

CORPOS

Definição: Um conjunto não-vazio K é um corpo se em K podemos definir duas operações; $+$ (adição) e $\cdot$ (multiplicação) satisfazendo as seguintes propriedades:

$$(P1) \quad a+b = b+a, \quad \forall a, b \in K$$

$$(P2) \quad a+(b+c) = (a+b)+c, \quad \forall a, b, c \in K$$

(P3) Existe o elemento neutro de K , que chamamos 0 , satisfaz

$$a+0 = 0+a = a, \quad \forall a \in K$$

(P4) Para cada $a \in K$, $\exists$ um elemento em K , que denotamos por elemento inverso $-a$ tal que

$$a+(-a) = (-a)+a = 0.$$

$$(P5) \quad a \cdot b = b \cdot a \quad \forall a, b \in K$$

$$(P6) \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \quad \forall a, b, c \in K$$

$$(P7) \quad \exists 1 \in K \text{ tal que } 1 \cdot a = a \cdot 1 = a, \quad \forall a \in K$$

$$(P8) \quad \forall a \in K \quad \exists a^{-1} : a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$$

$$(P9) \quad (a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c, \quad \forall a, b \in K.$$

Exemplos de corpos: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$. $\mathbb{Z}$ não é corpo.

$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ é corpo.

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a+b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

$$(i) \quad (a+b\sqrt{2}) + (c+d\sqrt{2}) = (a+c) + (b+d)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$$

$$(ii) \quad (a+b\sqrt{2}) \cdot (c+d\sqrt{2}) = (ac+2bd) + (ad+bc)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$$

(29) Exemplo: Seja f o produto interno no $\mathbb{R}^n$, isto é,

$$f(u, v) = u \cdot v = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

onde $u = (a_i)$, $v = (b_i)$. Note que f é simétrica, pois

$$f(u, v) = u \cdot v = v \cdot u = f(v, u)$$

Além disso, f é definida positiva, pois

$$f(u, u) = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 > 0 \text{ qdo } u \neq 0.$$

Cordãoio. Qualquer forma quadrática real q tem uma representação única na forma $q(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_r^2$. (Lei de inércia ou Teorema de Sylvester).

FORMAS HERMITIANAS

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo complexo $\mathbb{C}$. Seja $f: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$(i) \quad f(au_1 + bu_2, v) = a f(u_1, v) + b f(u_2, v)$$

$$(ii) \quad f(u, v) = \overline{f(v, u)},$$

onde $a, b \in \mathbb{C}$ e $u_i, v \in V$. Então, f é chamada forma hermitiana em V .

Por (i) e (ii)

$$\begin{aligned} f(u, av_1 + bv_2) &= \overline{f(av_1 + bv_2, u)} = \overline{a f(v_1, u) + b f(v_2, u)} = \bar{a} \overline{f(v_1, u)} + \bar{b} \overline{f(v_2, u)} \\ &= \bar{a} f(u, v_1) + \bar{b} f(u, v_2). \end{aligned}$$

Isto é, $f(u, av_1 + bv_2) = \bar{a} f(u, v_1) + \bar{b} f(u, v_2)$.

f é linear na 1ª variável e é linear conjugada na 2ª variável.

Note que, por (ii) $f(v, v) = \overline{f(v, v)}$; logo, $f(v, v)$ é real, para todo $v \in V$.

Exemplo: Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz $n \times n$ sobre $\mathbb{C}$. Escrevemos $\bar{A}$ para a matriz $(\bar{a}_{ij})$ e A^* para $\bar{A}^t = \bar{A}^t$. Diz-se que A é hermitiana se $A^* = A$, isto é, $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$. Se A é hermitiana, então $f(x, y) = x^t A \bar{y}$ define uma forma hermitiana em $\mathbb{C}^n$.

(29) Exemplo: Seja f o produto interno no $\mathbb{R}^n$, isto é,

$$f(u, v) = u \cdot v = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

onde $u = (a_i)$, $v = (b_i)$. Note que f é simétrica, pois

$$f(u, v) = u \cdot v = v \cdot u = f(v, u)$$

Além disso, f é definida positiva, pois

$$f(u, u) = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 > 0 \text{ qdo } u \neq 0.$$

Cordário. Qualquer forma quadrática real q tem uma representação única

na forma $q(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_r^2$ (Lei de inércia ou Teorema de Sylvester).

FORMAS HERMITIANAS

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo complexo $\mathbb{C}$. Seja $f: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$(i) \quad f(au_1 + bu_2, v) = a f(u_1, v) + b f(u_2, v)$$

$$(ii) \quad f(u, v) = \overline{f(v, u)},$$

onde $a, b \in \mathbb{C}$ e $u_i, v \in V$. Então, f é chamada forma hermitiana em V .

