UFPB/CCEN/DM PERÍODO 15.1
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA TURMA: 01
DISCIPLINA: Álgebra Linear TURNO: Manhã
PROFESSOR: Milton

3ª Lista de Exercícios

1. Sejam $u_1 = (1, 0, -1, 2)$, $u_2 = (2, 3, 1, 1) \in \mathbb{R}^4$ e $W = [u_1, u_2]$. Determine os funcionais lineares que estão no anulador de W.

2. Seja W o subespaço de $\mathbb{R}^5$ gerado pelos vetores

$$u_1 = (1, 2, 1, 0, 0)\,, \quad u_2 = (1, 0, 3, 3, 1) \quad \text{e} \quad u_3 = (1, 4, 6, 4, 1).$$

Determine uma base de W^0.

3. Seja $S \subset V$ um subconjunto e W o subespaço de V gerado por S. Mostre $S^0 = W^0$.

4. Sejam W_1 e W_2 subespaços de um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial V de dimensão finita

   (a) Demonstre que $(W_1 + W_2)^0 = W_1^0 \cap W_2^0$

   (b) Demonstre que $(W_1 \cap W_2)^0 = W_1^0 + W_2^0$.

5. Seja V um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão finita, $S \subset V$ e $\Phi : V \to V^{**}$ o isomorfismo definido em sala de aula. Descreva $\Phi^{-1}((S^0)^0)$ e mostre que S é um conjunto gerador de $\Phi^{-1}((S^0)^0)$.

6. Seja $\phi \in (\mathbb{R}^2)^*$ definido por $\phi(x, y) = 3x - 2y$. Determine $T^t(\phi)(x, y, z)$, quando $T \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ é dado por

   (a) $T(x, y, z) = (x + y, y + z)$

   (b) $T(x, y, z) = (x + y, 2x - y)$.

7. Considere $V = P(\mathbb{R})$. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $f \in V^*$ definida por

$$f(p) = \int_a^b p(x)dx.$$

Se $D \in L(V, V)$ é o operador derivação, determine $D^t f$.

8. Em cada um dos casos a seguir, decida se o operador linear $T : \mathbb{K} \to\mathbb{K}$ dado por sua matriz $[T]_\beta$ é diagonalizável. Em caso positivo, calcule sua base de autovetores e a sua forma diagonal.

(a) $\begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{pmatrix}$ $\mathbb{K} = \mathbb{R}$,$\mathbb{C}$.

(b) $\begin{pmatrix} -9 & 4 & 4 \\ -8 & 3 & 4 \\ -16 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

9. Seja $T : V \to V$ operador linear e V espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Mostre que se todo vetor de V for autovetor de T, então existe um $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $T(v) = \lambda v, \forall v \in V$.

10. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear que tem como autovetores $(3, 1)$ e $(-2, 1)$ associados aos autovalores -2 e 3, respectivamente. Calcule $T(x, y)$.

11. Sejam $T : V \to V$ e $S : V \to V$ transformações lineares. Suponha que v é autovetor de T e de S associado aos autovalores λ_1 e λ_2 de T e S, respectivamente. Ache um autovetor e um autovalor de:

(a) $\alpha S + \beta T$ onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(b) $S \circ T$.

12. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \in M_{3\times3}(\mathbb{C}).$$

Dado $n \in \mathbb{N}$ determine $B \in M_{3\times 3}(\mathbb{C})$ tal que $B^n = A$.

13. Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que

$$[T]_{\beta,\gamma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

onde $\beta = \left\{\frac{1}{2}x^2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}x\right\}$ e $\gamma = \{x^2, x, 1\}$. Mostre que T é diagonalizável.

14. Determine todos os valores de $a, b, c \in \mathbb{C}$ para os quais a matriz abaixo seja diagonalizável

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 1 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

15. Seja $T \in L(V, V)$ tal que $p(x) = (x - \lambda_1)^{n_1} \cdots (x - \lambda_s)^{n_s}$, $n_i \geq 1$ e $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$. Mostre que T pode ser escrita como a soma direta de s operadores lineares.

16. Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ o operador linear dado por $T(at^2 + bt + c) = (2a - b + c)\,t^2 + (a + c)\,t + 2c$. Escreva T como soma direta de dois operadores.

17. Seja $T : L(\mathbb{N},\mathbb{K}) \to L(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ dado por $T((x_n)) = (0, x_1, x_2, \cdots, x_l, \cdots)$. Mostre que T não se escreve como soma direta de um operador nilpotente com um operador invertível.

18. Seja $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ o operador linear dado por

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (3x_1 - 2x_5, 0, 2x_3 - x_4 + x_5, x_5 - x_1, 2x_1 - x_5).$$

Determine a decomposição $T = T_1 \oplus T_2$ onde T_1 é nilpotente e T_2 é invertível.

19. Seja $T \in L(\mathbb{K}^n,\mathbb{K}^n)$ um operador com polinômio característico $p(x) = (x - \lambda)^n$. Mostre que o operador $T' = \lambda I - T$ é nilpotente.

20. Seja c um valor característico de T e seja W o espaço dos vetores característicos associado ao valor característico c.Qual o operador T_W?

21. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

A é semelhante sobre o corpo dos números reais a uma matriz triangular? Em caso afirmativo, determinar uma tal matriz triangular.

22. Toda matriz A, tal que $A^2 = A$, é semelhante a uma matriz diagonal.

23. Seja T um operador linear diagonalizável sobre o espaço vetorial $n-$dimensional V, e seja W um subespaço invariante sob T. Demonstrar que o operador T_W é diagonalizável.

24. Seja T o operador integral indefinida

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(t)dt$$

sobre o espaço das funções contínuas sobre o intervalo $[0, 1]$. O espaço das funções polinomiais é invariante sob T? O espaço das funções diferenciáveis? O espaço das funções que se anulam em $x = \frac{1}{2}$?

25. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e sejam $W_1, \cdots, W_k$ subespaços de V tais que

$$V = W_1 + \cdots + W_k \quad \text{e} \ \dim V = \dim W_1 + \cdots + \dim W_k.$$

Demonstrar que $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$.

26. Seja T um operador linear sobre $\mathbb{R}^3$ que é representado em relação à base ordenada canônica pela matriz

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{bmatrix}.$$

Exprimir o polinômio minimal p de T sob a forma $p = p_1p_2$, sendo p_1 e p_2 unitários e irredutíveis sobre o corpo dos números reais. Seja W_i o núcleo de $p_i(T)$. Determinar bases β_i dos espaços W_1 e W_2. Se T_i é o operador induzido sobre W_i por T, determinar a matriz de T_i em relação à base β_i.

27. Seja T o operador linear sobre $\mathbb{R}^3$ que é representado pela matriz

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

em relação à base ordenada canônica. Mostrar que existe um operador diagonalizável D sobre $\mathbb{R}^3$ e um operador nilpotente N sobre $\mathbb{R}^3$ tais que $T = D + N$ e $DN = ND$. Determinar as matrizes de D e N em relação à base canônica.

28. Seja T um operador linear sobre V com polinômio minimal da forma p^n, sendo p irredutível sobre o corpo dos escalares. Mostrar que existe um vetor α em V tal que o $T-$anulador de α seja p^n.

29. Se N é um operador linear nilpotente sobre um espaço vetorial $n-$ dimensional V, então o polinômio característico de N é x^n.