)$ tq.

$$\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon, \quad \forall x, y \in K, \quad \|x - y\| < \delta, \quad \forall f \in \mathcal{F}.$$

EXAMPLE 73. $\mathcal{F} = \{f_n; n \in \mathbb{N}\}$, onde $\{f_n\}$ é uniformemente convergente. Então $\mathcal{F}$ é equicontínua.

$$\begin{aligned} \|f_n(x) - f_n(y)\| &\leq \|f_n(x) - f(x)\| + \|f(x) - f(y)\| + \|f_n(y) - f(y)\| \\ &\leq 2\|f_n - f\|_\infty + \|f(x) - f(y)\| \end{aligned}$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \exists \delta = \delta(\varepsilon, f) > 0$ tais que $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon, \forall n \geq n_0$, também $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$, se $x, y \in K$ e $\|x - y\| < \delta \Rightarrow \|f_n(x) - f_n(y)\| < 3\varepsilon, n \geq n_0, x, y \in K, \|x - y\| < \delta$, cada $f_j, j = 1, \dots, n_0$, é uniformemente contínua e portanto existe $\delta_j > 0$ tal que $\|f_j(x) - f_j(y)\| < \varepsilon$, se $x, y \in K, \|x - y\| < \delta_j$.

Seja $\delta^* = \min\{\delta_1, \dots, \delta_{n_0}, \delta\}$. Se $x, y \in K$ e $\|x - y\| < \delta^*$ então

$$\|f_n(x) - f_n(y)\| < 3\varepsilon, \forall n.$$

TEOREMA 74. (Arzelá-Ascoli) Com relação à coleção $\mathcal{F} \subset C^0(K, \mathbb{R}^m)$, as seguintes afirmações são equivalentes:

(A) $\mathcal{F}$ é uniformemente limitada e equicontínua;

(B) Toda sequência $\{f_n\}$ em $\mathcal{F}$ possui uma subsequência uniformemente convergente.

Demonstração:

(B) $\Rightarrow$ (A)

Suponhamos que (A) não ocorre. Se $\mathcal{F}$ não é uniformemente limitada, então para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $f_n \in \mathcal{F}$ tal que $\|f_n\|_\infty > n$. Logo, nenhuma subsequência de $\{f_n\}$ é uniformemente limitada e pelo primeiro exemplo, nenhuma subsequência pode ser uniformemente convergente.

Se $\mathcal{F}$ não for equicontínuo, existe uma sequência $\{f_n\}$ em $\mathcal{F}$ sem subsequência unif. conv.

(A) $\Rightarrow$ (B)

Seja $\{f_n\}$ uma sequência em $\mathcal{F}$. Seja $X = \{x_1, x_2, \dots, x_k, \dots\} \subset K$ um subconjunto enumerável e denso em K .

Construção da subsequência convergente:

Método da diagonal de Cantor

$f_1(x_1), f_2(x_1), \dots, f_n(x_1), \dots$ (limit.)

$f_{11}(x_1), f_{12}(x_1), \dots, f_{1n}(x_1), \dots$ (conv.) T. Bolz. Weierst.

$f_{11}(x_2), f_{12}(x_2), \dots, f_{1n}(x_2), \dots$ (limit.)

$$f_{21}(x_2), f_{22}(x_2), \dots, f_{2n}(x_2), \dots (\text{conv.})$$

$$g_n = f_{nn}(\text{conv. unif.}). \blacksquare$$

6. Transformações Lineares

(1) O ESPAÇO $\mathcal{L}(E, F)$

Fixemos dois espaços vetoriais reais E e F [por exemplo: $E = \mathbb{R}^m$] normados. Denotemos por $\|\cdot\|$ e $|\cdot|$ as normas de E e F , respectivamente.

DEFINIO 75. Uma função $T : E \rightarrow F$ é dita “linear” quando:

$$T(\alpha x + y) = \alpha T(x) + T(y), \forall x, y \in E \text{ e } \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Uma aplicação $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ é denominado “funcional linear”.

TEOREMA 76. Com relação a uma transformação linear $T : E \rightarrow F$ as seguintes afirmações são equivalentes:

(A): T é uniformemente contínua;

(B): T é contínua;

(C): T é contínua em $x = 0$.

(D): Existe uma constante $C > 0$ tal que $|T_x| \leq C\|x\|, \forall x \in E$.

DEMONSTRAÇÃO: $(C) \Rightarrow (D)$. Se D não ocorresse, existiria para cada $n \in \mathbb{N}$ um ponto $X_N \in E$, x_n , $x_n \neq 0$, tal que

$$|T_{x_n}| > n\|x_n\|, \forall n.$$

Seja $y_n = \frac{1}{n} \frac{x_n}{\|x_n\|}$. Então, $\|y_n\| = \frac{1}{n} \rightarrow 0 \iff y_n \rightarrow 0$ em E por (C)

T é contínua em $x = 0$ e portanto

$$T_{y_n} \rightarrow T_{0=0}$$

Mas,

$$T_{y_n} = T\left(\frac{1}{n} \frac{x_n}{\|x_n\|}\right) = \frac{1}{n\|x_n\|} T(x_n)$$

$$\Rightarrow |T_{y_n}| = \frac{1}{n\|x_n\|} |T_{x_n}| > 1, \forall n \Rightarrow |T_{y_n}| \not\rightarrow 0$$

$(D) \Rightarrow (A)$

$$|T_x - T_y| = |T(x - y)| \leq C\|x - y\|, \forall x, y \in E$$

T é Lips.

EXEMPLO: $\mathcal{P} = \{\text{polinômios } p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$

$$\|p\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |p(t)|, \quad \|p\| = \max_{0 \leq t \leq 2} |p(t)|$$

$$\begin{array}{ccc} id : \{\mathcal{P}, \|\cdot\|\} & \longrightarrow & \{\mathcal{P}, |\cdot|\} \text{ não é contínua} \\ P & \longrightarrow & P \end{array}$$

“A norma do supremo é a norma da convergência uniforme”.

$$\text{Seja } p_n(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^n, \quad \|p\| = \sup_{[0,1]} |p(t)|, \quad |p| = \sup_{[0,2]} |p(t)| \text{ se } t \in [0, 1],$$

então $\left|\left(\frac{t}{2}\right)^n\right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow 0$, independentemente do t , isto é,

$$\|p\| \rightarrow 0$$

$[p_n \rightarrow 0$ uniformemente em relação a $\|\cdot\|$].

Convergência de $\{p_n\}$ com relação à norma $|\cdot|$. Se $0 \leq t < 2$, então $0 \leq \frac{t}{2} < 1$ e portanto $\left(\frac{t}{2}\right)^n \rightarrow 0$ se $t = 2$, então $\frac{t}{2} = 1$ e portanto $\left(\frac{t}{2}\right)^n \rightarrow 1$. Logo, $p_n(t) \rightarrow f(t)$, pontualmente, onde

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 2 \\ 1, & t = 2 \end{cases}$$

Como f não é contínua em $[0, 2]$, a convergência de $\{p_n\}$ para f não ser uniforme. Então, p_n não converge em $\{\mathcal{P}, |\cdot|\}$.

TEOREMA 77. *Toda aplicação linear $T : \mathbb{R}^n \rightarrow F$ é contínua.*

Demonstração: Seja $\beta = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ base canônica do $\mathbb{R}^n$ e seja

$C = \sum_{i=1}^n |T_{e_i}|$. Dados $x = (x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ em $\mathbb{R}^n$, então

$$T_x = \sum_{i=1}^n x_i T_{e_i} \Rightarrow |T_x| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| |T_{e_i}| \leq C\|x\|, \forall x$$

Observação: Seja E um espaço vetorial de dimensão n . seja $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma base de E . Considere o isomorfismo natural $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow E$

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \sum_{i=1}^n x_i v_i \\ \Phi(1, \dots, 0) &= v_1 \\ \Phi(0, \dots, 1, \dots, 0) &= v_j\end{aligned}$$

- (i) Φ é um isomorfismo linear;
- (ii) Φ é contínua;
- (iii) $\Phi^{-1} : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua.

Prova de (iii): $\mathbb{R}^n \xrightarrow{\Phi} E \xrightarrow{\|\cdot\|} \mathbb{R}$

$\varphi(x) = \|\phi_x\|$ é contínua [φ é a composição de $\|\cdot\|$ com Φ].

$$\left(\begin{array}{l} \|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R} \text{ é Lipschitziana } \|\|x\| - \|y\|\| \leq \|x - y\| \\ x \longmapsto \|x\| \end{array} \right)$$

A função contínua φ assume um máximo e um mínimo no compacto $K = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| = 1\}$

Seja $x_0 \in K$ tal que $\varphi(x_0) \leq \varphi(x), \forall x \in K$.

Dado $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, então $\frac{x}{\|x\|} \in K$

$$\begin{aligned}\varphi(x_0) \leq \varphi\left(\frac{x}{\|x\|}\right) &\iff \|\Phi(x_0)\| \leq \|\Phi(x_0)\| \leq \left\|\Phi\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \\ &\iff \|\Phi(x_0)\| \leq \frac{1}{\|x\|} \|\Phi(x)\| \iff \|\Phi(x_0)\| \|x\| \leq \|\Phi(x)\|, \forall x \in \mathbb{R}^n\end{aligned}$$

Dado $y \in E$, $\exists! x \in \mathbb{R}^n$ tal que $y = \Phi(x)$

$$\|\Phi^{-1}(y)\| \leq \frac{1}{\|\Phi(x_0)\|} \|y\| \quad \begin{array}{l} x_0 \neq 0 \\ \Phi(x_0) \neq 0 \end{array}$$

Φ é um “homeomorfismo linear” [bijeção contínua, linear, com inversa contínua].

Colorário: Se $\dim E < \infty$, então toda aplicação linear $T : E \rightarrow F$ é contínua.

Prova: $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow E$ homeomorfismo natural

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{\Phi} E \xrightarrow{T} F \quad T = ($$

$$|T_x| = |T\Phi(y)| \leq C|y| = C|\Phi^{-1}x| < C.C^1|x|$$

Colorário: Se $\dim E < \infty$, então quaisquer duas normas em E são equivalentes.

Prova: $|\cdot|$ e $\|\cdot\|$ normas em E .

(*) $id : \{E, |\cdot|\} \rightarrow \{E, \|\cdot\|\}$ é contínua, pois $\dim t < \infty$ (colorário anterior)

(**) $id : \{E, \|\cdot\|\} \rightarrow \{E, |\cdot|\}$ é contínua

(*) $\Rightarrow \exists C_1 > 0$ tal que $\|id(x)\| \leq C_1|x|$

$$\|x\| \leq C_1|x|$$

(**) $\Rightarrow \exists C_2 > 0$ tal que $|id(x)| \leq C_2\|x\|$

$$\begin{aligned} |x| &\leq C_2\|x\| \\ \frac{1}{C_2}|x| &\leq \|x\| \leq C_1|x| \end{aligned}$$

Notação: O Espaço vetorial das aplicações lineares e contínuas $T : E \rightarrow F$ será representada por $\mathcal{L}(E, F)$ e será equipado da seguinte norma:

$\|T\|_{\mathcal{L}(E, F)} = \sup \{|T_X|; \|z\| \leq 1\}$, pois $\|z\| - 1$ é comp $\Rightarrow$ T e limitado

$[T \in \mathcal{L}(E, F) \Rightarrow \exists C < \infty; |T_X| \leq C\|x\|, \forall x \in E]$. Quando $\|x\| \leq 1$, então

$$|T_X| \leq C \therefore \sup_{\|x\| \leq 1} |T| \leq C$$

$$\cdot |T_X| \leq \|T\| \|X\|, \forall x \in E$$

$$\cdot \cdot |S \circ T| \leq \|S\| \|T\|$$

Prova:

$$T \in \mathcal{L}(E, F), x \in E, x \neq 0$$

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |T_X| \Rightarrow \|T\| \geq \left| T \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right| \Rightarrow |T_X| \leq \|T\| \|x\|, \forall x \in E$$

E

$$T \in \mathcal{L}(E, F), \quad S \in \mathcal{L}(E, G)$$

$$|S \circ T(x)|_G \leq C \|T\|_F \leq C \|S\| \|x\|_E \text{ e}$$

$$|S \circ T(x)| \leq \|S\| \|T\| \|x\|$$

$$|S \circ T(x)| \leq \|S\| \|T\|, \forall x \in E, \|x\| \leq 1$$

$$\|S \circ T\| \leq \|S\| \|T\|$$

APLICAÇÕES BILINEARES

E, F e G espaços vetoriais normados. No produto cartesiano $E \times F$ considera-se uma das normas:

$$|(u, v)|_1 = \sqrt{|u|_E^2 + |v|_F^2}$$

$$|(u, v)|_2 = |u|_E + |v|_F$$

$$|(u, v)|_3 = \max \{|u|_E, |v|_F\}$$

CONVERGÊNCIA em $E \times F$:

$$(u_n, v_n) \rightarrow (u, v), \text{ em } E \times F, \text{ quando } n \rightarrow \infty$$

$$\iff \begin{cases} u_n \rightarrow u \text{ em } E \\ v_n \rightarrow v \text{ em } F \end{cases}, \text{ quando } n \rightarrow \infty$$

$$|(u_n, v_n) - (u, v)|_1 < \varepsilon$$

$$(u_n, v_n) \pm (u, v)$$

$$|(u_n - u, v) + (u, v_n - v)| \leq |u_n - u| |v| + |u| |v_n - v|$$

CONTINUIDADE EM $E \times F$

$f : E \times F \rightarrow G$ é CONTÍNUA em $(u_0, v_0) \in E \times F$ quando:
 $(u_n, v_n) \rightarrow (u_0, v_0) \text{ em } E \times F \Rightarrow f(u_n, v_n) \rightarrow f(u_0, v_0) \text{ em } G.$

DEFINIÇÃO: Uma função $B : E \times F \rightarrow G$ é “bilinear” quando

$$B(u + \lambda v, w) = B(u, w) + \lambda B(v, w) \quad u, v \in E, \quad w \in F$$

$$B(u, \lambda v, w) = \lambda B(v, w) + B(u, w) \quad u \in E, \quad v, w \in F, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

EXEMPLOS:

(1) Produto de números reais:

$$\begin{array}{rcl} P : \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & xy \\ |P(x, y)| & = & |x| |y| \end{array}$$

(2) Produto interno em $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ |\langle x, y \rangle| &\leq \|x\| \|y\| \end{aligned}$$

(3) Composição de aplicações lineares

$$\mu : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$$

$$(T, S) \longmapsto S \circ T$$

$$\|u(T, S)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)} = \|S \circ T\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)} \leq \|S\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)} \|T\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)}$$

(4) Função “valor”

$$\begin{aligned} V : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ (T, X) &\longmapsto T_X \end{aligned}$$

V é bilinear:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad V(\lambda T + S, x) &= (\lambda T + S)(x) = \lambda T(x) + S(x) \\ &= \lambda V(T, x) + V(S, x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad V(T, \lambda x + y) &= T(\lambda x + y) = \lambda T_x + T_y \\ &= \lambda V(T, x) + V(T, x) \end{aligned}$$

$$\|V(T, X)\| = \|T_X\| \leq \|T\| \|X\|$$

TEOREMA: Com relação a uma aplicação bilinear $B : E \times F \rightarrow G$, as seguintes afirmações são equivalentes:

- (1) (a) B é contínua
- (B) B é contínua em $(0, 0)$
- (C) $\exists C > 0$ tal que $\|B(u, v)\| \leq C\|u\| \|v\|$, $\forall (u, v) \in E \times F$.