Por (i) e (ii)

$$\begin{aligned} f(u, av_1 + bv_2) &= \overline{f(av_1 + bv_2, u)} = \overline{a f(v_1, u) + b f(v_2, u)} = \bar{a} \overline{f(v_1, u)} + \bar{b} \overline{f(v_2, u)} \\ &= \bar{a} f(u, v_1) + \bar{b} f(u, v_2). \end{aligned}$$

Isto é, $f(u, av_1 + bv_2) = \bar{a} f(u, v_1) + \bar{b} f(u, v_2)$.

f é linear na 1ª variável e é linear conjugada na 2ª variável.

Note que, por (ii) $f(v, v) = \overline{f(v, v)}$; logo, $f(v, v)$ é real, para todo $v \in V$.

Exemplo: Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz $n \times n$ sobre $\mathbb{C}$. Escrevemos $\bar{A}$ para a matriz $(\bar{a}_{ij})$ e A^* para $\bar{A}^t = \overline{A^t}$. Diz-se que A é hermitiana se $A^* = A$, isto é, $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$. Se A é hermitiana, então $f(x, y) = x^t A \bar{y}$ define uma forma hermitiana em $\mathbb{C}^n$.

Teorema: Seja f uma forma bilinear simétrica em V sobre $\mathbb{R}$. Então existe uma base de V na qual f é representada por uma matriz diagonal; qualquer outra representação diagonal tem o mesmo número P de elementos positivos e o mesmo número N de elementos negativos. A diferença $S = P - N$ é chamada a assinatura de f .

Prova: Pelo Teorema 4, existe uma base $\{u_1, \dots, u_n\}$ de V , na qual f é representada por uma matriz diagonal, digamos, com P elementos positivos e N elementos negativos. Agora suponhamos que $\{w_1, \dots, w_n\}$ é outra base de V , com P' elementos positivos e N' elementos negativos. Podemos supor, sem perda de generalidade, que os termos positivos aparecem primeiro. Como $\text{posto}(f) = P + N = P' + N'$, é suficiente provar que $P = P'$. Seja U o espaço gerado por $u_1, \dots, u_P$ e seja W o espaço gerado por $w_1, \dots, w_{P'}$. Então $f(u, v) > 0, \forall u \neq 0, v \in U$ e $f(u, v) \leq 0, \forall v \in W$ não-nulo. Portanto, $U \cap W = \{0\}$. Note que $\dim U = P$ e $\dim W = n - P'$. Assim,

$$\begin{aligned} \dim(U+W) &= \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) \\ &= P + (n - P') - 0 = P - P' + n \end{aligned}$$

Mas $\dim(U+W) \leq n$; portanto, $P - P' + n \leq n \Rightarrow P \leq P'$. Semelhantemente, $P' \leq P$ e daí, $P = P'$. ■

Diz-se que uma forma bilinear simétrica é semi-definida não-negativa se $g(u) = f(u, u) \geq 0, \forall u \in V$

e definida positiva se $g(u) = f(u, u) > 0, \forall u \neq 0$.

Pelo Teo. acima,

- (i) f é semi-definida não-negativa $\Leftrightarrow S = \text{posto}(f)$
- (ii) f é definida positiva se, e somente se, $S = \dim V$.

Definição: Uma transformação $q: V \rightarrow K$ é chamada forma quadrática se $q(v) = f(v, v)$ para alguma forma bilinear simétrica em V .

Chamamos q a forma quadrática associada à forma bilinear simétrica f . Se $1+1 \neq 0$ em K , então f pode ser obtida de q a partir da identidade:

$$f(u, v) = \frac{1}{2} (q(u+v) - q(u) - q(v)) \quad (\text{forma polar de } f)$$

Se f é representada por uma matriz simétrica $A = (a_{ij})$, então q é representada na seguinte forma:

$$q(x) = f(x, x) = x^t A x$$

$$= (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j = a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + \dots + a_{nn} x_n^2 + 2 \sum_{i < j} a_{ij} x_i x_j.$$

Se a matriz A é diagonal, então q tem a representação diagonal

$$q(x) = x^t A x = a_{11} x_1^2 + \dots + a_{nn} x_n^2.$$

Pelo Teo. anterior (formas simétricas) toda forma quadrada tem uma tal representação.

