

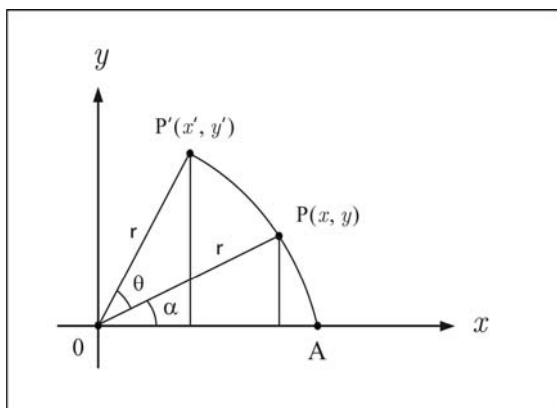


UFPB - CCEN - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
ÁLGEBRA LINEAR E GEOMETRIA ANALÍTICA
2ª LISTA DE EXERCÍCIOS – PERÍODO 2006.2

Verifique se são lineares as funções definidas nos exercícios 01 → 18.

01. $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (2x - y, 0)$.
02. $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (x - 1, y + z)$.
03. $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x) = (x, 2x, -x)$.
04. $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $T(x) = -x$.
05. $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (y, x^3)$.
06. $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $T(x) = \sin x$.
07. $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (|x|, 3y)$.
08. $T: M_{2 \times 2} \rightarrow M_{2 \times 2}$, $T(A) = XA$, X uma matriz fixada em $M_{2 \times 2}$.
09. $T: M_{2 \times 2} \rightarrow M_{2 \times 2}$, $T(A) = X + A$, X uma matriz fixada em $M_{2 \times 2}$.
10. $T: M_{2 \times 2} \rightarrow M_{2 \times 2}$, $T(A) = A^t$, onde A^t representa a transposta da matriz A .
11. $T: M_{2 \times 2} \rightarrow M_{2 \times 2}$, $T(A) = \det(A)$, onde $\det$ significa *determinante*.
12. $T: \mathbb{R} \rightarrow M_{1 \times 2}$, $T(x) = \begin{bmatrix} x & ax \end{bmatrix}$, a um número real qualquer.
13. $T: M_{3 \times 1} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = (a + 2b, a - c)$.
14. $T: M_{2 \times 2} \rightarrow P_2(x)$, $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a - b)x^2 + cx + d$.
15. $T: M_{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$, $T(A) = \text{tr}(A)$, onde tr denota *traço* ou *soma dos elementos diagonais*.
16. $T: P_1(x) \rightarrow P_2(x)$, $T(p(x)) = xp(x) + x$.
17. $T: P_2(x) \rightarrow \mathbb{R}$, $T(p(x)) = \int_0^1 p(x) dx$.
18. $T: P_2(x) \rightarrow P_3(x)$, $T(p(x)) = p(x) + x^2 p'(x)$.
19. Se V é um espaço vetorial qualquer, verifique que a função $I: V \rightarrow V$ dada por $I(v) = v$ é linear (*A função I é chamada de Operador Identidade*).
20. Sejam U, V e W espaços vetoriais e $f: U \rightarrow V$ e $g: V \rightarrow W$ transformações lineares. Se $g \circ f: U \rightarrow W$ é a função definida por $(g \circ f)(u) = g(f(u))$, $\forall u \in U$, mostre que $g \circ f$ também é uma transformação linear.
21. Se $T: V_1 \rightarrow V_2$ é uma transformação linear, prove que $T(u - v) = T(u) - T(v)$, $\forall u, v \in V_1$.
22. Sejam U e V espaços vetoriais e $f: U \rightarrow V, g: U \rightarrow V$ funções lineares. Se $\alpha = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ é uma base do espaço U e $f(u_i) = g(u_i)$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$, conclua que $f(v) = g(v)$, $\forall v \in U$.
23. Existe uma transformação linear $T: P_1(x) \rightarrow P_2(x)$ que satisfaça $T(x+1) = x^2 - 1$ e $T(x-1) = x^2 + x$?
24. Defina a função linear $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que possui o vetor $(1, 0)$ em seu núcleo e satisfaz $f(1, -1) = (1, 2, 0)$.