PROVA:

$$(B) \Rightarrow (C)$$

Se (C) não ocorre, então para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $(u_n, v_n) \in E \times F$ tal que $\|B(u_n, v_n)\| > n\|u_n\| \|v_n\|$

Sejam

$$\begin{aligned} z_n &= \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{u_n}{\|u_n\|}, & w_n &= \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{v_n}{\|v_n\|} \\ \|z_n\| &= \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0 & \|w_n\| &= \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0 \\ \Downarrow & & \Downarrow & \\ z_n &\rightarrow 0 \text{ em } E, & w_n &\rightarrow 0 \text{ em } F \end{aligned}$$

Então $(z_n, w_n) \rightarrow (0, 0)$ em $E \times F$ e por (B) , B é linear

$$B(z_n, w_n) \rightarrow B(0, 0) = 0$$

$$\begin{aligned} \|B(z_n, w_n)\| &= \|B(\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{u_n}{\|u_n\|}, \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{v_n}{\|v_n\|})\| \\ &= \frac{1}{n\sqrt{n}\|u_n, v_n\|} \|B(u_n, v_n)\| > 1 \end{aligned}$$

contradiz o fato de $B(z_n, w_n) \rightarrow 0$.

$$(C) \Rightarrow (A)$$

Seja $(u_0, v_0) \in E \times F$ e seja $(u_n, v_n) \rightarrow (u_0, v_0)$ em $E \times F$.

$$\begin{aligned} \|B(u_n, v_n) - B(u_0, v_0)\| &= \|B(u_n, v_n) - B(u_0, v_0) + B(u_n, v_n) - B(u_0, v_0)\| \\ &= \|B(u_n - u_0, v_n) + B(u_0, v_n - v_0)\| \\ &\leq \|B(u_n - u_0, v_n)\| + \|B(u_0, v_n - v_0)\| \leq (\text{usar } (C)) \leq \\ &\leq C\|u_n - u_0\|\|v_n\| + C\|u_0\|\|v_n - v_0\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

COLORÁRIO: Se $\dim E < \infty$, e $\dim F < \infty$, então toda aplicação bilinear $B : E \times F \rightarrow B$ é contínua.

PROVA:

$\beta + \{u_1, \dots, u_n\}$ base de E , $\beta' = \{v_1, \dots, v_m\}$ base de F

Seja $C = \sum_{i,j} \|B(u_i, v_j)\|$

$$\text{Dado } (u, v) \in E \times F, \text{ então } \begin{cases} u = \sum_i x_i u_i & |x_i| \leq \|u\| \\ v = \sum_j y_j v_j & |y_j| \leq \|v\| \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
B(u, v) &= \sum_{i,j} x_i y_j B(u_i, v_j) \\
||B(u, v)|| &\leq \sum_{i,j} |x_i| |y_j| ||B(u_i, v_j)|| \\
&\leq \sum_{i,j} ||u|| ||v|| ||B(u_i, v_j)|| = C ||u|| ||v||
\end{aligned}$$

NOTAÇÃO: $\mathcal{L}_2(E \times F, G) = \{B : E \times F \rightarrow G \text{ bilinear e contínua}\}$

Quando $E = F$ escrevemos $\mathcal{L}_2(E, F)$

$$\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = \{B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ bilinear}\}$$

$$\mathcal{L}_2(E) = \{B : E \times E \rightarrow E \text{ bilinear, contínua}\}.$$

7. Diferenciabilidade

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivada no ponto $x = a$.

$$\begin{aligned}
f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &\iff \\
\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) \right] &= 0 \iff \\
\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(a+h) - f(a) - hf'(a)}{h} \right] &= 0
\end{aligned}$$

$r(h) = f(a+h) - f(a) - f'(a)h$, então a diferenciabilidade de f em

$$a \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$

As aplicações lineares $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são do tipo $T_x = cx$, onde $C = T(1)$

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \approx \mathbb{R}$$

$$T \mapsto C = T(1)$$

O número real $f'(a)$ será identificado com a transformação linear $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tal que $T(1) = f'(a)$

$$f(a+h) = f(a) + Th + r(h)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0$$

DEFINIÇÃO: Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função. Dizemos que f é “diferenciável” em $x = a \in \Omega$ quando existir uma aplicação linear $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ tal que $\frac{f(a+h) - f(a) - Th}{\|h\|} \rightarrow 0$ quando $h \rightarrow 0$, isto é

$$f(a+h) = f(a) + T \cdot h + r(h) \text{ onde } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0.$$

$f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciável em x_0

$$(*) \quad f(x_0 + h) = f(x_0) + T \cdot h + r(h)$$

$$T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m); \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0.$$

A aplicação linear T que satisfaz (*) é única. De fato, se T e S satisfazem (*), então:

$$Th = f(x_0 + h) - f(x_0) - r(h), \quad Sh = f(x_0 + h) - f(x_0) - \rho(h) \Rightarrow$$

$$(T - S)h = \rho(h) - r(h), \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$$

Dado $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$, então

$$(T - S) \frac{v}{\|v\|} = \rho\left(\frac{v}{\|v\|}\right) - r\left(\frac{v}{\|v\|}\right)$$

e também

$$(T - S) \frac{tv}{|t| \|v\|} = \rho\left(\frac{tv}{|t| \|v\|}\right) - r\left(\frac{tv}{|t| \|v\|}\right)$$

$$(T - S) \frac{v}{\|v\|} = \pm \left[\frac{1}{|t| \|v\|} \rho\left(\frac{tv}{|t| \|v\|}\right) - \frac{1}{|t| \|v\|} r\left(\frac{tv}{|t| \|v\|}\right) \right] |t| \|v\|$$

fazendo $t \rightarrow 0$, obtemos

$$(T - S) \frac{v}{\|v\|} = 0, \forall v \neq 0 \Rightarrow T = S.$$

Definição: A aplicação linear T que satisfaz (*) é denominada *derivada* da função f em x_0 e é denotada por:

$$Df(x_0) \text{ ou } f'(x_0).$$

Assim, quando f é diferenciável em x_0 , então

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Df(x_0) \cdot h + r(h) \text{ onde } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0.$$

Exemplos:

$$(1) f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2, T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

$$Df(x) \cdot h = 2xh$$

$$f(x+h) = (x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2 = f(x) + Df(x) \cdot h + h^2$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{|h|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2}{|h|} = \lim_{h \rightarrow 0} |h| = 0.$$

$$(2) f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = x^2 y$$

$$X = (x, y), H = (h, k)$$

$$f(X+H) = f(X) + T \cdot H + r(H); \lim_{H \rightarrow 0} \frac{r(H)}{\|H\|} = 0.$$

$$f(X+H) = f(x+h, y+k) = (x+h)^2(y+k)$$

$$= (x^2 + 2xh + h^2)(y+k)$$

$$= x^2 y + x^2 k + 2xyh + h^2 y + h^2 k + 2xhk$$

$$= f(X) + T \cdot (h, k) + r(H)$$

$$\frac{|r(H)|}{\|H\|} = \frac{|h^2 y + h^2 k + 2xhk|}{|h| + |k|} \leq \frac{h^2 |y| + h^2 |k| + 2|x||h||k|}{|h| + |k|}$$

$$\leq \frac{(|h| + |k|)^2(|y| + |k|) + 2|x||h|(|h| + |k|)}{|h| + |k|}$$

$$= (|h| + |k|)(|y| + |k|) + 2|x||h| \rightarrow 0, (h, k) \rightarrow (0, 0)$$

Logo, $Df(x, y) \cdot (h, k) = x^2 k + 2xyh$.

Por exemplo,

$$Df(1, 0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$$

$$Df(1, 0)(h, k) = k.$$

(3) Se $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é linear, então $T'(x) = T$. De fato,

$$T(x+h) = Tx + Th + r(h), \quad \text{onde } r \equiv 0.$$

$$DT(x) = T.$$

(4) Seja $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ bilinear, $X = (x, y)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $H = (h, k)$, então

$$B(X+H) = B(x+h, y+k) = B(x, y) + B(x, k) + B(h, y) + B(h, k)$$

$$= B(X) + T(h, k) + r(H),$$

onde

$$T.H = T(h, k) = B(x, k) + B(h, y), \quad r(H) = B(h, k)$$

$$T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p) \approx \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+m}, \mathbb{R}^p).$$

$$\left\| \frac{r(H)}{H} \right\| = \frac{\|B(h, k)\|}{\|(h, k)\|} \leq \frac{C \|h\| \|k\|}{\|h + k\|} \leq \frac{C \|h\| \|h + k\|}{\|h + k\|} = C \|h\| \rightarrow 0$$

$$H \rightarrow 0 \Leftrightarrow \begin{cases} h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \|h\| \rightarrow 0 \\ \|k\| \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p) \text{ e } DB(x, y)(h, k) = B(x, k) + B(h, y).$$

(5) **Derivada Direcional**

$f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciável em $x_0 \in U$.

$$f(x_0+h)-f(x_0) = Df(x_0).h+r(h) \Rightarrow f(x_0+th)-f(x_0) = tDf(x_0).h+r(th)$$

$$\Rightarrow \frac{f(x_0+th)-f(x_0)}{t} = Df(x_0).h + \frac{r(th)}{t} \Rightarrow \frac{f(x_0+th)-f(x_0)}{t} =$$

$$= Df(x_0).h \pm \frac{r(th) \|h\|}{\|th\|}$$

$$t \rightarrow 0 \Rightarrow th \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{r(th)}{\|th\|} \rightarrow 0$$

logo,

$$Df(x_0).h = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0+th)-f(x_0)}{t}$$

Esta é a derivada direcional de f em x_0 , na direção h . Considerando $h = e_j = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$, obtemos

$$\begin{aligned} Df(x_0).e_j &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0+te_j)-f(x_0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_j+t, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_n^0)}{t} \\ &= \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_j} \text{ (derivada parcial de } f \text{ com relação à variável } x_j). \end{aligned}$$

Notação:

$$Df(x_0).h = \frac{\partial f(x_0)}{\partial h}$$

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial e_j} = Df(x_0).e_j = \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_j}$$

(6)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Se $h = (u, n) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + t(u, n)) - f(0, 0)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tu, tn)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{t^3 u^2 n}{t^2 u^2 + t^2 n^2} \right) \frac{1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u^2 n}{u^2 + n^2} = \frac{u^2 n}{u^2 + n^2} \end{aligned}$$

Logo, f em derivada direcional em $(0, 0)$ em qualquer direção $h = (u, n)$, mas esta derivada não varia linearmente com h . Isto implica que f não é diferenciável em $(0, 0)$.

