

Primeira Lista de Exercícios

1 Espaços vetoriais

Exercício 1.1. Considere $M_2 := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$, $\oplus : M_2 \times M_2 \longrightarrow M_2$ dada por

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix}$$

e $\odot : \mathbb{R} \times M_2 \longrightarrow M_2$ dada por

$$\alpha \odot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix}$$

Mostre que $(M_2, \oplus, \odot)$ é um espaço vetorial. As operações assim definidas são as usuais para M_2 .

Exercício 1.2. Considere $\mathbb{Q}$ o conjunto dos números racionais, $\oplus$ e $\odot$ a soma e o produto usuais de números reais. $(\mathbb{Q}, \oplus, \odot)$ é um espaço vetorial? Justifique.

Exercício 1.3. Exiba os elementos neutros dos seguintes espaços vetoriais: $\mathbb{R}^3$ e M_2 (cada um com a soma e a multiplicação por escalar usuais).

Exercício 1.4. Seja $f \in \mathcal{F}$. Determine qual é a função representada por $-f$.

Exercício 1.5. Seja $V := \{r \in \mathbb{R} : r > 0\}$. Considere sobre V as seguintes operações $\oplus : V \times V \longrightarrow V$ e $\odot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$ dadas por $r \oplus s := rs$ e $\alpha \odot r := r^\alpha$ onde $r, s \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Mostre que $(V, \oplus, \odot)$ é um espaço vetorial e exiba o elemento neutro de V .

Exercício 1.6. Considere $\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$ o conjunto dos números complexos. Mostre que $\mathbb{C}$ com as operações usuais é um espaço vetorial.

Exercício 1.7. Seja $P := \{a + bx + cx^2 : a, b, c \in \mathbb{R}\}$ o conjunto dos polinômios de grau menor ou igual a 2. Mostre que P é um espaço vetorial e exiba seu elemento neutro.

Exercício 1.8. Seja $A, B, C \in M_2$, onde $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $C := \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calcule, com as operações usuais de M_2 , os seguintes elementos:

- (a) $A + B$
- (b) $B + \frac{1}{2}C$
- (c) $A - B + 4C$

Exercício 1.9. Sejam V um espaço vetorial e $v, u, w \in V$. Mostre as seguintes afirmações:

- (a) $-(-v) = v$;
- (b) Se $u + v = w + v$ então $u = w$.

Exercício 1.10. Sejam V um espaço vetorial e $u, v \in V$. Mostre que existe um único vetor $w \in V$ tal que $u + w = v$.

Exercício 1.11. Sejam $(U, \oplus_U, \odot_U)$ e $(V, \oplus_V, \odot_V)$ espaços vetoriais. Considere $U \times V := \{(u, v) : u \in U, v \in V\}$ com as seguintes operações:

$$(u_1, v_1) + (u_2, v_2) := (u_1 \oplus_U u_2, v_1 \oplus_V v_2)$$

$$\alpha \cdot (u, v) := (\alpha \odot_U u, \alpha \odot_V v)$$

onde $u, u_1, u_2 \in U$, $v, v_1, v_2 \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Mostre que $(U \times V, +, \cdot)$ é um espaço vetorial.

2 Subespaços vetoriais

Exercício 2.1. Sejam V um espaço vetorial e $S \subset V$. Suponha que, dados $u, v \in S$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ temos que $u + v \in S$ e $\alpha v \in S$. Mostre que $0 \in S$ se, e somente se, S é não vazio.

Exercício 2.2. Seja V espaço vetorial e $S \subset V$. Mostre que S com as operações restritas de V é um subespaço vetorial de V se, e somente se, S é não vazio e, dados $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u, v \in S$ temos $\alpha u + v \in S$.

Exercício 2.3. Seja V um espaço vetorial. Considere $S := \{0\} \subset V$. S com as operações induzidas por V é um subespaço vetorial?

Exercício 2.4. Decida se os conjuntos abaixo são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$ com as operações induzidas pelas operações usuais de $\mathbb{R}^3$. Justifique suas afirmações.

- (a) $A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$
- (b) $B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = z\}$
- (c) $C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xy = 0\}$
- (d) $D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + z = 0\}$
- (e) $E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = 1\}$

Exercício 2.5. Sejam V um espaço vetorial e $A, B \subset V$ subespaços vetoriais de V . As seguintes afirmações são verdadeiras? Justifique suas respostas.

- (a) $A \cap B$ é um subespaço vetorial de V .