25. Encontre uma transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ cujo núcleo seja a reta $y = 2x$.
26. Determine uma transformação linear $T: P_2(x) \rightarrow P_2(x)$, tal que $T(1) = x$, $T(x) = 1 - x^2$ e $T(x^2) = x + 2x^2$.
27. Encontre uma transformação linear cuja imagem seja gerada pelo vetor $(1, -2)$.
28. Determine um operador linear sobre $\mathbb{R}^3$ cujo núcleo tenha dimensão 1.
29. Seja $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por $T(x, y) = (2x + y, 4x + 2y)$. Quais dos vetores abaixo pertencem ao núcleo de T ?
- a) $(1, 2)$ b) $(-2, 4)$ c) $(100, -200)$ d) $(0, 0)$ e) $(1, 5)$
30. Para cada transformação identificada como linear dentre as que constam dos exercícios 01 $\rightarrow$ 18, determine uma base e dê a dimensão do núcleo e da imagem.
31. Determine uma base e dê a dimensão do núcleo e da imagem da função $h: M_{2 \times 2} \rightarrow M_{2 \times 2}$, definida por $h(A) = MA$, sendo $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.
32. Considere $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x \cos \theta + y \sin \theta, y \cos \theta - x \sin \theta)$.
- a) Verifique que T é linear.
- b) Encontre uma base e dê a dimensão do núcleo e da imagem de T .
33. Considere o desenho contido na figura abaixo.



- a) Estabeleça expressões para x e y em função de r e α .
- b) Faça o mesmo para x' e y' em relação a r e $\beta = \alpha + \theta$.
- c) Utilize os resultados obtidos nos itens anteriores e escreva x' e y' em função de x , y e θ .
- d) Interpretando (x', y') como $T(x, y)$, conclua que a transformação linear do exercício 32 é uma **rotação de ângulo** $\theta > 0$.
34. Determine o núcleo e a imagem do operador linear derivada $D: P_n(x) \rightarrow P_n(x)$, definido por $D(f) = f'(x)$.
35. Sejam $f, g: V \rightarrow V$ operadores lineares, tais que $\dim N(f) = \dim N(g) = 0$. Mostre que $\dim N(f \circ g) = 0$.
36. Seja $T: P_2(x) \rightarrow P_2(x)$ definida por $T(ax^2 + bx + c) = (a + 2b)x + (b + c)$.
- a) $p(x) = -4x^2 + 2x - 2 \in N(T)$ b) $q(x) = x^2 + 2x + 1 \in \text{Im}(T)$?
- c) $r(x) = 2x + 1 \in \text{Im}(T)$?
- d) Determine uma base e dê a dimensão do núcleo e da imagem de T .
- e) T é injetora? T é sobrejetora?
37. Se $T: U \rightarrow V$ é uma transformação linear invertível, verifique que $T^{-1}: V \rightarrow U$ também é linear.

38. Quais transformações lineares já apresentadas nesta lista são isomorfismos? Para cada isomorfismo, determine a transformação linear inversa.

39. Determine o núcleo e a imagem de cada uma das transformações lineares abaixo.

Para as que forem isomorfismos, encontre a transformação inversa.

a) $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x - 3y, 3x + y)$.

b) $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (x + 2y - z, 2x - y + z)$.

c) $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (x + 2z, z)$

d) $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x - y - 2z, -x + 2y + z, x - 3z)$.

e) $T: M_{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a - b, a + b)$.

f) $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(2, 3) = (-1, 0, 1)$, $T(1, -2) = (0, -1, 0)$.

g) $T: M_{2 \times 2} \rightarrow M_{2 \times 2}$, $T(A) = MA - AM$, onde $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

40. Mostre que são isomorfos os seguintes espaços vetoriais:

a) $\mathbb{R}^2$ e $W = \{(x, y, z) / z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$.

b) $\mathbb{R}^3$ e $P_2(x)$.

c) $M_{2 \times 2}$ e $\mathbb{R}^4$.

41. Seja $T: U \rightarrow V$ uma transformação linear. Mostre que:

a) $\dim U < \dim V \Rightarrow T$ não pode ser sobrejetora.

b) $\dim U > \dim V \Rightarrow T$ não pode ser injetora.

c) se $\dim U = \dim V$, então T é injetora $\Leftrightarrow T$ é sobrejetora.

d) T é um isomorfismo $\Rightarrow \dim U = \dim V$.

42. Se $T: U \rightarrow V$ é uma transformação linear, conclua que $\dim \text{Im}(T) \leq \dim U$.

43. Sejam $T: U \rightarrow V$ uma transformação linear injetora e $u_1, u_2, \dots, u_n$ vetores L.I. em U . Verifique que $T(u_1), T(u_2), \dots, T(u_n)$ são vetores L.I. em V .