Matriz Jacobiana

Dada uma função $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, ela determina m funções reais $f_1, f_2, \dots, f_m : U \rightarrow \mathbb{R}$, que são suas componentes, e

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)), \forall x \in U.$$

TEOREMA 78. *Uma função $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é diferenciável em $x_0 \in U \Leftrightarrow$ cada componente f_j é diferenciável em x_0 . Neste caso,*

$$Df(x_0).h = (Df_1(x_0).h, Df_2(x_0).h, \dots, Df_m(x_0).h).$$

Prova: Uma aplicação linear $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é determinada por m aplicações lineares $T_1, T_2, \dots, T_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$T.h = (T_1.h, \dots, T_m.h), \quad h \in \mathbb{R}^n$$

$$r(h) = (r_1(h), \dots, r_m(h))$$

$$\frac{r(h)}{\|h\|} = \left(\frac{r_1(h)}{\|h\|}, \dots, \frac{r_m(h)}{\|h\|} \right)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0 \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r_j(h)}{\|h\|} = 0, \forall j = 1, \dots, m$$

Se f é diferenciável, $f = (f_1, \dots, f_m)$, então

$$Df(x_0).e_j = \frac{\partial f(x_0)}{\partial e_j} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x_0), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(x_0) \right)$$

$$Jf(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{bmatrix}_{m \times n}$$

Exemplo: $f(x, y) = \underset{f_1}{(e^x \cos y, e^x \sin y)}_{f_2}$

$$Jf(x, y) = \begin{bmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{bmatrix}$$

Vamos calcular $Df(0, \pi/2)$, temos que

$$Jf(0, \pi/2) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

segue que

$$Df(0, \pi/2)(u, n) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -n \\ u \end{bmatrix}$$

$$T(u, n) = (-n, u), \quad T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(*) \quad f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad Df(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), \quad \begin{matrix} Df : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \\ x \mapsto Df(x_0) \end{matrix}.$$

Regra da Cadeia

Sejam $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$ e $g : V \rightarrow \mathbb{R}^p$ funções diferenciáveis em $x \in U$ e $y = f(x)$, respectivamente. Então, $g \circ f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ é diferenciável em x e

$$((*) \quad D(g \circ f)(x) = Dg(y) \circ Df(x) \quad (\text{composição de Apl. Lin.})$$

Em termos de matriz Jacobiana a relação (*) toma a forma

$$(**) \quad J(g \circ f)(x) = Jg(y) \cdot Jf(x) \quad (\text{Prod. Matrizes})$$

Demonstração:

$$f(x+u) = f(x) + Df(x)u + r(u); \quad \frac{r(u)}{\|u\|} \rightarrow_{u \rightarrow 0} 0$$

$$g(y+n) = g(y) + Dg(y)n + \rho(n); \quad \frac{\rho(n)}{\|n\|} \rightarrow_{n \rightarrow 0} 0$$

Temos

$$\begin{aligned}
 (g \circ f)(x+u) - (g \circ f)(x) &= g(f(x+u)) - g(f(x)) \\
 &= g(f(x) + Df(x)u + r(u)) - g(f(x)) \\
 &= g(y + \underbrace{Df(x)u + r(u)}_n) - g(y) \\
 &= Dg(y)(Df(x)u + r(u)) + \rho(Df(x)u + r(u)) \\
 &= [Dg(y) \circ Df(x)]u + R(u)
 \end{aligned}$$

onde $R(u) = \rho(Df(x)u + r(u)) + Dg(y)(r(u))$. Mostraremos que $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{R(u)}{\|u\|} = 0$. Temos

$$R(u) = \frac{\rho(Df(x)u + r(u))}{\|Df(x)u + r(u)\|} \|Df(x)u + r(u)\| + Dg(y)\left(\frac{r(u)}{\|u\|}\right) \|u\| \rightarrow 0.$$

Consequências

(1) Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma bijeção, diferenciável em x . Se a inversa $f^{-1} : f(U) \rightarrow \mathbb{R}^n$ é diferenciável em $y = f(x)$, então $Df(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é um isomorfismo linear (em particular $m = n$) e

$$D(f^{-1})(y) = [Df(x)]^{-1}.$$

Prova: $f \circ f^{-1} = id_{\mathbb{R}^m} \Rightarrow D(f(x)) \circ D(f^{-1})(y) = id_{\mathbb{R}^m}$, $f^{-1} \circ f = id_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow Df^{-1}(y) \circ Df(x) = id_{\mathbb{R}^n}$. ■

Caráter Geométrico da Regra da Cadeia

Caminho em $\mathbb{R}^m$: $\sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\sigma(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t))$, $\sigma'(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$.

$$\begin{aligned}
 \sigma'(t).1 &= (x'_1(t).1, x'_2(t).1, \dots, x'_m(t).1) \\
 &= (x'_1(t), x'_2(t), \dots, x'_m(t))
 \end{aligned}$$

Se σ é um caminho diferenciável em $\sigma(0) = x$ e $\sigma'(0) = u$ então

$$(f \circ \sigma)'(0) = Df(\sigma(0)).\sigma'(0) = Df(x).u \quad (\text{derivada direcional}).$$

Regra da Cadeia Clássica (Cálculo II)

$$z = f(x, y), \quad x = x(u, v), \quad y = y(u, v) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$$

$$w = g(y_1, y_2, \dots, y_m), \quad y_j = f_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$$

$$w = g \circ f \Rightarrow J(w) = J(g) \cdot J(f)$$

$$\left[\frac{\partial w}{\partial x_1}, \frac{\partial w}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial w}{\partial x_n} \right] = \left[\frac{\partial g}{\partial y_1}, \frac{\partial g}{\partial y_2}, \dots, \frac{\partial g}{\partial y_m} \right] \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial g}{\partial y_i} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}.$$

Regras de derivação

$$(a) \quad D[f + \lambda g](x) = Df(x) + \lambda Dg(x),$$

$$(b) \quad B : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p \text{ bilinear,}$$

$$D[B(f, g)]u = B(f'(x)u, g(x)) + B(f(x), g'(x)u).$$

$$(c) \quad \text{Se } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ é derivável e } f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R},$$

$$\left(\frac{1}{f} \right)'(x) = \frac{-1}{f(x)^2} \cdot Df(x).$$

Prova: Seja $F(x) = (f(x), g(x))$

$$(a) \quad \varphi(x, y) = x + \lambda y \Rightarrow f + \lambda g = \varphi \circ F$$

$$D(f + \lambda g)(x) = D(\varphi \circ F)(x) = D\varphi(F(x)) \cdot DF(x)$$

$$= \varphi(f'(x), g'(x)) = f'(x) + \lambda g'(x).$$

Aqui usamos $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $T'(x) = T$.

$$(b) \quad \text{Seja } b = B(f, g), \text{ temos } b(x) = B(f(x), g(x)) \Rightarrow b = B \circ F.$$

$$Db(x) = DB(F(x)) \cdot DF(x)$$

$$Db(x)u = DB(f(x), g(x))(f'(x)u, g'(x)u)$$

$$= B(f(x), g'(x)u) + B(f'(x)u, g(x)).$$

$$(c) \quad \varphi(t) = \frac{1}{t}, t > 0. \Rightarrow \frac{1}{f} = \varphi \circ f \Rightarrow$$

$$\left(\frac{1}{f} \right)'(x) = \varphi'(f(x)) \cdot f'(x)$$

$$= \frac{-1}{f(x)^2} \cdot f'(x)$$

Regra do produto

$B : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bilinear

$$(x, y) \mapsto xy$$

$$f.g = B \circ F \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} (fg)' &= B'(F(x)).F'(x) = B'(F(x)).(f'(x), g'(x)) \\ &= B'(f(x), g(x))(f'(x), g'(x)) \\ &= f(x)g'(x) + f'(x)g(x) \end{aligned}$$

Derivada do produto interno

$f, g : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciáveis em $x_0 \in U$. Seja $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \langle f(x), g(x) \rangle$. Temos que $\varphi = B \circ F$, onde $B(x, y) = \langle x, y \rangle$ e $F(x) = (f(x), g(x))$. Logo, φ é diferenciável em x_0 e

$$D\varphi(x_0)u = B'(f(x_0)).F'(x_0)u$$

Agora

$$F'(x_0)u = (f'(x_0).u, g'(x_0).u)$$

e

$$B'(x, y)(h, k) = B(x, k) + B(h, y)$$

portanto,

$$D\varphi(x_0).u = B(f(x_0), g'(x_0).u) + B(f'(x_0).u, g(x_0))$$

segue que

$$D\varphi(x_0).u = \langle f(x_0), g'(x_0).u \rangle + \langle f'(x_0).u, g(x_0) \rangle.$$

Derivada da Norma

$$\varphi(x) = \|f(x)\|^2, x \in U$$

$$\varphi(x) = \langle f(x), f(x) \rangle$$

$$D\varphi(x_0).u = 2\langle f(x_0), f'(x_0).u \rangle$$

seja agora $\beta(x) = \|f(x)\| = \sqrt{\langle f(x), f(x) \rangle}$, temos que se

$$\alpha(t) = \sqrt{t} \Rightarrow \alpha'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}, t > 0$$

mas $\beta = \alpha \circ \varphi$

$$\beta(x) = \alpha(\varphi(x)) = \sqrt{\varphi(x)} = \sqrt{\langle f(x), f(x) \rangle}$$

e

$$\begin{aligned}
D\beta(x_0).u &= \alpha'(\varphi(x_0)).\varphi'(x_0).u \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\varphi(x_0)}} 2\langle f(x_0), f'(x_0).u \rangle = \frac{\langle f(x_0), f'(x_0).u \rangle}{\|f(x_0)\|} \\
f(x) &= x, \forall x \in \mathbb{R}^n
\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx}(\|x\|).u = \frac{\langle x, u \rangle}{\|x\|}$$

$$\text{quando } n = 1, \langle x, u \rangle = x.u \Rightarrow \frac{\langle x, u \rangle}{\|x\|} = \frac{x}{\|x\|}.u.$$

Desigualdade do Valor Médio

1º Caso Funções de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e derivável em (a, b) . Existe um $\xi \in (a, b)$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

Equivalentemente,

$$f(a + h) - f(a) = f'(a + th).h, \quad 0 < t < 1.$$

É claro que

$$|f(a + h) - f(a)| \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} |f'(a + th).h|.$$

2º Caso Funções de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

$f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável em U e suponha que o segmento $[a, a + h] \subset U$ (Aqui $[a, a + h] = \{a + th; 0 \leq t \leq 1\}$). Então, existe $t \in (0, 1)$ tal que

$$f(a + h) - f(a) = Df(a + th).h. \quad (\text{Teo. Valor Médio})$$

Prova: Seja $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(t) = f(a + th)$, i. e., $\varphi(t) = (f \circ \alpha)(t)$ onde $\alpha(t) = a + th$ é derivável em $(0, 1)$ e contínua em $[0, 1]$. Logo, φ é derivável em $(0, 1)$ e contínua em $[0, 1]$, e

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\xi) = f'(\alpha(\xi)).\alpha'(\xi)$$

ou

$$f(a + h) - f(a) = Df(a + \xi h).h, \quad 0 < \xi < 1. \blacksquare$$

Exemplo: Seja $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, onde $f(t) = (\cos t, \sin t)$, temos

$$f(2\pi) - f(0) = (1, 0) - (1, 0) = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$$

$$Df(t_0) = (-\sin t_0, \cos t_0) \neq (0, 0), \forall t_0 \in [0, 2\pi]$$

$$f(2\pi) - f(0) = Df(t_0)(2\pi - 0) \quad (\text{nunca ocorre})$$

3º Caso Funções de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciável no aberto U e suponha que o segmento $[a, a + h] \subset U$. Então, temos a seguinte desigualdade

$$(*) \quad \|f(a + h) - f(a)\| \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \|Df(a + \xi h) \cdot h\|$$

Esta é a *desigualdade do valor médio*.

Prova: Seja $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\varphi(t) = f(a + th)$, temos que $\varphi(1) = f(a + h)$, $\varphi(0) = f(a)$ e $\varphi'(t) = Df(a + th) \cdot h$. Logo, a desigualdade (??) toma a seguinte forma:

$$\|\varphi(1) - \varphi(0)\| \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \|\varphi'(t)\|$$

Seja $M = \sup_{0 \leq t \leq 1} \|\varphi'(t)\|$. Se $M = \infty$, não há nada a provar.

Suponhamos $M < \infty$. É suficiente mostrar que

$$\|\varphi(1) - \varphi(0)\| \leq M + \varepsilon, \forall \varepsilon > 0.$$

Seja $X = \{t \in [0, 1]; \|\varphi(s) - \varphi(0)\| \leq (M + \varepsilon)s, \forall s \in [0, t]\}$,

(1) $X \neq \emptyset$, porque $0 \in X$.

(2) Se $t \in X$ e $0 < t' \leq t$, então $t' \in X$.

(3) X é um intervalo do tipo $[0, \alpha)$ ou $[0, \alpha]$.

(A) $\alpha \in X$. De fato, se $\alpha \notin X$, então seja $s_0 \in [0, \alpha]$ tal que

$$\|\varphi(s_0) - \varphi(0)\| > (M + \varepsilon)s_0$$

por continuidade, $\exists \delta > 0$ tal que

$$\|\varphi(s) - \varphi(0)\| > (M + \varepsilon)s, \forall s \in (s_0 - \delta, s_0) \subset [0, \alpha).$$

Logo, $0 < s_0 - \delta < t_0 < s_0 \leq \alpha$ e $t_0 \notin X$. Isto contradiz o fato de X ser um intervalo. Logo, $X = [0, \alpha]$.

(B) $\alpha = 1$ (Logo $X = [0, 1]$). Suponha que $\alpha < 1$. Seja $\delta > 0$; $\alpha + \delta < 1$ então

$$\varphi(\alpha + h) - \varphi(\alpha) = D\varphi(\alpha).h + r(h)$$

onde $|h| < \delta$ e $\|r(h)\| < \varepsilon \|h\|$. Daí

$$\begin{aligned} \|\varphi(\alpha + h) - \varphi(\alpha)\| &\leq \|D\varphi(\alpha).h\| + \|r(h)\| \\ &< \|D\varphi(\alpha)\| \cdot \|h\| + \varepsilon \|h\| \\ &< (M + \varepsilon) \|h\|, \quad 0 < h < \delta \end{aligned}$$

ou seja,

$$(I) \quad \|\varphi(\alpha + h) - \varphi(\alpha)\| < (M + \varepsilon) \|h\|$$

Também

$$(II) \quad \|\varphi(s) - \varphi(0)\| < (M + \varepsilon)s, \quad \forall s \in [0, \alpha]$$

Combinando (II) e (I) temos:

$$(III) \quad \|\varphi(\alpha + h) - \varphi(0)\| \leq (M + \varepsilon)(h + \alpha)$$

Afirmacão: $\alpha + \frac{\delta}{2} \in X$. De fato,

$$\alpha + \frac{\delta}{2} \in X \Leftrightarrow \|\varphi(s) - \varphi(0)\| \leq (M + \varepsilon)s, \quad \forall s \in [0, \alpha + \frac{\delta}{2}].$$

Seja $s \in [0, \alpha + \frac{\delta}{2}]$, temos que: (i) se $s \in [0, \alpha]$, ok!; (ii) seja $s \in [\alpha, \alpha + \frac{\delta}{2}]$, então, $s = \alpha + h$, $0 < h < \frac{\delta}{2}$. Por (III), segue que

$$\|\varphi(s) - \varphi(0)\| \leq (M + \varepsilon)s$$

mas isto contradiz o fato que $X = [0, \alpha]$.