Exemplo 1: Consideremos a seguinte forma quadrática em $\mathbb{R}^2$:

$$q(x, y) = 2x^2 - 12xy + 5y^2$$

Fazendo $x = s+3t$ e $y = t$, obtemos

$$q(x, y) = 2(s+3t)^2 - 12(s+3t)t + 5t^2 = 2s^2 - 13t^2.$$

(25)

Teorema 3: Seja f uma forma bilinear alternada em V . Então existe uma base de V , na qual f é representada por uma matriz da forma

Prova: $f(u, u) = 0$. Como $f \neq 0$
 $\exists u, v \in V: f(u, v) \neq 0$. Podemos
 supor $f(u, v) = 1$. Seja $\gamma = cu + dv$
 Então
 $f(\gamma, u) = f(cu + dv, u) = cf(u, u) = 0$
 $f(\gamma, v) = f(cu + dv, v) = cf(u, v) = c$
 $\gamma = f(\gamma, u)u - f(\gamma, v)v$
 $u \text{ e } v \text{ s\~ao l.i. se } \gamma = 0 \Rightarrow$
 $f(\gamma, u) = f(\gamma, v) = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ -1 & 0 & & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & -1 & 0 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & -1 & 0 \\ & & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & 0 & \end{pmatrix}$$

Sup. $\dim V = n > 1$

Seja $u_1 \in V$:

$$f(u_1, u_1) = 0.$$

$$W = [u, v]$$

Seja $W^\perp = \{x \in V: f(x, u) = f(x, v) = 0\}$

$$V = W \oplus W^\perp$$

$\hat{f} = f|_{W^\perp}$ é anti-simétrica

Se $\hat{f} \neq 0$ escolhemos

$$u', v': f(u', v') = 1$$

$$W' = [u', v']$$

$$V = W' \oplus W'^\perp$$

$$W'^\perp = \{x \in V: f(x, u') = f(x, v') = 0\}$$

$$f(u', u') = f(v', v') = 0$$

Continuando,

encontramos

$$(u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_k, v_k)$$

$$f(u_i, v_j) = \delta_{ij}$$

$$f(u_i, u_j) = f(v_i, v_j) = 0$$

$$f(u_i, v_j) = 0 \text{ para } i \neq j$$

$$V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k \oplus W_0$$

W_0 é ortogonal

a todos u_i, v_i

$$f|_{W_0} = 0$$

Além disso, o número de matrizes $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ é determinado de maneira única por f ($\frac{n}{2}$ posto (f)).

FORMAS BILINEARES SIMÉTRICAS, FORMAS QUADRÁTICAS

Uma forma bilinear f em V é simétrica se

$$f(u, v) = f(v, u), \quad \forall u, v \in V.$$

Se A é a representação matricial de f , podemos escrever

$$f(x, y) = x^t A y = (x^t A y)^t = y^t A^t x$$

Assim, se f é simétrica,

$$y^t A^t x = f(x, y) = f(y, x) = y^t A x$$

e, como isto é válido para todos os vetores x, y , segue que $A = A^t$, isto é, A é simétrica. Reciprocamente, se A é simétrica, então f é simétrica.

Teorema 4. Seja f uma forma bilinear simétrica em V sobre $\mathbb{K}$ ($1+1 \neq 0$). Então, V tem uma base $\{u_1, \dots, u_n\}$, na qual f é representada por uma matriz diagonal, isto é, $f(u_i, u_j) = 0, i \neq j$.

Forma alternada do Teo. 4. Seja A uma matriz simétrica sobre $\mathbb{K}$ ($1+1 \neq 0$). Então, existe uma matriz inversível P tal que $P^t A P$ é diagonal.

(24)

Onde $[u]_e$ denota o vetor (coluna) coordenada de $u \in V$ na base $\{e_i\}$.

Como se transforma uma matriz que representa uma forma bilinear, quando uma nova base é escolhida?

Teorema 2. Seja P a matriz de mudança de base, de uma base para outra. Se A é a matriz de f na base original, então $B = P^t A P$ é a matriz de f na nova base.

Prova: Sejam $u, v \in V$. Como P é a matriz de transição de $\{e_i\}$ para $\{e'_i\}$, temos $P[u]_{e'} = [u]_e$ e $P[v]_{e'} = [v]_e$. Portanto, $[u]_{e'}^t = [u]_e^t P^t$. Assim,

$$f(u, v) = [u]_e^t A [v]_e = [u]_{e'}^t P^t A P [v]_{e'}$$

Como u e v são arbitrários em V então $P^t A P$ é a matriz de f em $\{e'_i\}$.

Definição. O posto de uma forma bilinear f em V , escrito $\text{posto}(f)$, é definido como o posto de qualquer representação matricial de f . Dizemos que f é degenerada ou não-degenerada se $\text{posto}(f) < \dim V$ ou $\text{posto}(f) = \dim V$, resp.

FORMAS BILINEARES ALTERNADAS

Diz-se que uma forma bilinear f em V é alternada se

$$(i) \quad f(v, v) = 0, \quad \forall v \in V.$$

Se f é alternada, então

$$0 = f(u+v, u+v) = f(u, u) + f(u, v) + f(v, u) + f(v, v)$$

Logo,

$$(ii) \quad f(u, v) = -f(v, u), \quad \forall u, v \in V.$$

Toda forma bilinear que satisfaz (ii) é dita anti-simétrica.