- (b) $A \cup B$ é um subespaço vetorial de V .
- (c) $\{a + b : a \in A \text{ e } b \in B\}$ é um subespaço vetorial de V .
- (d) Se $A \subset B$ então A é subespaço vetorial de B .

Exercício 2.6. Seja S subespaço vetorial de V . Seja 0_V o elemento neutro de V e 0_S o elemento neutro de S . Mostre que $0_V = 0_S$.

Exercício 2.7. Considere $S := \{A \in M_2 : \det A \neq 0\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$. S com as operações induzidas por M_2 é subespaço vetorial de M_2 ?

3 Combinações lineares e subespaços gerados

Exercício 3.1. Considere $\mathbb{R}^2$ com as operações usuais. Escreva $(1, 2)$ como combinação linear de $\{(1, 1), (0, 4)\}$.

Exercício 3.2. Considere $\mathbb{R}^3$ com as operações usuais. Considere $S := [(1, 0, 0), (1, 1, 0)]$. Dê uma interpretação geométrica para S .

Exercício 3.3. Seja V um espaço vetorial e seja S um subespaço vetorial de V . Então $S = [S]$.

Exercício 3.4. Seja V um espaço vetorial. Mostre as seguintes afirmações:

- (a) Seja $S \subset V$. Então $S \subset [S]$;
- (b) Sejam $S_1 \subset S_2 \subset V$. Então $[S_1] \subset [S_2]$;
- (c) Seja $S \subset V$. Então $[S] = [[S]]$.

Exercício 3.5. Considere $\mathbb{R}^3$ com as operações usuais. Considere $S := \{(a, b, a + 2b) : a, b \in \mathbb{R}\}$.

- (a) Mostre que S é subespaço de $\mathbb{R}^3$ com as operações usuais.
- (b) Encontre um conjunto com exatamente 2 elementos que seja um gerador para S .
- (c) Encontre um conjunto com exatamente 3 elementos que seja um gerador para S .
- (d) Encontre $A, B \subset \mathbb{R}^3$ tais que $A \cap B = \emptyset$ e $[A] = [B] = S$.

Exercício 3.6. Sejam V um espaço vetorial e $v \in V$. Mostre que $[V \setminus \{v\}] = V$.

Exercício 3.7. Considere M_2 com as operações usuais. Considere

$$S := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2 : a = c \right\}$$
$$A := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

- (a) S é um subespaço vetorial de M_2 ? Justifique.
- (b) Relacione S com $[A]$, justificando suas afirmações.

Exercício 3.8. Sejam V um espaço vetorial e $A \subset V$ um conjunto não vazio. Suponha que S seja um subespaço de V tal que $A \subset S$. Mostre que $[A] \subset S$.

Exercício 3.9. Sejam V um espaço vetorial e $A \subset V$ um conjunto não vazio. Mostre que A é subespaço de V se, e somente se, $A = [A]$.

Exercício 3.10. Sejam V um espaço vetorial e $A \subset V$ um conjunto não vazio. Mostre que $[A] = \bigcap \{S \subset V : S \supset A \text{ e } S \text{ é subespaço de } V\}$.

Exercício 3.11. Achar um conjunto de geradores (sistema de geradores) dos seguintes subespaços de $\mathbb{R}^4$:

1. $U = \{(x, y, z, t) : x - y - z + t = 0\}$;
2. $V = \{(x, y, z, t) : x - y = z + t = 0\}$.

Exercício 3.12. Mostre que os polinômios $1 - x$, $(1 - x)^2$, $(1 - x)^3$ e 1 geram P_3 .

Exercício 3.13. Considere os seguintes vetores do $\mathbb{R}^3$: $(-1, 0, 1)$ e $(3, 4, -2)$. Determinar um sistema de equações homogêneas para o qual o espaço solução seja exatamente o subespaço gerado por esses vetores.

Exercício 3.14. Repita o exercício anterior com os vetores $(1, 0, 1, 2)$ e $(0, 0, 1, 0)$ do $\mathbb{R}^4$.

4 Dependência Linear

Exercício 4.1. Sejam V um espaço vetorial e $A \subset V$. Mostre que, se $0 \in A$, então A é linearmente dependente.