Consequências da Desigualdade do Valor Médio

$f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciável no segmento $\{x_0 + th; 0 < t < 1\}$

$$\|f(x_0 + th) - f(x_0)\| \leq \sup_{0 < t < 1} \|Df(x_0 + th).h\|$$

(A) Se U é aberto e conexo e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é diferenciável com $Df(x) \equiv 0$, $\forall x \in U$, então f é constante.

Prova: Seja $x_0 \in U$ fixado e defina $X = \{x \in U; f(x) = f(x_0)\}$ e $Y = \{x \in U; f(x) \neq f(x_0)\}$, Y é aberto, pois f é contínua e $Y = f^{-1}(\{y_0\}^C)$ onde $y_0 = f(x_0)$; temos que $X \neq \emptyset$, pois $x_0 \in X$; X é fechado ($X = f^{-1}(\{y_0\})$); X é aberto: de fato, seja $x \in X$ e $\delta > 0$ tal

que $B_\delta(x) \subset U$. Dado $h \in \mathbb{R}^m$ com $\|h\| < \delta$, então $x + th \in B_\delta(x)$, $\forall t \in [0, 1]$, pois $\|x + th - x\| = |t| \|h\| < \delta$. Também $\|f(x + th) - f(x)\| \leq \sup_{0 < t < 1} \|Df(x + th).h\| = 0$, logo, $f(x + th) = f(x) = f(x_0)$, $\|h\| < \delta \Rightarrow B_\delta(x) \subset X \Rightarrow x \in \text{int}(X)$. Como $U = X \cup Y$ é conexo, e $X \neq \emptyset$, segue que $Y = \emptyset \Rightarrow X = U$.

(B) Se f é diferenciável no segmento $[x_0, x_0 + h]$, então

$$\|f(x_0 + th) - f(x_0) - T.h\| \leq \sup_{0 < t < 1} \|Df(x_0 + th) - T\| \cdot \|h\|,$$

$\forall T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$.

Prova: Seja $G(x) = f(x) - Tx$, $x \in U$, $DG(x) = Df(x) - T$, daí

$$\|G(x_0 + h) - G(x_0)\| \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \|DG(x_0 + th).h\| \Leftrightarrow$$

$$\|f(x_0 + h) - Tx_0 - Th - f(x_0) + Tx_0\| \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \|Df(x_0 + th).h - Th\|$$

$$\leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \|Df(x_0 + th) - T\| \|h\| \blacksquare$$

Corolário: $\|f(x_0 + h) - f(x_0) - Df(x_0).h\| \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \|Df(x_0 + th) - T\| \|h\| \Leftrightarrow \|r(h)\| \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \|Df(x_0 + th) - Df(x_0)\| \|h\|$.

(C) Seja $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua em U e diferenciável em $U - \{x_0\}$. Se existir o limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} Df(x) = T \text{ em } \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$$

então f é diferenciável em x_0 e $Df(x_0) = T$.

Prova: $\|f(x_0 + h) - f(x_0) - T.h\| \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \|Df(x_0 + th) - T\| \|h\|$

$$\frac{\|r(h)\|}{\|h\|} \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \|Df(x_0 + th) - T\|.$$

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que

$$x \in U, \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|Df(x) - T\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)} < \varepsilon$$

Se $\|h\| < \delta$, então $x = x_0 + th$ satisfaz $\|x - x_0\| < \delta$, e portanto

$$\|Df(x_0 + th) - T\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)} < \varepsilon, \quad 0 < t \leq 1$$

$$\frac{\|r(h)\|}{\|h\|} < \varepsilon, \text{ se } \|h\| < \delta$$

(D) Se $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é diferenciável e $\|Df(x)\| \leq M, \forall x \in U$, então f é Lipschitziana. ($\|T\|_{\mathcal{L}} \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|$).

$$\|f(x+h) - f(x)\| \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \|Df(x+th)\| \cdot \|h\| \leq M \cdot \|h\|$$

PROPOSITION 79. $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciável com $Df(x_0)$ injetiva. Então, existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \neq f(x_0), \forall x \in B_\delta(x_0), x \neq x_0$.

Prova: $Df(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, $F = Df(x_0)$, $Df(x_0) : \mathbb{R}^m \rightarrow F$ é um isomorfismo linear. Então, existe $c > 0$ tal que

$$\|Df(x_0) \cdot \xi\| \geq c \|\xi\|, \forall \xi \in \mathbb{R}^m$$

$\exists \delta > 0$ tal que $\|r(\xi)\| < \frac{c}{2} \|\xi\|, \|\xi\| < \delta$.

$$\|f(x_0 + \xi) - f(x_0)\| = \|Df(x_0) \cdot \xi + r(\xi)\|$$

$$\geq \|Df(x_0) \cdot \xi\| - \|r(\xi)\|$$

$$\geq c \|\xi\| - \frac{c}{2} \|\xi\| = \frac{c}{2} \|\xi\| > 0, \text{ se } \xi \neq 0$$

$\forall \xi \in B_\delta(0)$. Logo, $f(x_0 + \xi) \neq f(x_0), \forall \xi \in B_\delta(0), \delta \neq 0$.

Funções de Classe C^1

Dois exemplos clássicos do cálculo.

$$(A) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

tem derivada direcional em $(0, 0)$, em qualquer direção, mas não é diferenciável. Em particular, $f(x, y)$ tem derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.

$$(B) g(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right), & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Seja $H = (h, k)$. Mostraremos que g é diferenciável em $(0, 0)$

$$g(\vec{0} + H) - g(\vec{0}) = g(h, k) = (h^2 + k^2) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{h^2 + k^2}}\right)$$

Seja $T \equiv 0$ e $r(h, k) = (h^2 + k^2) \sin(\frac{1}{\sqrt{h^2 + k^2}})$, temos

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{r(h, k)}{\|(h, k)\|} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{(h^2 + k^2)}{\sqrt{h^2 + k^2}} \sin(\frac{1}{\sqrt{h^2 + k^2}}) = 0$$

logo, $Dg(0, 0) = 0$. Agora $\frac{\partial g}{\partial x}$ e $\frac{\partial g}{\partial y}$ não são contínuas na origem.

$$\frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = 2x \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função.

TEOREMA 80. *Se as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ são contínuas então a função f é diferenciável, $\forall i = 1, \dots, n$.*

Prova: Dado $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ defina

$$T.\xi = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \cdot \xi_i$$

temos que $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ e mostremos que $T = Df(x)$.

$$f(x+\xi) - f(x) - T\xi = f(x_1+\xi_1, \dots, x_n+\xi_n) - f(x_1, \dots, x_n) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \cdot \xi_i$$

$$\begin{aligned} &= f(x_1 + \xi_1, \dots, x_n + \xi_n) - f(x_1, x_2 + \xi_2, \dots, x_n + \xi_n) \\ &+ f(x_1, x_2 + \xi_2, \dots, x_n + \xi_n) - f(x_1, x_2, x_3 + \xi_3, \dots, x_n + \xi_n) \\ &+ f(x_1, x_2, x_3 + \xi_3, \dots, x_n + \xi_n) + \dots + f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n + \xi_n) \\ &- f(x_1, \dots, x_n) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \cdot \xi_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(x + \xi) - f(x) - T\xi &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 + t\xi_1, x_2 + \xi_2, \dots, x_n + \xi_n)\xi_1 + \\
&+ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2 + t\xi_2, \dots, x_n + \xi_n)\xi_2 + \dots \\
&+ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n + t\xi_n)\xi_n - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \cdot \xi_i \\
&= \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 + t\xi_1, x_2 + \xi_2, \dots, x_n + \xi_n) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \right] \xi_1 + \\
&+ \dots + \left[\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n + t\xi_n) - \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right] \xi_n
\end{aligned}$$

Daí usando $a + b \leq |a| + |b|$, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{|r(\xi)|}{\|\xi\|} &\leq \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 + t\xi_1, x_2 + \xi_2, \dots, x_n + \xi_n) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \right| \frac{|\xi_1|}{\|\xi\|} + \\
&+ \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n + t\xi_n) - \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right| \frac{|\xi_n|}{\|\xi\|}
\end{aligned}$$

note que $\frac{|\xi_i|}{\|\xi\|} \leq 1$ e como $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$, são contínuas segue que quando $\xi \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{|r(\xi)|}{\|\xi\|} \rightarrow 0$, e, portanto $Df(x) \cdot \xi = T \cdot \xi = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot \xi_i$. ■

REMARK 81. Se $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável, podemos definir a aplicação derivada

$$Df : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

$$x \mapsto Df(x)$$

Se esta aplicação for contínua, então as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$ serão todas contínuas.

De fato,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \right| &= |Df(x).e_i - Df(x_0).e_i| \\ &= |(Df(x) - Df(x_0)).e_i| \\ &\leq \|(Df(x) - Df(x_0))\| \end{aligned}$$

logo,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \right| \leq \lim_{x \rightarrow x_0} \|(Df(x) - Df(x_0))\| = 0.$$

combinando o teorema com a observação, temos:

TEOREMA 82. *Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Então, as derivadas parciais de 1ª ordem $\frac{\partial f}{\partial x_i}, i = 1, \dots, n$, são contínuas $\Leftrightarrow f$ é diferenciável e a aplicação derivada $Df : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ é contínua.*

DEFINIO 83. *Uma função $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é de classe C^1 quando suas componentes $f_1, \dots, f_m : U \rightarrow \mathbb{R}$ possuírem derivadas parciais $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}, j = 1, \dots, n$, contínuas.*

Observando que $\frac{\partial f}{\partial x_i} = (\frac{\partial f_1}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i})$, então $f \in C^1$ quando as derivadas $\frac{\partial f}{\partial x_i}, i = 1, \dots, n$ forem contínuas.

Generalização da derivada parcial

$$\mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \{(x, y), x \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^n\}$$

$f : U \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^p$ diferenciável em (x_0, y_0) , seja $U_{x_0} = \{y \in \mathbb{R}^n; (x_0, y) \in U\}$. Temos U_{x_0} é aberto em $\mathbb{R}^n$ (se $(x_0, y) \in U_{x_0} \Rightarrow \exists V \subset \mathbb{R}^m$ e $W \subset \mathbb{R}^n$ abertos tais que $(x_0, y) \in V \times W \subset U \Rightarrow y \in W \subset U_{x_0}$).

Defina $f_{x_0} : U_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}^p, f_{x_0}(y) = f(x_0, y)$. A função f_{x_0} é diferenciável em y_0 e $Df_{x_0}(y_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p), Df_{x_0}(y_0).\eta = Df(x_0, y_0).(0, \eta)$.

$$\begin{aligned} \rho(\eta) &= f_{x_0}(y_0 + \eta) - f_{x_0}(y_0) - Df_{x_0}(y_0).(0, \eta) \\ &= f(x_0, y_0 + \eta) - f(x_0, y_0) - Df(x_0, y_0).(0, \eta) \\ &= f(z_0 + H) - f(z_0) - Df(z_0).H = r(H) \end{aligned}$$

onde $z_0 = (x_0, y_0)$, $H = (0, \eta)$. Agora

$$\frac{\rho(\eta)}{\|\eta\|} = \frac{r(0, \eta)}{\|\eta\|} = \frac{r(H)}{\|H\|} \rightarrow 0$$

DEFINIO 84. A derivada parcial de f em (x_0, y_0) com relação a y é, por definição, a aplicação linear $D_y f(x_0, y_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$,

$$(I) \quad D_y f(x_0, y_0) \cdot h = Df(x_0, y_0) \cdot (0, h)$$

De modo análogo,

$$D_x f(x_0, y_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$$

$$(II) \quad D_x f(x_0, y_0) \cdot \xi = Df(x_0, y_0) \cdot (\xi, 0)$$

Somando I e II temos

$$Df(x_0, y_0) \cdot (\xi, h) = D_x f(x_0, y_0) \cdot \xi + D_y f(x_0, y_0) \cdot h$$

$$T = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot \xi_i$$

REMARK 85. $f : \mathbb{R}^m = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = Df(x_0, y_0) \cdot (1, 0, \dots, 0)$$

$$D_x f(x_0, y_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad D_x f(x_0, y_0) \cong D_x f(x_0, y_0) \cdot 1$$

$$D_x f(x_0, y_0) \cdot 1 = Df(x_0, y_0) \cdot (1, 0, \dots, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).$$

TEOREMA 86 (Leibniz). $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto, $f : U \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua com derivada parcial $D_x f : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ também contínua. Seja $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

$$\Phi(x) = \int_a^b f(x, t) dt.$$

Então, Φ é de classe C^1 e $\Phi'(x) = \int_a^b D_x f(x, t) dt$.