Note que (ii) $\Leftrightarrow$ (i), no corpo $\mathbb{K}$ tal que $1+1 \neq 0$. Assim $f(u, v)$ é alternada se, e somente se, ela é anti-simétrica em $\mathbb{K}$.

Teorema 1. Seja V um espaço vetorial de dimensão n sobre $\mathbb{K}$. Seja $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ base do espaço dual V^* . Então, $\{f_{ij} : i, j = 1, \dots, n\}$ é base de $B(V)$, onde f_{ij} é definida por $f_{ij}(u, v) = \phi_i(u) \phi_j(v)$. Assim, em particular, $\dim B(V) = n^2$.

Prova: Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ a base de V dual a $\{\phi_i\}$. Mostremos que $\{f_{ij}\}$ gera $B(V)$. Seja $f \in B(V)$ e suponhamos que $f(e_i, e_j) = a_{ij}$. Dizemos que $f = \sum a_{ij} f_{ij}$. É suficiente mostrar que $f(e_s, e_t) = (\sum a_{ij} f_{ij})(e_s, e_t)$, $s, t = 1, \dots, n$. Temos

$$(\sum a_{ij} f_{ij})(e_s, e_t) = \sum a_{ij} f_{ij}(e_s, e_t) = \sum a_{ij} \phi_i(e_s) \phi_j(e_t) = \sum a_{ij} \delta_{is} \delta_{jt} = a_{st} = f(e_s, e_t).$$

Logo, $\{f_{ij}\}$ gera $B(V)$.

Falta mostrar que $\{f_{ij}\}$ é l.i. Suponhamos $\sum a_{ij} f_{ij} = 0$. Então, para

$$s, t = 1, \dots, n, \quad 0 = 0(e_s, e_t) = (\sum a_{ij} f_{ij})(e_s, e_t) = a_{st}$$

Logo, $\{f_{ij}\}$ é l.i.

FORMAS BILINEARES E MATRIZES

Seja f uma forma bilinear em V e seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base de V . Suponhamos que $u, v \in V$ e que

$$u = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n, \quad v = b_1 e_1 + \dots + b_n e_n$$

Então,

$$\begin{aligned} f(u, v) &= f(a_1 e_1 + \dots + a_n e_n, b_1 e_1 + \dots + b_n e_n) \\ &= a_1 b_1 f(e_1, e_1) + a_1 b_2 f(e_1, e_2) + \dots + a_n b_m f(e_n, e_n) \\ &= \sum_{i, j=1}^n a_i b_j f(e_i, e_j) \end{aligned}$$

Assim, f é determinada completamente pelos n^2 valores $f(e_i, e_j)$.

A matriz $A = (a_{ij})$ onde $a_{ij} = f(e_i, e_j)$ é chamada a representação matricial de f em relação à base $\{e_i\}$, ou a matriz de f em $\{e_i\}$. Ou seja,

$$f(u, v) = \sum a_i b_j f(e_i, e_j) = (a_1, \dots, a_n) A \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = [u]_e^t A [v]_e, \quad \forall u, v \in V.$$

FORMAS BILINEARES

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo K . Uma forma bilinear em V é uma transformação $f: V \times V \rightarrow K$ que satisfaz

$$(i) f(a_1 u_1 + b u_2, v) = a f(u_1, v) + b f(u_2, v)$$

$$(ii) f(u, a v_1 + b v_2) = a f(u, v_1) + b f(u, v_2)$$

Para quaisquer $a, b \in K$ e quaisquer $u_i, v_i \in V$. Expressamos a condição (i) dizendo f é linear na primeira variável e a condição (ii) dizendo que f é linear na segunda variável.

8836 9764
9149 5465

Exemplo 1: Sejam ϕ e σ funcionais lineares arbitrários em V . Seja $f: V \times V \rightarrow K$ definida por $f(u, v) = \phi(u)\sigma(v)$. Então, f é bilinear, por que ϕ e σ o são. (Esta forma bilinear f é o produto tensorial de ϕ e σ , e escrevemos $f = \phi \otimes \sigma$.)