Exercício 4.2. Considere $\mathbb{R}^4$ com as operações usuais. Decida se cada conjunto de vetores é linearmente dependente ou não. Justifique suas respostas:

- (a) $\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$
- (b) $\{(1, 1, 0, 0), (2, 2, 4, 4), (0, 0, 1, 1)\}$
- (c) $\{(x, y, z, w) : x + y + z + w = 0\}$
- (d) $\{(0, 0, 0, 2), (0, 0, -1, 3), (0, 4, 2, 1), (1, 2, 3, 4)\}$

Exercício 4.3. Seja V um espaço vetorial. Sejam $A, B \subset V$. Decida se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas e justifique suas respostas:

- (a) Se A é linearmente independente e $B \subset A$, então B é linearmente independente.
- (b) Se A é linearmente dependente e $B \supset A$, então B é linearmente dependente.
- (c) Se A é linearmente independente e $B \supset A$, então B é linearmente independente.
- (d) Se A é linearmente dependente e $B \subset A$, então B é linearmente dependente.

Exercício 4.4. Sejam V um espaço vetorial e $u, v, w \in V$. Suponha que $v \in [w]$ e $u \in [w]$. Mostre que $\{u, v\}$ é linearmente dependente.

Exercício 4.5. Sejam V um espaço vetorial e $u, v, w \in V$. Suponha que $\{u, v, w\}$ é linearmente independente. Mostre que $\{u + v, u + w, v + w\}$ é linearmente independente.

Exercício 4.6. Sejam V um espaço vetorial e $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_m \in V$. Suponha que $\{u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_m\}$ seja linearmente independente. Mostre que $[u_1, \dots, u_n] \cap [v_1, \dots, v_m] = \{0\}$.

Exercício 4.7. Considere $P_2 := \{a + bx + cx^2 : a, b, c \in \mathbb{R}\}$ o conjunto dos polinômios de grau menor ou igual a 2 com as operações usuais. Verifique se os seguintes elementos são linearmente independentes ou não, justificando suas respostas.

- (a) $f(x) := 1 + x + x^2, g(x) := 2 + 2x + 2x^2$.
- (b) $f(x) := x + x^2, g(x) := 2, h(x) := 1 + 2x^2$.
- (c) $f(x) := 1 + x, g(x) := 2 + x, h(x) := x^2$.

Exercício 4.8. Mostre que podemos retirar a hipótese de A ser finito no corolário 4.7. Dica: Como A é linearmente dependente, temos que existem $v_1, \dots, v_n \in A$ linearmente dependentes. Comece com isso e procure fazer algo parecido com a demonstração de 4.7.

Exercício 4.9. Quais dos subconjuntos abaixo de P_4 são linearmente dependentes?

- (a) $\{1, x - 1, x^2 + 2x + 1, x^2\}$
- (b) $\{2x, x^2 + 1, x - 1, x^2 - 1\}$
- (c) $\{x(x - 1), x^3, 2x^3 - x^2, x\}$
- (d) $\{x^4 + x - 1, x^3 - x + 1, x^2 - 1\}$

5 Bases

Exercício 5.1. Exiba uma base para cada espaço vetorial e demonstre que a mesma de fato é uma base. Considere para cada conjunto as operações usuais.

(a) M_2

(b) $\mathbb{R}^3$

(c) $\mathbb{R}$

Exercício 5.2. Sejam V um espaço vetorial e B uma base para V . Considere $C, D \subset V$ tais que $C \subsetneq B$ e $D \supsetneq B$. Mostre que C e D não são bases de V .

Exercício 5.3. Sejam V um espaço vetorial e B uma base para V . Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ com $\alpha \neq 0$. Mostre que $C := \{\alpha v : v \in B\}$ é uma base para V .

Exercício 5.4. Sejam U, V espaços vetoriais. Sejam A base para U e B base para V . Considere $U \times V$ (veja o exercício 1.11). O conjunto $C := \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$ é uma base para $U \times V$?

Exercício 5.5. Mostrar que o conjunto de vetores:

$$\{(0, 2, 2), (0, 4, 1)\}$$

é uma base do seguinte subespaço vetorial do $\mathbb{R}^3$:

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}.$$

Exercício 5.6. Mostrar que os polinômios $1, 1 + x, 1 - x^2$ e $1 - x - x^2 - x^3$ formam uma base de P_3 .

Exercício 5.7. Encontre uma base do subespaço das soluções de cada um dos sistemas lineares:

$$(a) \begin{cases} x + 2y - 4z + 3r - s = 0 \\ x + 2y - 2z + 2r + s = 0 \\ 2x + 4y - 2z + 3r + 4s = 0 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ -2x + 2z = 0 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x - y - z - t = 0 \\ 2x + y + t = 0 \\ z - t = 0 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y - 2z = 0 \\ x + 4y + 5z = 0 \end{cases}$$