

2ª Lista de Exercícios

1. Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Sejam $h, g \in V^*$ e considere $f : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ dada por

$$f(u, v) = h(u)g(v) + h(v)g(u).$$

Mostre que f é uma forma bilinear.

2. Sejam U, V e W três $\mathbb{K}$ -espaços vetoriais. Mostre que a função $\varphi : L(U, V) \times L(V, W) \rightarrow L(U, W)$ definida por $\varphi(T, S) = S \circ T$ é bilinear.
3. Determine a matriz de cada uma das formas bilineares abaixo, relativamente à base especificada:

- (a) $f : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(u, v) = \langle u, v \rangle, \forall u, v \in \mathbb{R}^4$ com relação à base

$$\mathcal{B} = \{(-2, 0, 3, 1), (1, 2, 1, -1), (0, 1, 2, -1), (1, 2, 3, 1)\}.$$

- (b) $f : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(u, v) = \langle u, a \rangle \cdot \langle v, b \rangle$, com $a, b \in \mathbb{C}^3$ fixos, com relação à base canônica de $\mathbb{C}^3$.

4. Mostre que a forma bilinear definida no exercício 1 é simétrica.
5. Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Sejam $h, g \in V^*$ e considere $f : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ dada por

$$f(u, v) = h(u)g(v) - h(v)g(u).$$

- (a) Mostre que f é uma forma bilinear anti-simétrica.
- (b) Mostre que $f = 0$ se e somente se existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $h = \lambda g$.
6. Mostre que qualquer forma bilinear f em V é a soma de uma forma bilinear simétrica e de uma forma bilinear anti-simétrica.
7. Seja $B(V)$ o conjunto das formas bilineares em V sobre $\mathbb{K}$. Demonstre:
- (a) Se $f, g \in B(V)$, então $f + g$ e kf , para $k \in \mathbb{K}$, também pertencem a $B(V)$; logo, $B(V)$ é um subespaço do espaço vetorial das funções de $V \times V$ em $\mathbb{K}$.
- (b) Se ϕ e σ são funcionais lineares em V , então $f(u, v) = \phi(u)\sigma(v)$ pertence a $B(V)$.
8. Seja $S(V)$ o conjunto das formas bilineares simétricas em V . Mostre que:
- (a) $S(V)$ é um subespaço de $B(V)$.
- (b) se $\dim V = n$, então $\dim S(V) = \frac{1}{2}n(n+1)$.

9. Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$, $W \subset V$ um subespaço e $f \in B(V)$. Mostre que $W^\perp = \{v \in V : f(w, v) = 0, \forall w \in W\}$ é um subespaço de V .
10. Suponhamos que A é uma matriz simétrica real definida positiva. Mostre que existe uma matriz não-singular P tal que $A = P^t P$.

11. Seja A qualquer matriz complexa não-singular. Mostre que $H = A^*A$ é hermitiana e definida positiva.
12. Reconhecer as quádricas abaixo, dadas pelas suas equações em relação ao sistema ortogonal $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$:
- (a) $5x^2 + 6y^2 + 7z^2 + 4xy - 4xz - 18x - 12y + 618z - 18 = 0$,
 - (b) $x^2 - y^2 + 4xz + 4yz + 11z + 8x - 2y + 12 = 0$,
 - (c) $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2yz - 4x + 4y - 4z + 1 = 0$,
 - (d) $3y^2 + 3z^2 - 4xy - 4xz - 2yz = 2x + y + z = 0$.
13. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Uma transformação $f : V \times V \times \cdots \times V \rightarrow \mathbb{K}$ é chamada *forma multilinear* (ou *m-linear*) em V se f é linear em cada variável, isto é, para $i = 1, \dots, m$,

$$f(\cdots, au + bv, \cdots) = af(\cdots, u, \cdots) + bf(\cdots, v, \cdots),$$

onde u e v estão na i -ésima componente de f e as outras componentes são mantidas fixas. Uma forma m-linear f é chamada *alternada* se

$$f(v_1, \cdots, v_m) = 0, \quad \text{sempre que } v_i = v_k, i \neq k.$$

Demonstre:

- (a) O conjunto $B_m(V)$ de formas m-lineares em V é um subespaço do espaço vetorial das funções $V \times V \times \cdots \times V$ em $\mathbb{K}$.
- (b) O conjunto $A_m(V)$ de formas m-lineares alternadas em V é um subespaço de $B_m(V)$.