Exemplo 2: O produto interno no $\mathbb{R}^n$, isto é, $f(u, v) = u \cdot v = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$. f é uma forma bilinear em $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 3: Seja $A = (a_{ij})$ matriz $n \times n$ sobre K . Então, A pode ser encarada como uma forma bilinear f em K^n definindo

$$f(x, y) = x^t A y = (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i y_j = a_{11} x_1 y_1 + a_{12} x_1 y_2 + \dots + a_{nn} x_n y_n.$$

Denotemos por $B(V) = \{ f: V \times V \rightarrow K, \text{ formas bilineares} \}$. Definindo

$f+g \in Kf$ por

$$(f+g)(u, v) = f(u, v) + g(u, v)$$

$$(kf)(u, v) = k f(u, v)$$

$\forall f, g \in B(V), \forall k \in K$ obtemos uma estrutura de espaço vetorial para $B(V)$.

(21)

TEOREMA ESPECTRAL

TEOREMA ESPECTRAL. Seja T um operador normal (simétrico) num espaço complexo (real), com produto interno, de dimensão finita V . Então, existem projeções ortogonais $E_1, \dots, E_r$ em V e escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ tais que:

$$(i) \quad T = \lambda_1 E_1 + \dots + \lambda_r E_r,$$

$$(ii) \quad E_1 + E_2 + \dots + E_r = I,$$

$$(iii) \quad E_i E_j = 0 \text{ para } i \neq j.$$

Prova: Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ autovalores distintos de T e sejam $W_1, \dots, W_r$ os autoespaços associados a $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, respectivamente. E considere $E_1, \dots, E_r$ as projeções ortogonais de V sobre $W_1, \dots, W_r$, respectivamente. Seja α um vetor de W_j , e β um vetor em W_i e suponhamos $i \neq j$. Então

$$c_j \langle \alpha, \beta \rangle = \langle T\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, T^* \beta \rangle = \langle \alpha, \bar{c}_i \beta \rangle$$

Logo, $(c_j - \bar{c}_i) \langle \alpha, \beta \rangle = 0$ e como $c_i \neq \bar{c}_j$, segue que $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$. Assim W_i é ortogonal a W_j , $i \neq j$. Dos Teoremas anteriores sobre operadores normais e simétricos V possui uma base ortonormal formada de vetores característicos, segue-se que:

$V = W_1 + \dots + W_r$. Como W_i é ortogonal a W_j $i \neq j$ então $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_r$.

Portanto, $E_1 + \dots + E_r = I$ e

$$\begin{aligned} T &= TE_1 + \dots + TE_r \\ &= c_1 E_1 + \dots + c_r E_r. \end{aligned}$$

Exemplo: Consideremos uma matriz diagonal

$$A = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 3 & \\ & & 3 \\ & & & 5 \end{pmatrix}$$

Sejam

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

E_i são projeções, isto é, $E_i^2 = E_i$, e

$$(i) \quad A = 2E_1 + 3E_2 + 5E_3, \quad (ii) \quad E_1 + E_2 + E_3 = I, \quad (iii) \quad E_i E_j = 0, \quad i \neq j.$$

$$E_i E_j = 0?$$

$$E_i(v) = v, \quad v \in W_i$$

$$E_j(v) = 0, \quad v \in W_i$$

$$E_i E_j(v) = E_i(v_j) = E_i(\alpha + 0 + 0 + \dots) = 0.$$

(20)

Teorema 2: Seja T um operador arbitrário num espaço complexo com $\dim V$ finita. Então, T pode ser representado por uma matriz triangular em relação a uma base ortonormal de V .

Forma alternativa do Teo. 2: Seja A uma matriz complexa arbitrária. Então existe uma matriz unitária P tal que $B = P^T A P = P^* A P$ é triangular.

Em outras palavras, se $\{u_1, \dots, u_n\}$ é base ortonormal de V então

$$Tu_i = a_{i1}u_1 + \dots + a_{ii}u_i.$$

Demonstração: Indução sobre $\dim V$. Se $\dim V = 1$, então o teorema vale. Suponhamos $\dim V = n > 1$. Como V é um espaço vetorial complexo, T tem, ao menos, um autovalor, e pelo menos um autovetor v não-nulo. Seja W o subespaço de V gerado por v e seja u_1 um autovetor unitário de W . Então, $Tu_1 = a_{11}u_1$.

Temos que $V = W^\perp \oplus W$. Denotemos por E a projeção ortogonal de V em $W^\perp$. $W^\perp$ é invariante sob ET . Por indução, existe uma base ortonormal $\{u_2, \dots, u_n\}$ de $W^\perp$ tal que, para $i = 2, \dots, n$

$$ET(u_i) = a_{i2}u_2 + \dots + a_{ii}u_i.$$

(Note que $\{u_1, \dots, u_n\}$ é uma base ortonormal de V .) Mas E é a projeção ortogonal de V em $W^\perp$; portanto, devemos ter

$$T(u_i) = a_{i1}u_1 + a_{i2}u_2 + \dots + a_{ii}u_i.$$

para $i = 2, \dots, n$. Como $T(u_1) = a_{11}u_1$, temos o resultado esperado. $\square$