8. Integração de Funções Vetoriais

Fixemos um caminho $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Dada uma partição $P : a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ do intervalo $[a, b]$, consideremos o seguinte vetor do $\mathbb{R}^n$

$$\sum_P(f) = \sum_{i=1}^k (t_i - t_{i-1}) f(t_i) \in \mathbb{R}^n$$

Dizemos que f é integrável quando existir um vetor $v \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\left\| v - \sum_P(f) \right\| \rightarrow 0, \text{ quando } \|P\| \rightarrow 0, \text{ onde } \|P\| = \max_{1 \leq i \leq k} |t_i - t_{i-1}|$$

Este vetor v é representado pelo símbolo

$$\int_a^b f(t) dt \in \mathbb{R}^n.$$

Propriedades Básicas:

Sejam $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ integráveis, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Então, $f + \alpha g$ é integrável, $T \circ f$ é integrável e

$$(A) \int_a^b (f + \alpha g) dt = \int_a^b f dt + \alpha \int_a^b g dt;$$

$$(B) \int_a^b T \circ f(t) dt = T \int_a^b f(t) dt \in \mathbb{R}^m;$$

$$(C) \left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt.$$

Demonstração:

$$(A) \sum_P(f + \alpha g) = \sum_P(f) + \alpha \sum_P(g) = \int_a^b f + \alpha \int_a^b g.$$

(B) $\sum_P(T \circ f) = \sum_{i=1}^k (t_i - t_{i-1}) T f(t_i) = T \sum_P(f)$ como T é contínua e $\sum_P(f)$ converge então $T \sum_P(f)$ converge.

$$(C) \left\| \sum_P(f) \right\| \leq \sum_{i=1}^k (t_i - t_{i-1}) \|f(t_i)\|. \blacksquare$$

Exemplos:

(1) *Função constante:*

Seja $\mu \in \mathbb{R}^n$ um vetor fixo e seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $f(t) = \mu$, $\forall t$

$$\sum_P(f) = \sum_{i=1}^k (t_i - t_{i-1}) \mu = (b - a) \mu \in \mathbb{R}^n.$$

(2) *Função "quase nula"*

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função que vale zero em $[a, b]$, exceto no conjunto $\{r_1, \dots, r_l\}$. Então, $\int_a^b f(t)dt = \vec{0}$. De fato, dada uma partição $P : a = t_0 < \dots < t_n = b$ do intervalo $[a, b]$, temos que

$$\sum_p(f) = \sum_{i=1}^k (t_i - t_{i-1}) f(t_i)$$

Seja $\varepsilon > 0$ dado

$$\left\| \sum_p(f) \right\| \leq \sum_{i=1}^k (t_i - t_{i-1}) \|f(t_i)\| \leq \sum_{i=1}^k (t_i - t_{i-1}) \|f(r_i)\|$$

seja $M = \max_{1 \leq i \leq l} \|f(r_i)\|$. Então

$$\left\| \sum_p(f) \right\| \leq M \|P\| l$$

Tome $\delta = \frac{\varepsilon}{Ml}$, se $\|P\| < \delta$, então $M \|P\| l < \varepsilon$. Logo, $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_p(f) = 0$, isto é, $\int_a^b f(t)dt = 0$.

(3) Se $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ são integráveis e $f = g$, exceto possivelmente, num conjunto finito, então $\int_a^b f dt = \int_a^b g dt$.

(4) **Funções Simples**

Uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é denominada "função simples" quando existir uma partição $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ e vetores $v_0, v_1, \dots, v_{k-1} \in \mathbb{R}^n$ tais que

$$f(t) = v_i, \quad t_i < t < t_{i+1}, \quad i = 0, \dots, k-1.$$

Para esta função simples

$$\sum_P(f) = \sum_{i=1}^k (t_i - t_{i-1}) v_{i-1}.$$

DEFINIO 87. Um caminho $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é denominado "caminho regulado" quando os limites laterais $f(x+0)$ e $f(x-0)$ existem em cada ponto $x \in [a, b]$.

(Exemplo: Funções simples)

TEOREMA 88 (de Aproximação). : *Um caminho $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é regulado $\Leftrightarrow f$ é limite uniforme de uma sequência de funções simples.*

PROPOSITION 89. *Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é regulado, então para cada $x \in [a, b]$ tem-se*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^b f(t)dt.$$

Prova:

Fixemos uma sequência $\{f_\nu\}$ de funções simples, convergindo uniformemente para f . Seja

$$v_\nu = \int_a^b f(t)dt, \quad \nu = 1, 2, 3, \dots$$

Afirmção: $\{v_\nu\}$ é de Cauchy em $\mathbb{R}^n$ (comp.)

$$\begin{aligned} \|v_\nu - v_\mu\| &= \left\| \int_a^b f_\nu dt - \int_a^b f_\mu dt \right\| = \left\| \int_a^b (f_\nu - f_\mu) dt \right\| \\ &\leq \int_a^b \|f_\nu - f_\mu\| dt \leq (b-a) \|f_\nu - f_\mu\|_\infty, \end{aligned}$$

onde $\|f_\nu - f_\mu\|_\infty = \sup_{a \leq t \leq b} \|f_\nu(t) - f_\mu(t)\|$, $f_\nu \rightarrow f$ uniformemente
 $\Leftrightarrow \|f_\nu - f\|_\infty \rightarrow 0, \nu \rightarrow \infty \Rightarrow \|f_\nu - f_\mu\|_\infty \rightarrow 0, \nu, \mu \rightarrow \infty$.

Seja $v = \lim_{\nu \rightarrow \infty} v_\nu$. Mostremos que $v = \int_a^b f dt$.

$$\left\| \sum_P(f) - v \right\| \leq \left\| \sum_P(f) - \sum_P(f_{\nu_0}) \right\| + \left\| \sum_P(f_{\nu_0}) - v_{\nu_0} \right\| + \|v_{\nu_0} - v\|$$

Dado $\varepsilon > 0$, escolha v_{ν_0} e $\delta > 0$ tais que

$$\|v_{\nu_0} - v\| < \varepsilon/3; \quad \|f - f_{\nu_0}\| < \varepsilon/3(b-a); \quad \left\| \sum_P(f_{\nu_0}) - v_{\nu_0} \right\| < \varepsilon/3, \quad \|p\| < \delta.$$

Logo, f é integrável e

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_a^b f_\nu(t)dt = (\text{conv. unif.}) = \int_a^b \lim_{\nu \rightarrow \infty} f_\nu(t)dt$$

Dado $x \in [a, b]$, sejam $g = f|_{[a, x]}$ e $h = f|_{[x, b]}$. Dada uma partição P de $[a, b]$, esta partição induz partições P' e P'' em $[a, x]$ e $[x, b]$, respectivamente. (Estamos supondo $x \in P$).

$$\sum_P(f) = \sum_{P'}(g) + \sum_{P''}(h)$$

$$\int_a^b f = \int_a^x g + \int_x^b h = \int_a^x f + \int_x^b f.$$

TEOREMA 90 (Fundamental do Cálculo). *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ um caminho regulado e seja*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt; \quad x \in [a, b].$$

Então, $F(x)$ é contínua, possui derivadas laterais em todo ponto $x \in [a, b]$ e $F'(x+0) = f(x+0)$ e $F'(x-0) = f(x-0)$.

Demonstração:

$$\begin{aligned} \|F(x+\xi) - F(x)\| &= \left\| \int_a^{x+\xi} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right\| \\ &= \left\| \int_x^{x+\xi} f(t)dt \right\| \leq |\xi| \|f\|_\infty \end{aligned}$$

Logo, $\lim_{\xi \rightarrow 0} F(x+\xi) = F(x)$.

Seja $x \in [a, b]$ e $\xi > 0$

$$\begin{aligned} \left\| \frac{F(x+\xi) - F(x)}{\xi} - f(x+0) \right\| &= \left\| \frac{1}{\xi} \int_x^{x+\xi} f(t)dt - f(x+0) \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{\xi} \int_x^{x+\xi} [f(t) - f(x+0)]dt \right\| \\ &\leq \sup_{x \leq t \leq x+\xi} \|f(t) - f(x+0)\| \end{aligned}$$

Quando $\xi \rightarrow 0^+$, então $t \rightarrow x^+$ e $f(t) \rightarrow f(x+0)$. Logo

$$\lim_{\xi \rightarrow 0^+} \frac{F(x+\xi) - F(x)}{\xi} = f(x+0). \blacksquare$$

CONSEQUÊNCIAS:

(A) Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua, então existe uma função $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 tal que $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in [a, b]$.

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

$$F'(x+0) = f(x+0) = f(x-0) = F'(x-0) \Rightarrow F'(x) = f(x).$$

(B) Seja $f : [a, a+h] \rightarrow \mathbb{R}^n$ um caminho com derivada integrável. Então

$$f(a+h) - f(a) = \int_a^{a+h} f'(t)dt = h \int_0^1 f'(a+th)dt.$$

Prova:

$$F(x) = \int_a^x f'(t)dt \Rightarrow F'(x) = f'(x) \Rightarrow F(x) = f(x) + C \Rightarrow C = -f(a).$$

$$F(x) = f(x) - f(a) \Rightarrow F(a+h) = f(a+h) - f(a) = \int_a^{a+h} f'(t)dt. \blacksquare$$

(C) Seja $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 , $[x, x+h] \subset U$. Então

$$f(x+h) - f(x) = \int_0^1 Df(x+th).hdt = \left(\int_0^1 Df(x+th)dt \right).h$$

Prova:

Seja $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\varphi(t) = f(x+th)$, temos

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t)dt \Leftrightarrow f(x+h) - f(x) = \int_0^1 Df(x+th).hdt. \blacksquare$$

LEMMA 91. $T : [a, b] \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ integrável. Para cada $h \in \mathbb{R}^m$ fixo, o caminho $t \rightarrow T(t).h$ é integrável e $\int_a^b T(t).hdt = \left(\int_a^b T(t)dt \right).h$

Prova: $\int_a^b S \circ f(t)dt = S \int_a^b f(t)dt$, $S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. Seja $\Phi : \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Phi(S) = S.h$

$$\int_a^b \Phi T(t)dt = \Phi \int_a^b T(t)dt$$

$$\int_a^b T(t).hdt = \left(\int_a^b T(t)dt \right).h. \blacksquare$$

(D) $\frac{d}{dx} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt = f(\beta(x)).\beta'(x) - f(\alpha(x)).\alpha'(x)$.

Prova:

$$\alpha, \beta \in C^1, f \in C^0$$

$$b(\xi, \eta) = \int_{\xi}^{\eta} f(t) dt (= \int_a^{\eta} f(t) dt - \int_a^{\xi} f(t) dt)$$

$$F(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t) dt = b(\alpha(x), \beta(x))$$

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{\partial b}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dx} + \frac{\partial b}{\partial \eta} \frac{d\eta}{dx} \\ &= -f(\xi) \cdot \alpha'(x) + f(\eta) \cdot \beta'(x) \end{aligned}$$

onde $\xi = \alpha(x)$, $\eta = \beta(x)$.

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE LEIBNIZ:

$$f : U \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, U \subset \mathbb{R}^m, \text{ cont  ua}$$

$$D_x f : U \times [a, b] \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \text{ cont  ua}$$

$$\Phi(x) = \int_a^b f(x, t) dt$$

$$\text{Conclus  o: } \Phi \in C^1, \Phi'(x) = \int_a^b D_x f(x, t) dt$$

$$\begin{aligned} &\left\| \Phi(x + \xi) - \Phi(x) - \left(\int_a^b D_x f(x, t) dt \right) \cdot \xi \right\| = \\ &= \left\| \int_a^b f(x + \xi, t) dt - \int_a^b f(x, t) dt - \left(\int_a^b D_x f(x, t) dt \right) \cdot \xi \right\| \\ &= \left\| \int_a^b [f(x + \xi, t) - f(x, t) - D_x f(x, t) \cdot \xi] dt \right\| \\ &\leq \int_a^b \|f(x + \xi, t) - f(x, t) - D_x f(x, t) \cdot \xi\| dt \\ &\leq (b - a) \sup_{0 \leq s \leq 1} \|D_x f(x + s\xi, t) - D_x f(x, t)\| \|\xi\| \end{aligned}$$

$(x, t) \rightarrow D_x f(x, t)$    cont  ua em $U \times [a, b]$, uniformemente com rela   o a t .

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; \|x - y\| < \delta \Rightarrow \|D_x f(x, t) - D_x f(y, t)\| < \varepsilon, \forall t$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0;$$

$$\|\xi\| < \delta \Rightarrow \|D_x f(x + s\xi, t) - D_x f(x, t)\| < \varepsilon, \forall t, \forall s \in [0, 1]$$

$$\frac{\left\| \Phi(x + \xi) - \Phi(x) - \left(\int_a^b D_x f(x, t) dt \right) \cdot \xi \right\|}{\|\xi\|} < \varepsilon(b - a), \text{ se } \|\xi\| < \delta$$

$$\text{Logo, } \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\|r(\xi)\|}{\|\xi\|} = 0. \blacksquare$$

$$\begin{aligned} \text{COROLLARY 92. } \frac{d}{dt} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x, t) dt &= f(\beta(t), t) \beta'(t) - f(\alpha(t), t) \alpha'(t) + \\ &\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dt \end{aligned}$$

$$f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}, C^1, \alpha, \beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, C^1.$$

Prova:

$$b(\xi, \eta, t) = \int_{\xi}^{\eta} f(x, t) dx ; \quad \xi = \alpha(t), \quad \eta = \beta(t), \quad t = t.$$

$$F(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x, t) dx = b(\alpha(t), \beta(t), t)$$

$$\begin{aligned} F'(t) &= \frac{\partial b}{\partial \xi} \xi' + \frac{\partial b}{\partial \eta} \eta' + \frac{\partial b}{\partial t} \\ &= f(\beta(t), t) \beta'(t) - f(\alpha(t), t) \alpha'(t) + \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx. \blacksquare \end{aligned}$$

9. Teoremas Clássicos

(1) Teorema da Função Inversa

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 em U .

LEMMA 93. *Se existir uma constante $M > 0$ tal que $\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right| \leq$*

M , $i, j = 1, 2, \dots, n$, $\forall x \in U$, então

$$\|f(x) - f(y)\| \leq n^2 M \|x - y\|.$$

Demonstração: Para cada índice $i = 1, 2, \dots, n$ temos

$$f_i(y) - f_i(x) = \sum_{j=1}^n f_i(y_1, \dots, y_j, x_{j+1}, \dots, x_n) - f_i(y_1, \dots, y_{j-1}, x_j, \dots, x_n)$$

$$= T.V.M. = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\xi_{ij})(y_j - x_j) \Rightarrow$$

$$\|f_i(y) - f_i(x)\| \leq \sum_{j=1}^n M \|x - y\| = nM \|x - y\|$$

$$\|f(y) - f(x)\| \leq \sum_{i=1}^n \|f_i(y) - f_i(x)\| \leq \sum_{i=1}^n nM \|x - y\| = n^2 M \|x - y\|. \blacksquare$$

LEMMA 94. *Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ um isomorfismo linear e seja $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciável. Se $T \circ \varphi$ tem inversa diferenciável, então φ também tem inversa diferenciável.*

Demonstração: (i) φ é injetiva pois, $\varphi(x) = \varphi(y) \Rightarrow T(\varphi(x)) = T(\varphi(y)) \Rightarrow x = y$.