44. Sejam $T: U \rightarrow V$ um isomorfismo e $\alpha = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ uma base de U . Verifique que o conjunto $\beta = T(\alpha) = \{T(u_1), T(u_2), \dots, T(u_n)\}$ é uma base de V .

45. Considere, em $\mathbb{R}^3$, a base $\alpha = \{(1, 1, 0), (1, 1, 1), (1, -2, -1)\}$ e denote por β a base canônica do $\mathbb{R}^2$. Se $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é a transformação linear definida por $T(x, y, z) = (x - y + 2z, x - y - z)$, determine $[T]_{\beta}^{\alpha}$.

46. Se T é o operador linear sobre o $\mathbb{R}^3$ definido por $T(x, y, z) = (x + y, x - y, y + z)$, determine as matrizes $[T]_{\beta}^{\alpha}$ e $[T]_{\alpha}^{\beta}$, sendo $\alpha = \{(1, 2, 0), (1, 1, -1), (0, 0, 1)\}$ e β a base canônica do $\mathbb{R}^3$. Que relação existe entre essas matrizes?

47. Sejam $\alpha = \{(0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1)\}$ e $\beta = \{(-1, 0), (0, -1)\}$ bases de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, respectivamente. Se T é a transformação linear que satisfaz

$$[T]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

encontre uma base e dê a dimensão do núcleo e da imagem de T , decida se T é injetora e/ou sobrejetora e determine $T(x, y, z)$.

48. Sejam α a base canônica do $\mathbb{R}^2$ e T o operador linear sobre o $\mathbb{R}^2$ satisfazendo $[T]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$. Existe uma base β do $\mathbb{R}^2$, tal que $[T]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$?
49. Sejam $\alpha = \{(-1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0)\}$ e $\beta = \{(1, 2), (1, -1)\}$ bases de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, respectivamente. Se $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é a transformação linear que satisfaz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, calcule $[T(-1, 1, 0)]_{\beta}$, $T(-1, 1, 0)$ e $T(x, y, z)$.
50. Verifique que o operador linear sobre o $\mathbb{R}^3$ definido por $T(x, y, z) = (x - y, 2y, y + z)$ é um isomorfismo e encontre uma matriz que represente seu inverso.
51. Classifique como verdadeira ou falsa cada uma das afirmações abaixo.
- Se $T: P_2(x) \rightarrow P_1(x)$ é a transformação linear definida por $T(ax^2 + bx + c) = (a - c)x + b + c$, então $p(x) = x^2 + 2x + 1 \in N(T)$.
 - Se L é o operador linear sobre o $\mathbb{R}^2$ definido por $L(x, y) = (x - y, 2x - 2y)$, então o vetor $u = (2, 3)$ não está na imagem de L .
 - Existem transformações lineares $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^5$ que são sobrejetoras.
 - Se uma transformação linear $f: \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}^5$ satisfaz $\text{Im}(f) = 2$, então um conjunto L.I. em seu núcleo conterá no máximo 3 vetores.
 - Se A é uma matriz de ordem $m \times n$, então A representa alguma transformação linear $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.
52. Qual é a matriz da transformação $T: P_1(x) \rightarrow P_2(x)$ definida por $T(p(x)) = xp(x)$, em relação às bases $\alpha = \{x, 1\}$ e $\beta = \{x^2, x - 1, x + 1\}$ de $P_1(x)$ e $P_2(x)$, respectivamente?
53. Suponha que uma transformação linear $T: P_1(x) \rightarrow P_2(x)$ tem uma representação matricial da forma $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, em relação às bases canônicas de $P_1(x)$ e $P_2(x)$. Qual é essa transformação?
54. Sejam V um espaço vetorial de dimensão n e $I: V \rightarrow V$ o operador identidade. Qual é a matriz de I em relação a uma base qualquer de V ? Se α e β são duas bases distintas de V , qual é a matriz $[I]_{\beta}^{\alpha}$?
55. Sejam $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow P_1(x)$ as transformações lineares definidas, respectivamente, por $f(x, y) = (x, 2y, x - y)$ e $g(a, b, c) = (a + b)x + c$. Considerando-se as bases $\alpha = \{(-1, 0), (0, -1)\}$, $\beta = \{(0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1)\}$ e $\gamma = \{x - 1, x + 1\}$,
- determine as matrizes $[f]_{\beta}^{\alpha}$, $[g]_{\gamma}^{\beta}$ e $[g \circ f]_{\gamma}^{\alpha}$,
 - defina a transformação $g \circ f$ e
 - decida se $g \circ f$ é um isomorfismo.