$$v = w' + w, \quad w' \in W^\perp, w \in W$$

$$\left. \begin{aligned} E: V &\rightarrow W^\perp \\ v &\mapsto E(v) = w' \end{aligned} \right\}$$

$$T: V \rightarrow V \quad \text{tome } v \in W^\perp \Rightarrow Tv \in V \text{ e, portanto, } E(Tv) \in W^\perp.$$

$$T(u_i) = a_{i1}u_1 + \dots + a_{ii}u_i + \dots + a_{in}u_n$$

$$I = I - E + E$$

$$T = (I - E)T + ET$$

$$Tu_i = \underbrace{(I - E)T(u_i)}_{u_i} + \underbrace{ET(u_i)}_{a_{i2}u_2 + \dots + a_{ii}u_i}$$

$$\operatorname{Im}(I - E) = \operatorname{Nuc}(E)$$

$$\operatorname{Nuc}(E) = [u_1]$$

$$\operatorname{Nuc}(E) = \{ \lambda u_1, \lambda \in \mathbb{K} \}$$

$$E(u_i) = 0, \quad u_i \in \operatorname{Nuc}(E)$$

(21)

TEOREMA ESPECTRAL

TEOREMA ESPECTRAL. Seja T um operador normal (simétrico) num espaço complexo (real), com produto interno, de dimensão finita V . Então, existem projeções ortogonais $E_1, \dots, E_r$ em V e escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ tais que:

$$(i) \quad T = \lambda_1 E_1 + \dots + \lambda_r E_r,$$

$$(ii) \quad E_1 + E_2 + \dots + E_r = I,$$

$$(iii) \quad E_i E_j = 0 \text{ para } i \neq j.$$

Prova: Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ autovalores distintos de T e sejam $W_1, \dots, W_r$ os autoespaços associados a $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, respectivamente. E considere $E_1, \dots, E_r$ as projeções ortogonais de V sobre $W_1, \dots, W_r$, respectivamente. Seja α um vetor de W_j , e β um vetor em W_i e suponhamos $i \neq j$. Então

$$c_j \langle \alpha, \beta \rangle = \langle T\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, T^* \beta \rangle = \langle \alpha, c_i \beta \rangle$$

Logo, $(c_j - c_i) \langle \alpha, \beta \rangle = 0$ e como $c_i \neq c_j$, segue que $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$. Assim W_i é ortogonal a W_j , $p/ i \neq j$. Dos Teoremas anteriores sobre operadores normais e simétricos V possui uma base ortonormal formada de vetores característicos, segue-se que:

$V = W_1 + \dots + W_r$. Como W_i é ortogonal a W_j $p/ i \neq j$ então $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_r$.

Portanto, $E_1 + \dots + E_r = I$ e

$$\begin{aligned} T &= T E_1 + \dots + T E_r \\ &= c_1 E_1 + \dots + c_r E_r. \end{aligned}$$

Exemplo: Consideremos uma matriz diagonal

$$A = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 3 & \\ & & 3 \\ & & & 5 \end{pmatrix}$$

Sejam

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

E_i são projeções, isto é, $E_i^2 = E_i$, e

$$(i) \quad A = 2E_1 + 3E_2 + 5E_3, \quad (ii) \quad E_1 + E_2 + E_3 = I, \quad (iii) \quad E_i E_j = 0, \quad i \neq j.$$

$$\left(\begin{array}{l} E_i E_j = 0? \\ E_i(v) = v_i, \quad v_i \in W_i \\ E_j(v) = v_j, \quad v_j \in W_j \\ E_i E_j(v) = E_i(v_j) = E_i(\alpha_1 + 0 + \alpha_j + \dots + \alpha_r) \\ = 0. \end{array} \right)$$

(20)

Teorema 2: Seja T um operador arbitrário num espaço complexo com p.i., dim. finita V . Então, T pode ser representado por uma matriz triangular em relação a uma base ortonormal de V .

Forma alternativa do Teo. 2: Seja A uma matriz complexa arbitrária. Então existe uma matriz unitária P tal que $B = P^{-1}AP = P^*AP$ é triangular.

Em outras palavras, se $\{u_1, \dots, u_n\}$ é base ortonormal de V então

$$Tu_i = a_{i1}u_1 + \dots + a_{ii}u_i.$$

Demonstração: Indução sobre $\dim V$. Se $\dim V = 1$, então o teorema vale. Suponhamos $\dim V = n > 1$. Como V é um espaço vetorial complexo, T tem, ao menos, um autovalor, e pelo menos um autovetor v não-nulo. Seja W o subespaço de V gerado por v e seja u_1 um autovetor unitário de W . Então, $Tu_1 = a_{11}u_1$.