(ii) φ^{-1} é diferenciável, $[T \circ \varphi]^{-1} = \varphi^{-1} \circ T^{-1} \Rightarrow \varphi^{-1} = [T \circ \varphi]^{-1} \circ T$ é diferenciável. $\blacksquare$

LEMMA 95. *Seja $x_0 \in U$ um ponto de máximo de uma função diferenciável $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$. Então, $D\varphi(x_0) = 0$.*

Demonstração:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(x_0 + t\xi) - \varphi(x_0)}{t} = D\varphi(x_0) \cdot \xi$$

$\varphi(x_0) \geq \varphi(x_0 + t\xi)$; $\xi \in \mathbb{R}^n$, $|t| < \delta$ tal que $x_0 + t\xi \in U$

$$\frac{\varphi(x_0 + t\xi) - \varphi(x_0)}{t} \begin{cases} \geq 0 & \text{se } t < 0 \\ \leq 0 & \text{se } t > 0 \end{cases}$$

$$D\varphi(x_0) \cdot \xi = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(x_0 + t\xi) - \varphi(x_0)}{t} \leq 0$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\varphi(x_0 + t\xi) - \varphi(x_0)}{t} \geq 0$$

$$\Rightarrow D\varphi(x_0) \cdot \xi = 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^n \Rightarrow D\varphi(x_0) = 0.$$

LEMMA 96.

$\Omega = \{T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n); T \text{ é isomorfismo}\}$

(A) Ω é um subconjunto aberto;

(B) A aplicação $\Phi : \Omega \rightarrow \Omega$ definida por $\Phi(x) = x^{-1}$ é contínua.

TEOREMA 97 (Função Inversa). *Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 no aberto U do $\mathbb{R}^n$. Suponhamos que $x_0 \in U$ a derivada $Df(x_0)$ é isomorfismo. Então,*

(A) *Existem vizinhanças V_0 de x_0 e W_0 de $f(x_0)$, com $V_0 \subset U$, tais que a restrição $f|_{V_0} : V_0 \rightarrow W_0$, tem inversa $g : W_0 \rightarrow V_0$;*

(B) *A inversa g é de classe C^1 e sua derivada Dg vem dada por*

$$Dg = [Df(x)]^{-1}, x \in V_0.$$

Demonstração: Seja $T = [Df(x_0)]^{-1}$ [T é um isomorfismo]

$$D(T \circ f)(x_0) = DT(f(x_0)) \circ Df(x_0) = T \circ Df(x_0) = [Df(x_0)]^{-1} \circ Df(x_0) = I$$

Pelo Lema 94, não há perda de generalidade em admitir que $Df(x_0) = I$ (do contrário consideramos $h = T \circ f$).

1ª Etapa: f é localmente injetiva

· Seja $\delta_1 > 0$ tal que $\overline{B_{\delta_1}(x_0)} \subset U$ e $f(x) \neq f(x_0), \forall x \in \overline{B_{\delta_1}(x_0)} \setminus \{x_0\}$.

· Seja $\delta_2 > 0$ tal que

(i) $\det[Df(x)] \neq 0, \forall x \in \overline{B_{\delta_2}(x_0)}$ (segue do fato que $\det[Df(x_0)] \neq 0$ e a continuidade da aplicação $x \rightarrow \det x, x \in \Omega$).

(ii) $\left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \right\| < \frac{1}{2n^2}, \forall i, j = 1, \dots, n, \forall x \in \overline{B_{\delta_2}(x_0)}$ (segue

da continuidade das derivadas parciais).

· Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ e seja $V = B_\delta(x_0)$

(a) $\det[Df(x_0)] \neq 0, \forall x \in \overline{V}$;

(b) $f(x) \neq f(x_0), \forall x \in \overline{V} \setminus \{x_0\} (\Rightarrow f(x) \neq f(x_0), \forall x \in \partial V)$.

(c) $\left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \right\| < \frac{1}{2n^2}, \forall i, j = 1, \dots, n, \forall x \in \overline{V}$.

Afirmção: $\|x - y\| \leq 2\|f(x) - f(y)\|, \forall x, y \in \overline{V}$.

Seja $\varphi(x) = f(x) - x, \forall x \in \overline{V} \subset U, J\varphi(x) = Jf(x) - I \Rightarrow$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) - \delta_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \text{ (pois } Df(x_0) = I)$$

$$\left\| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x) \right\| = \left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \right\| \leq \frac{1}{2n^2}, \forall i, j = 1, \dots, n, \forall x \in \overline{V}.$$

Aplicando o Lema 93 à função φ , obtemos

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq n^2 \frac{1}{2n^2} \|x - y\| = \frac{1}{2} \|x - y\| \Leftrightarrow$$

$$\|f(x) - x - f(y) + y\| \leq \frac{1}{2} \|x - y\| \Rightarrow$$

$$\|x - y\| - \|f(x) - f(y)\| \leq \frac{1}{2} \|x - y\|. \blacksquare$$

Conclusão: f é injetiva em $\overline{V}$.

2ª Etapa: Construção das Vizinhanças V_0 e W_0 .

$f(x_0) \notin f(\partial V)$ (por (b)) $d = \text{dist}(f(x_0), f(\partial V)) > 0$, porque $f(\partial V)$ é compacto e $f(x_0) \notin f(\partial V)$. Seja $\alpha = d/2$ e $W_0 = B_\alpha(f(x_0))$.

Sobrejetividade

Fixemos $y \in W_0$ e seja $\varphi : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \|y - f(x)\|^2$

• φ é contínua em $\bar{V}$;

• $\bar{V}$ é compacto;

• φ atinge um valor mínimo num ponto $x^* \in \bar{V}$.

Temos que

$$\|y - f(x_0)\|^2 \leq \|y - f(x)\|^2, \forall x \in \partial V \Rightarrow \varphi(x_0) \leq \varphi(x), \forall x \in \partial V$$

Como $\varphi(x^*) \leq \varphi(x_0)$, então $\varphi(x^*) < \varphi(x)$, $\forall x \in \partial V$ e portanto $x^* \notin \partial V$. Logo, $x^* \in V$ e pelo lema 95, segue que

$$D\varphi(x^*) \equiv 0$$

Temos que $\varphi(x) = \langle y - f(x), y - f(x) \rangle$, então

$$D\varphi(x) \cdot \xi = 2\langle y - f(x), Df(x) \cdot \xi \rangle \Rightarrow \langle y - f(x^*), Df(x^*) \cdot \xi \rangle = 0; \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

como $\det[Df(x^*)] \neq 0$, então $y - f(x^*) = 0$. Basta tomar $\xi = [Df(x^*)]^{-1}(y - f(x^*))$.

Tome $V_0 = V \cap f^{-1}(W_0) \Rightarrow f : V_0 \rightarrow W_0$ tem inversa $g : W_0 \rightarrow V_0$.

3ª Etapa: Sobre a inversa g

$$\|x - y\| \leq 2\|f(x) - f(y)\|, \forall x, y \in V_0 \Rightarrow$$

$$\|g(u) - g(v)\| \leq 2\|u - v\| \Rightarrow g \text{ é unif. contínua}$$

Afirmção: g é diferenciável em W_0 .

Seja $y \in W_0$, $y = f(x)$, $x \in V_0$ (x é único pela injetividade) temos

$$f(x_1) = f(x) + Df(x)(x_1 - x) + r(x_1 - x)$$

assim

$$[Df(x)]^{-1}(f(x_1) - f(x)) = x_1 - x + [Df(x)]^{-1}r(x_1 - x)$$

$$[Df(x)]^{-1}(y_1 - y) = g(y_1) - g(y) + [Df(x)]^{-1}r(x_1 - x)$$

ou seja,

$$g(y_1) - g(y) = [Df(x)]^{-1}(y_1 - y) + \rho(y_1 - y),$$

onde $\rho(y_1 - y) = -[Df(x)]^{-1}r(x_1 - x)$. Temos que

$$\begin{aligned} \frac{\|\rho(y_1 - y)\|}{\|y_1 - y\|} &= \frac{\|[Df(x)]^{-1}r(x_1 - x)\|}{\|y_1 - y\|} \leq C \frac{\|r(x_1 - x)\|}{\|y_1 - y\|} \\ &\leq C \frac{\|r(x_1 - x)\|}{\|f(x_1) - f(x)\|} \leq 2C \frac{\|r(x_1 - x)\|}{\|x_1 - x\|} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$x_1 \rightarrow x$ e usando a continuidade uniforme da g , $y_1 \rightarrow y$. Segue que g é diferenciável em $y = f(x)$ e $Dg(y) = [Df(x)]^{-1}$, também $Dg = \Phi \circ Df \circ g$; onde $\Phi(x) = x^{-1}$ do lema 96 $\Rightarrow Dg$ é contínua $\Rightarrow g$ é de classe C^1 . ■

Demonstração do lema 96:

$$\Omega = \{T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n); T \text{ é isomorfismo}\}$$

(i) Ω é aberto;

(ii) $\Phi : \Omega \rightarrow \Omega$; $\Phi(x) = x^{-1}$ é contínua.

Prova de (i): Seja $A \in \Omega$ e seja $\alpha = \frac{1}{\|A^{-1}\|} > 0$. Mostraremos que $B_\beta(A) \subset \Omega$, $\beta < \alpha$. De fato, dado $B \in B_\beta(A)$ temos que

$$\begin{aligned} \|x\| &= \|A^{-1}Ax\| \leq \|A^{-1}\| \|Ax\| = \frac{1}{\alpha} \|Ax - Bx + Bx\| \leq \\ &\leq \frac{1}{\alpha} [\|Ax - Bx\| + \|Bx\|] \leq \frac{1}{\alpha} [\|A - B\| \|x\| + \|Bx\|] \\ &\leq \frac{1}{\alpha} [\beta \|x\| + \|Bx\|] \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$((*) \quad \|Bx\| > (\alpha - \beta) \|x\|$$

A relação $(*) \Rightarrow$ na injetividade do operador B . Logo, $B \in \Omega$ e portanto $B_\beta(A) \subset \Omega$.

Para a continuidade de Φ em $X_0 \in \Omega$, notamos que

$$X^{-1} - X_0^{-1} = -X^{-1}(X - X_0)X_0^{-1} \Rightarrow$$

$$\|X^{-1} - X_0^{-1}\| \leq \|X^{-1}\| \|X - X_0\| \|X_0^{-1}\|$$

Tomando $X \in B_\beta(X_0)$, então

$$\|X(x)\| > (\alpha - \beta) \|x\| \Rightarrow \|X^{-1}\| \leq \frac{1}{\alpha - \beta}$$

Logo,

$$\|\Phi(X) - \Phi(X_0)\| < \frac{1}{\alpha(\alpha - \beta)} \|X - X_0\|$$

Φ é uniformemente contínua.

Comentários sobre o Teorema da Função Inversa

(A) A hipótese de ser f de classe C^1 é essencial, pois

$$f(x) = \begin{cases} ax + x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \quad 0 < a < 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} a + 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0 \end{cases}$$

A derivada $f'(x)$ não é contínua em $x = 0$. Pois

$$f'\left(\frac{1}{k\pi}\right) = a + \frac{2}{k\pi} \sin k\pi - \cos k\pi = \begin{cases} a + 1, & k \text{ ímpar} \\ a - 1, & k \text{ par.} \end{cases}$$

A sequência $x_k = \frac{1}{k\pi}$ converge para zero e a sequência $f'(x_k)$ diverge. f não é de classe C^1 . Temos que $f'(0) = a \neq 0$, $Df(0) \cdot \xi = a\xi$ é isomorfismo mas a função f não tem inversa em vizinhança alguma da origem. De fato, seja $\delta > 0$ e $k \in \mathbb{N}$, k par, tal que $\frac{1}{k\pi} \in (-\delta, \delta)$, $f'\left(\frac{1}{k\pi}\right) = a - 1 < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$, $x \in (-\delta, \delta) \cap I$, I intervalo contendo $\frac{1}{k\pi}$; $f'\left(\frac{1}{(k+1)\pi}\right) = a + 1 > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$, $x \in (-\delta, \delta) \cap J$, J intervalo contendo $\frac{1}{(k+1)\pi} \Rightarrow f$ não tem inversa em $(-\delta, \delta)$.

(B) A inversa f^{-1} pode existir em torno de x_0 , sem que $Df(x_0)$ seja isomorfismo. Neste caso, a inversa f^{-1} não é de classe C^1 (não tem derivada). $I = D(f \circ f^{-1})(x_0) = Df^{-1}(y_0) \cdot Df(x_0)$ (contraria a hipótese). Se fosse f^{-1} diferenciável, então $Df(x_0)$ seria um isomorfismo.

Exemplo: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = x^3$ é de classe C^1 , tem inversa $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$, $Df(0) \equiv 0$ (não é um isomorfismo).

(C) Seja $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y); (x, y) \in \mathbb{R}^2$. $\det[Jf(x, y)] = e^{2x} \neq 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow Df(x, y)$ é um isomorfismo em cada ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Pelo Teorema da Função Inversa, cada ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ possui uma vizinhança onde a função f tem inversa de classe C^1 . A função f não possui inversa global em $\mathbb{R}^2$, porque f não é injetiva ($f(x, y + 2k\pi) = f(x, y), \forall k \in \mathbb{N}$).

