



UFPB - CCEN - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
ÁLGEBRA LINEAR E GEOMETRIA ANALÍTICA
3ª LISTA DE EXERCÍCIOS – PERÍODO 2006.2

Nos exercícios **01** $\rightarrow$ **18**, determine o polinômio característico do operador linear, encontre seus autovalores e autovetores e dê uma base e a dimensão dos autoespaços correspondentes.

01. $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (2y, x)$.
02. $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x + y, 2x + y)$.
03. $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (-y, x)$.
04. $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (2x + y, -y)$.
05. $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x + y + z, 2y + z, 3z)$.
06. $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (2x + 2y, x + y + 2z, x + y + 2z)$.
07. $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x + y, x - y + 2z, 2x + y - z)$.
08. $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x + 3y - 3z, 4y, -3x + 3y + z)$.
09. $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $T(x, y, z, w) = (x, x + y, x + y + z, x + y + z + w)$.
10. $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $T(x, y, z, w) = (2x + y, 2y, 2z, 3w)$.
11. $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $T(x, y, z, w) = (3x - 4z, 3y + 5z, -z, -w)$.
12. $T: M_{2 \times 2} \rightarrow M_{2 \times 2}$, $T(A) = A^t$, onde A^t representa a transposta da matriz A .
13. $T: M_{2 \times 2}(TS) \rightarrow M_{2 \times 2}(TS)$, $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3a & 3b \\ 0 & -a + 3b + c \end{bmatrix}$, sendo $M_{2 \times 2}(TS)$ o espaço vetorial das matrizes triangulares superiores de ordem 2.
14. $T: P_1(x) \rightarrow P_1(x)$, $T(ax + b) = 2ax - b$.
15. $T: P_2(x) \rightarrow P_2(x)$, $T(p(x)) = p'(x)$.
16. $T: P_2(x) \rightarrow P_2(x)$, $T(ax^2 + bx + c) = ax^2 + cx + b$.
17. $T: P_3(x) \rightarrow P_3(x)$, $T(p(x)) = p(x + 1)$.
18. $T: P_3(x) \rightarrow P_3(x)$, $T(p(x)) = (1 - x^2)p''(x) - 2xp'(x)$.
19. Encontre o polinômio minimal de cada um dos operadores lineares acima e identifique os que são diagonalizáveis, justificando essa identificação de duas maneiras distintas. Quando o operador for diagonalizável, determine uma base do espaço em relação a qual a matriz do operador é diagonal e escreva essa matriz.
20. Seja T o operador linear sobre o $\mathbb{R}^2$ definido por $T(x, y) = (x, x + y)$. Considerando-se as bases $\alpha = \{(1, 0), (0, 1)\}$ e $\beta = \{(-1, 0), (1, 2)\}$, calcule o polinômio característico de T utilizando a matriz $A = [T]_{\alpha}^{\alpha}$ e, posteriormente, a matriz $B = [T]_{\beta}^{\beta}$.
21. Seja f o operador linear sobre o $\mathbb{R}^2$, dado por $f(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$. Se θ é um múltiplo inteiro de π , verifique que os autovalores de f são $\lambda = -1$ e $\lambda = 1$.
22. Qual é o operador linear sobre o $\mathbb{R}^2$ que possui $\lambda = -2$ e $\lambda = 3$ como autovalores associados, respectivamente, aos autovetores $(3, 1)$ e $(-2, 1)$?
23. Se T é um operador linear que possui $\lambda = 0$ como autovalor, prove que T não é injetor.
24. Sejam f um operador linear e λ um autovalor de f associado ao autovetor v . Se f é um isomorfismo, prove que $\frac{1}{\lambda}$ é autovalor de f^{-1} , associado ao mesmo autovetor v .