Temos que $V = W^\perp \oplus W$. Denotemos por E a projeção ortogonal de V em $W^\perp$. $W^\perp$ é invariante sob ET . Por indução, existe uma base ortonormal $\{u_2, \dots, u_n\}$ de $W^\perp$ tal que, para $i = 2, \dots, n$

$$ET(u_i) = a_{i2}u_2 + \dots + a_{ii}u_i.$$

(Note que $\{u_1, \dots, u_n\}$ é uma base ortonormal de V .) Mas E é a projeção ortogonal de V em $W^\perp$; portanto, devemos ter

$$T(u_i) = a_{i1}u_1 + a_{i2}u_2 + \dots + a_{ii}u_i.$$

para $i = 2, \dots, n$. Como $T(u_1) = a_{11}u_1$, temos o resultado esperado. $\square$

$$v = w' + w, \quad w' \in W^\perp, \quad w \in W$$

$$\left. \begin{aligned} E: V &\rightarrow W^\perp \\ v &\mapsto E(v) = w' \end{aligned} \right\}$$

$$T: V \rightarrow V \quad \text{tome } v \in W^\perp \Rightarrow Tv \in V \text{ e, portanto, } E(Tv) \in W^\perp.$$

$$T(u_i) = a_{i1}u_1 + \dots + a_{ii}u_i + \dots + a_{in}u_n$$

$$E(u_i) = 0, \quad u_i \in N(E)$$

$$\operatorname{Im}(I - E) = \operatorname{Nuc}(E)$$

$$\operatorname{Nuc}(E) = \{u_i\}$$

$$\operatorname{Nuc}(E) = \{\lambda u_i, \lambda \in \mathbb{C}\}$$

$$I = I - E + E$$

$$T = (I - E)T + ET$$

$$Tu_i = \underbrace{(I - E)T(u_i)}_{= 0} + ET(u_i) = a_{i2}u_2 + \dots + a_{ii}u_i$$

DIAGONALIZAÇÃO E FORMAS CANÔNICAS EM ESPAÇOS UNITÁRIOS

Um operador T é normal se ele comuta com seu adjunto, isto é, $T^*T = TT^*$. Analogamente, dizemos que uma matriz complexa A é normal se ela comuta com sua transposta conjugada, isto é, $AA^* = A^*A$.

Exemplo: Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & 3+2i \end{pmatrix}$. Então

$$AA^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & 3+2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ +1 & 3-2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3-3i \\ 3+3i & 14 \end{pmatrix}$$

$$A^*A = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & 3-2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & 3+2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3-3i \\ 3+3i & 14 \end{pmatrix}$$

Assim, A é normal.

$$\begin{cases} \langle \lambda_0 u, u \rangle = \langle Tu, u \rangle = \langle u, T^*u \rangle \\ \langle u, \bar{\lambda}u \rangle = \langle u, T^*u \rangle, \forall u \\ \langle T^*u - \bar{\lambda}u, u \rangle = 0, \forall u \Rightarrow T^*u = \bar{\lambda}u \end{cases}$$

Teorema 1. Seja T um operador normal num espaço complexo, com produto interno, de dimensão finita V . Então existe uma base ortonormal de V consistindo de autovetores de T ; isto é, T pode ser representado por uma matriz diagonal em relação a uma base ortonormal.

Forma Alternativa do Teorema 1. Seja A uma matriz normal. Então existe uma matriz unitária P tal que $B = P^*AP = P^*AP$ é diagonal.

Demonstração do Teorema 1: Indução sobre $\dim V$. Se $\dim V = 1$, então o teorema vale trivialmente. Agora, suponha, $\dim V = n > 1$.

Como V é um espaço complexo, T tem, ao menos, um autovetor e, portanto, um autovetor não-nulo. Seja W o subespaço de V gerado por v e seja u_1 um vetor unitário de W .

Como $Tv = \lambda v$ então W é invariante sob T . Entretanto, v é também autovetor de T^* ; portanto, W é também invariante sob T^* . $W^\perp$ é invariante sob $T^{**} = T$. A demonstração segue igual a última parte da demonstração do

Teo. p/ op. simétricas num espaço real. Note que se T é normal então $UU^* = U^*U$ e $\|U\alpha\|^2 = \|U^*\alpha\|^2$ pois

Como T é normal então $U = T - \bar{\lambda}I$ é normal onde $U^* = T^* - \lambda I$, assim $0 = \|(T - \bar{\lambda}I)\alpha\| = \|(T^* - \lambda I)\alpha\|$

$$\begin{aligned} \|U\alpha\|^2 &= \langle U\alpha, U\alpha \rangle = \langle \alpha, U^*U\alpha \rangle = \langle \alpha, UU^*\alpha \rangle \\ &= \langle U^*\alpha, U^*\alpha \rangle = \|U^*\alpha\|^2 \end{aligned}$$