(2) Teorema da Função Implícita

Derivada Parcial

$\mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, $W \subset \mathbb{R}^{m+n}$ um aberto, seja $z_0 = (x_0, y_0) \in W$ e sejam

$$W_{x_0} = \{y \in \mathbb{R}^n; (x_0, y) \in W\}$$

$$W_{y_0} = \{x \in \mathbb{R}^m; (x, y_0) \in W\}.$$

Dada uma função $f : W \rightarrow \mathbb{R}^p$ diferenciável em z_0 , então a função $f_{x_0} : W_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}^p$ definida por

$$f_{x_0}(y) = f(x_0, y)$$

é diferenciável em y_0 e

$$Df_{x_0}(y) \cdot \eta = Df(x_0, y_0) \cdot (0, \eta)$$

Notação: $Df_{x_0}(y) = D_y f(x_0, y_0) = \partial_2 f(x_0, y_0)$.

De modo análogo, a derivada parcial de f com respeito à variável x no ponto $z_0 = (x_0, y_0)$ é a aplicação linear

$$D_x f(x_0, y_0) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$$

$$D_x f(x_0, y_0) \cdot \xi = D_x f(x_0, y_0) \cdot (\xi, 0)$$

Fato: $Df(x_0, y_0) \cdot (\xi, \eta) = D_x f(x_0, y_0) \cdot \xi + D_y f(x_0, y_0) \cdot \eta$.

TEOREMA 98 (Função Implícita). *Seja $f : W \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 no aberto W e seja $z_0 = (x_0, y_0)$ um ponto de W onde*

(i) $f(x_0, y_0) = c$. (ii)

$D_y f(x_0, y_0)$ é um isomorfismo de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$. Então, existe uma vizinhança V de x_0 e uma função de classe C^1 , $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ tais que:

(A)

$\varphi(x_0) = y_0$; (B) $(x, \varphi(x)) \in W, \forall x \in V$; (C) $f(x, \varphi(x)) = c, \forall x \in V$.

Demonstração: Seja $F : W \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$; $F(x, y) = (x, f(x, y))$

· F é de classe C^1 ;

· $DF(x_0, y_0) \cdot (\xi, \eta) = (\xi, D_x f(x_0, y_0) \cdot \xi + D_y f(x_0, y_0) \cdot \eta)$

$DF(z_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{m+n}, \mathbb{R}^{m+n})$.

Seja $(\xi, \eta) \in N(DF(z_0)) \Rightarrow DF(z_0) \cdot (\xi, \eta) = 0 \Leftrightarrow (\xi, D_x f(x_0, y_0) \cdot \xi + D_y f(x_0, y_0) \cdot \eta) = (0, 0) \Rightarrow \xi = 0$ e $D_x f(x_0, y_0) \cdot \xi + D_y f(x_0, y_0) \cdot \eta = 0 \Rightarrow D_y f(x_0, y_0) \cdot \eta = 0 \Rightarrow \eta = 0$, pois $D_y f(x_0, y_0)$ é um isomorfismo. Logo $N(DF(z_0)) = \{0\}$. Segue que $DF(z_0)$ é isomorfismo. Pelo Teorema da Função Inversa, existem vizinhanças U de (x_0, y_0) e $V \times Z$ de (x_0, c) e uma função de classe C^1 , $G : V \times Z \rightarrow U$ que é a inversa de F , ou seja, $G(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) \Rightarrow (x, y) = F(u(x, y), v(x, y)) = (u(x, y), f(u, v)) \Rightarrow x = u(x, y)$. Logo, $G(x, y) = (x, v(x, y))$. Seja $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\varphi(x) = v(x, c) \in \mathbb{R}^n$

(i) φ é de classe C^1 ;

(A) $(x_0, y_0) = GF(x_0, y_0) = G(x_0, f(x_0, y_0)) = G(x_0, c) = (x_0, v(x_0, c)) = (x_0, \varphi(x_0)) \Rightarrow \varphi(x_0) = y_0$.

(B) $(x, \varphi(x)) \in W, \forall x \in V$. De fato, $(x, \varphi(x)) = (x, v(x, c)) = G(x, c) \in U \subset W$.

(C) $f(x, \varphi(x)) = c, \forall x \in V$. Temos que $(x, f(x, \varphi(x))) = F(x, \varphi(x)) = F(x, v(x, y)) = FG(x, c) = (x, c) \Rightarrow f(x, \varphi(x)) = c$.

REMARK 99. (A) Como derivar a função $y = \varphi(x)$ obtida no Teorema anterior?

$$f(x, \varphi(x)) = c \Rightarrow$$

$$D_x f(x, \varphi(x)) \cdot \xi + D_y f(x, \varphi(x)) \cdot D\varphi(x) \cdot \xi = 0$$

$$D_y f(x, \varphi(x)) \cdot D\varphi(x) \cdot \xi = -D_x f(x, \varphi(x)) \cdot \xi$$

$$D_y f(x, \varphi(x)) \cdot D\varphi(x) = -D_x f(x, \varphi(x))$$

Como $D_y f(x, \varphi(x))$ é um isomorfismo numa vizinhança de x_0 ($\det JD_y f \neq 0$)

$$D\varphi(x) = -[D_y f(x, \varphi(x))]^{-1} D_x f(x, \varphi(x)).$$

(B) Demonstrar o Teorema da Função Inversa usando o Teorema da Função Implícita.

$$\text{Hipóteses } \begin{cases} f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ de classe } C^1 \\ Df(x_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ é um isomorfismo.} \end{cases}$$

$$F : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, F(x, y) = f(x) - y$$

Temos que F é de classe C^1 , $D_x F(x_0, y_0) = Df(x_0)$ é isomorfismo, e $F(x_0, y_0) = f(x_0) - y_0 = 0$. Pelo Teorema da função implícita existe uma vizinhança W de y_0 e uma função de classe C^1 , $g : W \rightarrow g(W)$ tal que

$$(i) \ g(y_0) = x_0$$

$$(ii) \ F(g(y), y) = 0, \forall y \in W \Rightarrow f(g(y)) - y = 0 \Rightarrow f(g(y)) = y.$$

(3) Forma local das Submersões

Uma função $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciável no aberto U é denominada *submersão* quando a derivada $Df(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ for sobrejetiva para qualquer $x \in U$. Neste caso, $m \geq n$.

Exemplos mais simples são as projeções:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1 : \mathbb{R}^{m+n} & \rightarrow & \mathbb{R}^n \\ (x, y) & \mapsto & x \end{array} \quad , \quad \begin{array}{ccc} \pi_2 : \mathbb{R}^{m+n} & \rightarrow & \mathbb{R}^n \\ (x, y) & \mapsto & y \end{array}$$

$D\pi_2(x, y) = \pi_2$ que é sobrejetiva.

Como se comportam as submersões $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Resposta: Se comportam localmente como a projeção π_2 .

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 , $z_0 = (x_0, y_0)$ é um ponto de U onde $Df(z_0)$ é sobrejetiva.

(Gráficos)

Seja $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$; $\Phi(x, y) = (x, f(x, y))$ então

$$D\Phi(z_0)(\xi, \eta) = (\xi, D_x f(z_0) \cdot \xi + D_y f(z_0) \cdot \eta)$$

$D_y f(z_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo [$\mathbb{R}^n = \{0\} \times \mathbb{R}^n$]?

$(Df(z_0) : \mathbb{R}^{p+n} \rightarrow \mathbb{R}^n, m = p+n, \text{ é sobre, tome } \{\eta_1, \dots, \eta_n\}$
 uma base do $\mathbb{R}^n \Rightarrow \{Df(z_0)(0, \eta_i), i = 1, \dots, n\}$ é uma base
 do $\mathbb{R}^n \Rightarrow D_y f(z_0)$ é isomorfismo.)

$D\Phi(z_0)$ é um isomorfismo. Pelo Teorema da Função Inversa a função Φ tem uma inversa $h : V \times W \rightarrow Z$ de classe C^1 (h é um difeomorfismo de classe C^1). Fazendo $h(x, y) = (x, h_2(x, y))$, temos

$$(x, y) = \Phi h(x, y) = \Phi(x, h_2(x, y)) = (x, f(x, h_2(x, y))) = (x, fh(x, y)) \Rightarrow$$

$$fh(x, y) = y$$

(4) Forma Local das Imersões

Uma função $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ diferenciável no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ é denominada *imersão* quando a derivada $Df(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ for injetiva para qualquer $x \in U$. O exemplo fundamental é a inclusão:

$$\begin{aligned} i : \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R}^{m+n} \\ x &\mapsto (x, 0) \end{aligned}$$

Localmente as imersões de classe C^1 se comportam como a inclusão i . Isto significa que existe um difeomorfismo local de classe C^1 , h , tal que

$$hf = i.$$

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ de classe C^1 , $x_0 \in U$, $Df(x_0)$ injetiva.

(Gráfico)

$$E = Df(x_0) \cdot \mathbb{R}^m, F = E^\perp (\mathbb{R}^{m+n} = E \oplus F)$$

$$Df(x_0) : \mathbb{R}^m \rightarrow E \text{ isomorfismo.}$$

$$\text{Seja } \Phi : U \times F \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}; \Phi(x, y) = f(x) + y$$

$$\Phi(x_0, 0) = f(x_0)$$

$$D\Phi(x_0, 0) \cdot (\xi, \eta) = Df(x_0) \cdot \xi \oplus \eta$$

$$\Phi(x_0 + \xi, \eta) = f(x_0 + \xi) + \eta$$

$$= f(x_0) + Df(x_0) \cdot \xi + \eta + r(\xi)$$

$$D\Phi(x_0, 0) \cdot (\xi, \eta) = 0 \Rightarrow \eta = 0, Df(x_0) \cdot \xi = 0 \Rightarrow \xi = 0$$

pois $Df(x_0)$ é injetiva $\Rightarrow D\Phi(x_0, 0)$ é um isomorfismo. Seja $h : Z \rightarrow V \times W$ o difeomorfismo inverso de Φ . Mostremos que $hf = i$.

$$(x, 0) = h\Phi(x, 0) = hf(x), \forall x \in V.$$

(5) **Teorema do Posto:**

O *posto* de uma aplicação diferenciável $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ no ponto $x \in U$ é, por definição, o posto da derivada $Df(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$.

· Se $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe C^1 e o posto de f em $x_0 \in U$ é igual a $r \leq n$, então existe $\delta > 0$ tal que f tem posto $\geq r$ em todo ponto da bola $B_\delta(x_0)$.

.. Se $U \subset \mathbb{R}^m$ é um aberto *verticalmente convexo* e $D_y f \equiv 0$ em U então f não depende da segunda coordenada.

U é verticalmente convexo quando: $(x, y), (x, y') \in U \Rightarrow (x, ty + (1-t)y') \in U, t \in [0, 1]$.

$(x, y), (x, y') \in U, \Phi(t) = f(x, ty + (1-t)y') \Rightarrow \Phi'(t) = D_y f(x, ty + (1-t)y') \cdot (y - y') = 0 \Rightarrow \Phi = cte \Rightarrow \Phi(0) = \Phi(1) \Rightarrow f(x, y) = f(x, y')$.

Teorema do Posto

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^{m+p}$ uma função de classe C^1 no aberto U . Suponhamos que f tem posto m em cada ponto $x \in U$. Então, dado $z_0 = (x_0, y_0) \in U$ existem vizinhanças $Z \subset U$, $V \times W \subset \mathbb{R}^{m+n}$, $V \times W^* \subset \mathbb{R}^{m+p}$, com $z_0 \in Z \cap \{V \times W\}$, $(x, 0) \in V \times W^*$ e existem difeomorfismos $\alpha : V \times W \rightarrow Z$ e $\beta : Z' \rightarrow V \times W^*$ de classe C^1 tais que $\beta f \alpha = i\pi_1$. (Gráficos)

O Teorema da Função Implícita no Cálculo III

1^0 Caso: $F(x, y) = 0$; $\frac{\partial F}{\partial y}(z_0) \neq 0$. $F : \mathbb{R}^{1+1} \rightarrow \mathbb{R}$, $D_y F(z_0)$ é um isomorfismo. Existe uma vizinhança $V \times W$ de $z_0 = (x_0, y_0)$ e uma função de classe C^1 , $\varphi : V \rightarrow Z$ tal que :

$$(i) (x, \varphi(x)) \in U = \mathbb{R}^2, \forall x \in V.$$

$$(ii) F(x, \varphi(x)) = 0, \forall x \in V.$$

Além disso, $D\varphi(x) = -[D_y F(z)]^{-1} D_x F(z)$. Numa vizinhança V de x_0 a variável y é definida implicitamente como função de x e $y' = -F_x/F_y$.

$$2^0 \text{ Caso: } f(x, y, u, v) = 0, \quad g(x, y, u, v); \quad \frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)} = \det \begin{bmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{bmatrix} \neq$$

0, no ponto $P_0 = (x_0, y_0, u_0, v_0) \Rightarrow u$ e v são funções de x e y .

Seja $F : \mathbb{R}^{2+2} \rightarrow \mathbb{R}^2$; $F(x, y, u, v) = (f(x, y, u, v), g(x, y, u, v))$ ou $F(X, Y)$ onde $X = (x, y)$ e $Y = (u, v)$. $\Rightarrow D_Y F(P) =$

$$(D_Y f, D_Y g) = \begin{bmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{bmatrix}$$

$\det(D_Y F(P)) \neq 0 \Leftrightarrow D_Y F(P)$ é um isomorfismo $\Rightarrow Y = \varphi(X)$ em $V \ni (x_0, y_0) \Leftrightarrow (u, v) = (\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y))$.