25. Se T é um operador linear sobre o $\mathbb{R}^2$ cuja matriz em relação à base canônica é simétrica, prove que T é diagonalizável.
26. Se $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é o operador linear definido por $T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$, onde a, b, c e d são números reais positivos, prove que:
- os autovalores de T são dados por $\frac{1}{2} \{ (a + d) \pm [(a - d)^2 + 4bc]^{1/2} \}$.
 - os autovalores de T são reais, distintos e pelo menos um deles é positivo.
27. Para quais valores de a , os operadores $T(x, y) = (x + y, ay)$ e $T(x, y) = (x + ay, y)$ são diagonalizáveis?
28. Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 5 \\ -4 & -2 & -3 \end{bmatrix},$$

encontre uma matriz invertível P , tal que $P^{-1}AP$ seja uma matriz diagonal

29. Verifique que $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ é semelhante a uma matriz diagonal e, então, calcule A^{10} .
30. Sejam T um operador linear sobre um espaço vetorial V de dimensão n , A a matriz de T em relação a qualquer base de V e $p(\lambda) = (\lambda - a)^n$ seu polinômio característico. Sabendo-se que T é diagonalizável, mostre que $A = aI$, onde I é a matriz identidade de ordem $n \times n$.
31. Se A e B são matrizes quadradas de ordem 2 que possuem polinômios característicos iguais, prove que A e B também possuem determinantes iguais.
32. Se $p(\lambda) = \lambda^3(\lambda - 1)^2(\lambda + 4)$ é o polinômio característico de um determinado operador linear, quais polinômios podem ser seu minimal?
33. Suponha que o operador linear a que se refere a questão anterior seja diagonalizável. Qual seria o polinômio minimal desse operador? Quais matrizes diagonais poderiam representá-lo?
34. Sendo $u = (a, b)$ e $v = (c, d)$, mostre que $f(u, v) = 2ac + ad + bc + bd$ é um produto interno em $\mathbb{R}^2$.
35. A partir de $\alpha = \{(1, 2), (2, 1)\}$, determine uma base ortonormal para o $\mathbb{R}^2$.
36. A mesma questão anterior, considerando em $\mathbb{R}^3$ a base $\beta = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 2, 0)\}$.
37. Utilizando o produto interno definido no Exercício 34, determine uma base ortonormal para o $\mathbb{R}^2$ a partir de $\alpha = \{(-1, 1), (1, 1)\}$.
38. Considerando o produto interno usual, determine uma base ortonormal para o subespaço W de $\mathbb{R}^3$, definido por $W = \{(x, y, z) / x - y + z = 0\}$.
39. Sejam T o operador linear sobre o $\mathbb{R}^3$ definido por $T(x, y, z) = (z, x - y, -z)$ e W o seu núcleo. Encontre uma base ortonormal para $W^\perp$, em relação ao produto interno
- usual.
 - definido por $\langle (x, y, z), (x', y', z') \rangle = 2xx' + yy' + 4zz'$.
40. Se $W = [(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, -1)]$, tome o produto interno canônico para determinar $W^\perp$ e um operador linear T sobre o $\mathbb{R}^3$, tal que $\text{Im}(T) = W$ e $N(T) = W^\perp$.

41. Se $p(x), q(x) \in P_2(x)$, considere $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x).q(x)dx$.
- a) Verifique que a operação definida acima é um produto interno.
- b) Se $W = [1, 1-x]$, determine uma base ortonormal para W utilizando esse produto interno.
42. Considere o conjunto $S = \{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (2, 1, 1)\}$.
- a) Determine $S^\perp$.
- b) Se tivéssemos $S = [(1, 0, 1), (1, 1, 0), (2, 1, 1)]$, o que seria $S^\perp$? Considerando-se esta última hipótese, determine uma base ortogonal para S e para $S^\perp$.
43. Se $A = (a_{ij})$ é uma matriz quadrada, definimos o traço de A como sendo a soma dos seus elementos diagonais, ou seja, $tr(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$.
- Assim, sendo $V = M_{2 \times 2}$, considere $\langle A, B \rangle = tr(B^t.A)$, onde B^t representa a transposta da matriz B . Verifique que essa operação é um produto interno e, segundo o mesmo, encontre uma base ortonormal para V a partir da base