Cálculo das derivadas: u_x, v_x, u_y, v_y

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

daí

$$f_u u_x + f_v v_x = -f_x$$

$$g_u u_x + g_v v_x = -g_x.$$

10. Integração

1. Funções integráveis

Seja $A = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ um retângulo fechado do $\mathbb{R}^n$ e seja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ limitada. O volume do retângulo A é, por definição, o número real

$$\text{vol } A = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j).$$

Ele é também o volume do retângulo aberto

$$A^\circ = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n).$$

Uma partição P do retângulo A é uma coleção $P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ onde cada P_j é uma partição do intervalo $[a_j, b_j]$. O número de sub-retângulos da partição P é $N_1, N_2, \dots, N_n$ onde N_j é o número de subintervalos da partição P_j , $j = 1, \dots, n$.

A soma superior de f relativa à partição P , é por definição,

$$(3) \quad U(f, P) = \sum_{S \in P} M_S(f) \text{vol}(S),$$

onde em (3) a soma é tomada sobre todos os subretângulos S de P e

$$M_S(f) = \sup_{x \in S} f(x).$$

A soma inferior de f relativa a P é

$$(4) \quad L(f, P) = \sum_{S \notin P} m_S(f) \text{vol}(S)$$

onde $m_S(f) = \inf_{x \in S} f(x)$.

É claro que

$$(5) \quad L(f, P) \leq U(f, P), \quad \forall P.$$

PROPOSITION 100. Se P e Q são partições de A , então

$$(6) \quad L(f, P) \leq U(f, Q)$$

$$(7) \quad \sup_P L(f, P) \leq \inf_P U(f, P).$$

Demonstração: Seja R um refinamento comum às partições P e Q . Todo retângulo S de P é subdividido em retângulos $S_1, \dots, S_k$ de R e portanto,

$$m_S(f) \leq m_{S_j}(f), \quad \forall j,$$

e $\text{vol}(S) = \text{vol}(S_1) + \dots + \text{vol}(S_k)$. Então

$$L(f, P) = \sum_{S \notin P} m_S(f) \text{vol}(S) \leq \sum_{S \in P} \sum_{j=1}^k m_{S_j}(f) \text{vol}(S_j)$$

o que implica

$$L(f, P) \leq L(f, R).$$

Analogamente,

$$U(f, Q) \geq U(f, R)$$

logo

$$L(f, P) \leq L(f, R) \leq U(f, R) \leq U(f, Q).$$

Para provar (7), fixemos Q e tomemos o sup em (6);

$$\sup_P L(f, P) \leq U(f, Q)$$

daí segue (7).

DEFINIO 101. *Uma função limitada $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável em A quando*

$$(8) \quad \sup_P L(f, P) = \inf_P U(f, P).$$

Este número é a integral de f em A é representado por $\int_A f$.

EXAMPLE 102. $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

então $\int_A f = \frac{1}{2}$.

Seja P uma partição de A . Considerando um refinamento de P , se necessário, podemos supor que qualquer retângulo S de P está à esquerda ou à direita de $x = \frac{1}{2}$. $P = P' \cup P''$

$$\begin{aligned} L(f, P) &= \sum_{S \in P'} m_S(f) \text{vol}(S) + \sum_{S \in P''} m_S(f) \text{vol}(S) \\ &= \sum_{S \in P''} \text{vol}(S) = \frac{1}{2} = U(f, P) \end{aligned}$$

f é integrável e $\int_A f = 1/2$.

EXAMPLE 103. $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$m_S(f) = 0, \quad M_S(f) = 1 \Rightarrow L(f, P) = 0, \quad U(f, P) = 1$$

logo f não é integrável em $[0, 1] \times [0, 1]$.

TEOREMA 104. *(Critério de integrabilidade) $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável se, e somente se, dado $\varepsilon > 0$ existe uma partição P_ε de A tal que*

$$(9) \quad U(f, P_\varepsilon) - L(f, P_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Demonstr.: Suponhamos f integrável em A e seja $\varepsilon > 0$ dado. Por (8), existe P'_ε partição de A tal que

$$\sup_P L(f, P) + \varepsilon > U(f, P'_\varepsilon)$$

Por definição de supremo, existe P''_ε partição de A tal que

$$L(f, P''_\varepsilon) > U(f, P'_\varepsilon) - \varepsilon.$$

Seja P_ε um refinamento comum de P'_ε e P''_ε . Temos

$$U(f, P_\varepsilon) - L(f, P_\varepsilon) \leq U(f, P'_\varepsilon) - L(f, P''_\varepsilon) < \varepsilon$$

Reciprocamente, suponhamos (9) válida. Da relação (7)

$$\sup_P L(f, P) \leq U(f, Q) \quad \forall Q.$$

Por (9), existe P_ε , $U(f, P_\varepsilon) < \varepsilon + L(f, P_\varepsilon) \leq \varepsilon + \sup_P L(f, P)$. O que implica

$$\sup L(f, P) = \inf U(f, P).$$

Isso demonstra o teorema.

DEFINIO 105. *um subconjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tem medida nula quando cumprir a seguinte condição: dado $\varepsilon > 0$, existe uma cobertura $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de Ω por retângulos fechados tal que*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \text{vol } (A_k) < \varepsilon.$$

EXAMPLE 106. *Seja $\Omega = \{a_1, a_2, \dots\} \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto e enumerável. Dado $\varepsilon > 0$, seja A_k um retângulo do $\mathbb{R}^n$ contendo a_k e tal que $\text{vol}(A_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$. Ou seja, considere $a_k = (a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{nk}) \in \mathbb{R}^n$, temos*

$$I_{j_k} = [a_{j_k} - \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon}{2^k}\right)^n, a_{j_k} + \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon}{2^k}\right)^n]$$

$$A_k = I_{1k} + \dots + I_{nk}$$

temos

$$\sum_{k=1}^{\infty} \text{vol } (A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon \left(\frac{1}{2}\right)^k < \varepsilon.$$

EXAMPLE 107. $\Omega = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ tem medida nula como subconjunto do $\mathbb{R}^2$.

De fato,

$$A_k = [-k, k] \times \left[-\frac{\varepsilon}{4k2^k}, \frac{\varepsilon}{4k2^k} \right]$$

$$\text{vol} (A_k) = 2k \frac{\varepsilon}{2k2^k} = \frac{\varepsilon}{2^k}$$

logo

$$\sum \text{vol} (A_k) < \varepsilon.$$

EXAMPLE 108. Se $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_k, \dots$ é uma coleção enumerável de subconjuntos de medida nula, então $\Omega = \cup_{j=1}^{\infty} \Omega_k$ tem medida nula. De fato,

$$\Omega_k \subset \cup_{j=1}^{\infty} A_{jk}, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \text{vol} (A_{jk}) < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

A coleção $\{A_{j,k}; j, k \in \mathbb{N}\}$ cobre Ω e

$$\sum_{j=1}^{\infty} \text{vol} (A_{jk}) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} < \varepsilon.$$

EXAMPLE 109. Se Ω tem medida nula e $\Omega' \subset \Omega$, então Ω' tem medida nula.

DEFINIO 110. Um subconjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tem conteúdo nulo (escreveremos $c(\Omega) = 0$) quando para cada $\epsilon > 0$ existe uma cobertura $A_1, A_2, \dots, A_k$ de Ω por retângulos fechados satisfazendo

$$\sum_{j=1}^k \text{vol} (A_j) < \epsilon.$$

EXAMPLE 111. (1) $c(\Omega) = 0 \Rightarrow m(\Omega) = 0$.

(2) Seja $x_n \rightarrow x$ em $\mathbb{R}$. Então $\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ tem conteúdo zero. De fato, dado $\epsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_\nu \in B_\epsilon(x)$, $\forall \nu \geq n_0$. Para cada $j = 1, 2, \dots, n_0$, seja A_j um retângulo fechado de $\text{vol} < \epsilon$ e $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \dots, x_{n_0} \in A_{n_0}$. Então $\Omega \subset A_1 \cup \dots \cup A_{n_0} \cup B_\epsilon(x)$ e

$$\text{vol}(A_1) + \dots + \text{vol}(A_{n_0}) + \text{vol}(B_\epsilon(x)) \leq (n_0 + 1)\epsilon.$$

(3) $\Omega = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ (enumerável) $m(\Omega) = 0$. Se $A_1, A_2, \dots, A_k$ são retângulos fechados tais que $\Omega \subset A_1 \cup \dots \cup A_k$, então por densidade

$$[0, 1] \subset A_1 \cup \dots \cup A_k$$

e daí segue que

$$\sum_{j=1}^k \text{vol}(A_j) = \sum_{j=1}^k (b_j - a_j) \geq 1$$

portanto, $c(\Omega) \neq 0$.

LEMMA 112. Se $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto e $m(K) = 0$, então $c(K) = 0$.

Prova: Seja $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ uma cobertura de K por retângulos abertos com $\sum \text{vol}(A_j) < \epsilon$. Esta cobertura admite subcobertura finita, isto é,

$$K \subset A_{j_1} \cup \dots \cup A_{j_k}$$

e é claro que

$$\sum_{l=1}^k \text{vol}(A_{j_l}) < \epsilon.$$

2. Oscilação e Integrabilidade

Seja $A = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ limitada. Dado $\epsilon > 0$, sejam

$$M_\delta(f, a) = \sup \{f(x) : x \in A \cap B_\delta(a)\}$$

$$m_\delta(f, a) = \inf \{f(x) : x \in A \cap B_\delta(a)\}$$

A oscilação de f em a é, por definição,

$$o(f, a) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} [M_\delta(f, a) - m_\delta(f, a)]$$

- f é contínua em $x = a \iff o(f, a) = 0$.
- Se $F \subset \mathbb{R}^n$ é fechado e $\epsilon > 0$ é dado, então $F_\epsilon = \{x \in F; o(f, x) \geq \epsilon\}$ é fechado.
- $D(f) = \{x \in A; f \text{ é descontínua em } x\}$, então $D(f) = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_{1/k}$, onde $F_{1/k} = \{x \in A; o(f, x) \geq 1/k\}$.

LEMMA 113. Se $o(f, x) < \alpha, \forall x \in A$, então existe uma partição P_α de A tal que

$$U(f, P_\alpha) - L(f, P_\alpha) < \alpha \text{ vol } (A).$$

Dem.: Para cada $x \in A$, existe $U(x)$ vizinhança de x tal que

$$M(f, x) - m(f, x) < \alpha$$

Seja $\{U(x_1), \dots, U(x_k)\}$ uma subcobertura finita de A e considere P_α uma partição de A cujos retângulos estão contidos em algum $U(x_j)$.

$$\sum_{S \in P_\alpha} \{M_S(f) - m_S(f)\} \text{ vol } (S) \leq \sum_{S \in P_\alpha} \alpha \text{ vol } (S) = \alpha \text{ vol } (A).$$

TEOREMA 114. f é integrável se, e somente se, $m(D(f)) = 0$.

Dem.: Suponha que f é integrável. Vamos provar que $c(F_{1/k}) = 0, \forall k = 1, 2, \dots$. Dado $\epsilon > 0$ existe P_ϵ partição de A tal que

$$U(f, P_\epsilon) - L(f, P_\epsilon) < \epsilon/k.$$

Seja $\mathcal{S}$ a coleção de subretângulos S de P_ϵ tais que $S \cap F_{1/k} \neq \emptyset$. $\mathcal{S}$ é uma cobertura finita de $F_{1/k}$.

$$M_S(f) - m_S(f) \geq M_{S \cap F_{1/k}} - m_{S \cap F_{1/k}} \geq 1/k$$

isto implica que

$$\begin{aligned} \sum_{S \in \mathcal{S}} \frac{1}{k} \text{ vol } (S) &\leq \sum_{S \in \mathcal{S}} (M_S(f) - m_S(f)) \text{ vol } (S) \\ &\leq U(f, P_\epsilon) - L(f, P_\epsilon) < \frac{\epsilon}{k} \end{aligned}$$

logo

$$\sum_{S \in \mathcal{S}} \text{vol } (S) < \epsilon.$$

Reciprocamente, suponhamos que $m(D(f)) = 0$. $D(f) = \cup_{k=1}^{\infty} F_{1/k}$.

Logo, $m(F_{1/k}) = 0 \Rightarrow c(F_{1/k}) = 0$.

Seja $U_1, \dots, U_k$ retângulos fechados tais que

$$F_{1/k} \subset \cup_{j=1}^k \text{int}(U_j), \quad \sum_{j=1}^k \text{vol } (U_j) < \epsilon$$

seja P uma partição de A cujos subretângulos S estão em uma das classes

$$\mathcal{S}_1 = \{S; S \subset U_j, \text{ para algum } j\}$$

$$\mathcal{S}_2 = \{S; S \cap F_{1/k} = \emptyset\}$$

seja $M = \sup_A |f(x)|$ (f é limitada, logo tem supremo)

$$\begin{aligned} \sum_{S \in P} (M_S(f) - m_S(f)) \text{vol } (S) &= \sum_{S \in \mathcal{S}_1} (M_S(f) - m_S(f)) \text{vol } (S) + \sum_{S \in \mathcal{S}_2} (M_S(f) - m_S(f)) \text{vol } (S) \\ &\leq 2M\epsilon + \sum_{S \in \mathcal{S}_2} (M_S(f) - m_S(f)) \text{vol } (S) \end{aligned}$$

Para $S \in \mathcal{S}_2$ temos: $o(f, x) < \frac{1}{k}$, $\forall x \in S \in \mathcal{S}_2$. Pelo lema existe uma partição P' de S tal que

$$U(f, P') - L(f, P') < 1/k \text{ vol } (S)$$

ou seja, temos

$$\sum_{S \in \mathcal{S}_2} [M_S(f) - m_S(f)] \text{vol } (S) < \frac{1}{k} \text{vol } (A) < \epsilon \text{vol } (A)$$

onde k é tal que $\frac{1}{k} < \epsilon$. Logo

$$U(f, Q) - L(f, Q) < [2M + \text{vol } (A)]\epsilon,$$

onde $Q = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$.