$$\alpha = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

44. Se u e v são vetores, verifique que $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$.
45. Sejam x, y, z e t escalares. Se u e v são vetores ortogonais e unitários, verifique que
- $$xu + yv \perp zu + tv \Leftrightarrow xz + yt = 0.$$
46. Se u e v são vetores ortogonais e unitários, mostre que $\|u-v\| = \sqrt{2}$.
47. Sejam $u = (a, b)$ e $v = (c, d)$ vetores em $\mathbb{R}^2$ e A a matriz cujas colunas são esses vetores. Mostre que a matriz $A^t.A$ é diagonal $\Leftrightarrow u$ e v são vetores ortogonais em relação ao produto interno usual.
48. Se u e v são vetores, verifique que a função $f(x) = \|u + xv\|^2$ possui um ponto de mínimo.
49. Seja u um vetor unitário e considere a função f , definida no conjunto de todos os vetores de norma 1, dada por $f(v) = \|u - v\|$.
- a) Verifique que o valor máximo de f é 2 e que o valor mínimo de f é 0.
- b) Prove que $f(v) = \sqrt{2} \Leftrightarrow u \perp v$.
50. Prove que $|\langle u, v \rangle| = \|u\|.\|v\| \Leftrightarrow u$ e v são vetores linearmente dependentes.

(Sugestão:

$(\Rightarrow)$ Se u ou v é o vetor nulo, nada há para mostrar. Se ambos são não nulos, então

$$|\langle u, v \rangle| = \|u\|.\|v\| \Rightarrow \langle u, v \rangle = \|u\|.\|v\| \text{ ou } \langle u, v \rangle = -\|u\|.\|v\|.$$

Se a primeira hipótese for a verdadeira, temos

$$\left\langle \frac{u}{\|u\|} - \frac{v}{\|v\|}, \frac{u}{\|u\|} - \frac{v}{\|v\|} \right\rangle = 0.$$

Se verdadeira for a segunda, então

$$\left\langle \frac{u}{\|u\|} + \frac{v}{\|v\|}, \frac{u}{\|u\|} + \frac{v}{\|v\|} \right\rangle = 0.$$

Ambas levam à conclusão de que os vetores u e v são linearmente dependentes.

($\Leftarrow$) Se u e v são linearmente dependentes, então podemos escrever $u = \lambda v$, λ um escalar).

- 51.** Se u e v são vetores unitários tais que $\langle u, v \rangle = 1$, prove que $u = v$.

(Sugestão: Use o resultado do exercício anterior).

- 52.** Prove que $\|u + v\| = \|u\| + \|v\| \Leftrightarrow u$ e v são vetores linearmente dependentes.

(Sugestão:

Note que $\|u + v\| = \|u\| + \|v\|$ é equivalente a

$$\langle u + v, u + v \rangle = \langle u, u \rangle + 2\|u\|\|v\| + \langle v, v \rangle.$$

Como, de fato,

$$\langle u + v, u + v \rangle = \langle u, u \rangle + 2\langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle,$$

a igualdade anterior equivale a $\langle u, v \rangle = \|u\|\|v\|$.

Assim, podemos concluir o resultado desejado usando o Exercício 50).

- 53.** Se T é um operador linear sobre o $\mathbb{R}^2$ que satisfaz $\langle T(u), u \rangle = 0, \forall u \in \mathbb{R}^2$, prove que $\langle T(u), v \rangle = -\langle T(v), u \rangle, \forall u, v \in \mathbb{R}^2$.

(Sugestão: Por hipótese, podemos afirmar que $\langle T(u + v), u + v \rangle = 0$).

- 54.** Sejam $A = (a_{ij})$ uma matriz quadrada de ordem 2 e T o operador linear sobre o $\mathbb{R}^2$ definido por $T(u) = Au^t$. Considerando-se o produto interno usual, prove que $\langle T(1, 0), (0, 1) \rangle = a_{21}$ e que $\langle T(0, 1), (1, 0) \rangle = a_{12}$.

- 55.** Sejam A e T como no exercício anterior e suponha que $\langle T(u), u \rangle = 0, \forall u \in \mathbb{R}^2$.

Prove que $A = \lambda \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, para algum escalar λ .

(Sugestão: Use os resultados dos dois últimos exercícios).

□□□□□□