Observação: $T: V \rightarrow V$ e $t, m_1, \dots, m_t$ e B são dados pelo teo. acima, temos que

$$[T]_B = \begin{bmatrix} J_{m_1}(0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{m_2}(0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{m_t}(0) \end{bmatrix}$$

onde

$$J_{m_i}(0) = [T|_{W_i}]_{B_i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} = N$$

Bloco de Jordan $r \times r$ em $\mathbb{C}$ é a matriz $J_r(c) \in M_{r \times r}(\mathbb{C})$

$$J_r(c) = \begin{bmatrix} c & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & c & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & c & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & c \end{bmatrix}.$$

(3)

Observações: Seja $T: V \rightarrow V$ um operador linear, onde V é um espaço vetorial de dimensão $n \geq 1$.

(a) Suponha que T seja nilpotente de índice de nilpotência $m \geq 1$. É claro que $m \leq n$ (Se não $B = [v, Tv, \dots, T^{m-1}v]$ é L.I e $\dim W > n$, $W = [v, \dots, T^m v]$ absurdo!)

Além disso, como $T^{m-1} \neq 0$, existe $v \in V$ tal que $T^{m-1}(v) \neq 0$. Se $n = m$, segue do Teo. ant. que $B = \{v, Tv, \dots, T^{m-1}(v)\}$ é uma base de V . Com relação a esta base,

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Sup. $p_T(x) = (x - \lambda)^n$. Neste caso, o op. $(T - \lambda I)$ será nilpotente. Se seu índice de nilpotência for n então pelo item (a), existe B t. a:

$$= [T]_B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix} = A$$

$$[T]_B - \lambda [I]_B = [T - \lambda I]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} = N$$

$$[T]_B = N + \lambda [I]_B =$$

Pelo teo. 13.2, $V_i = W \oplus W^\perp$. Além disso, pelo prob. 13.24, $W^\perp$ também é invariante sob T . Assim, podemos decompor V_i na soma direta de subespaços bidimensionais W_i , onde as W_i são ortogonais uns aos outros e cada W_i é invariante sob T . Assim podemos restringir ao modo pelo qual T atua em cada W_i individualmente.

Como $T^2 - \lambda_i T + I = 0$, o polinômio característico $p_T(t)$, de T agindo em W_i , é $p_T(t) = t^2 - \lambda_i t + 1$. Assim, o determinante de T é 1, o termo constante em $p_T(t)$.

Pelo Prob. 13.30, a matriz A que representa T atuando em W_i em relação a qualquer base ortonormal de W_i deve ser da forma

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

A união das bases de W_i dá uma base ortonormal de V e a união das bases de V_i dá uma base ortonormal de V , na qual a matriz que representa T tem a forma desejada.

Prob. 13.24 $W^\perp$ é invariante sob T .

$T(W) = W \Rightarrow \forall w \in W, \exists w' \in W: Tw' = w$. Seja $v \in W^\perp$. Então $\forall w \in W$

$$\langle Tv, w \rangle = \langle Tv, Tw' \rangle = \langle v, w' \rangle = 0$$

Logo, $Tv \in W^\perp$. $W^\perp$ é invariante sob T .

Prob. 13.30 Toda matriz A ortogonal de ordem 2 para a qual $\det A = 1$ é da forma

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \text{ p/ algum } \theta.$$

Suponha $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Como A é ortogonal, suas linhas formam um conj. ortonormal; portanto,

$$a^2 + b^2 = 1, c^2 + d^2 = 1, ac + bd = 0, ad - bc = 1.$$

$$\text{Caso } a = 0 \Rightarrow b^2 = 1 \Rightarrow b = \pm 1 \Rightarrow c = -b = \mp 1 \text{ e } 1 + d^2 = 1 \Rightarrow d = 0.$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow \theta = \pi/2, \quad \Downarrow \theta = 3\pi/2.$$

Caso $a \neq 0$, a terceira eq. $c = -\frac{bd}{a}$, substituindo na 2ª eq.

$$\frac{b^2 d^2}{a^2} + d^2 = 1 \text{ ou } b^2 d^2 + a^2 d^2 = a^2 \text{ ou } (b^2 + a^2) d^2 = a^2 \text{ ou } d^2 = \frac{a^2}{a^2 + b^2} \Rightarrow a = d \text{ ou } a = -d$$

a 3ª eq. $c = b$ e a eq. $-a^2 - c^2 = 1$, impossível, $a = d$ e $b = -c$ e obtemos $A = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}$

Como $a^2 + c^2 = 1, \exists \theta: a = \cos \theta, c = \sin \theta$.

(17)

Um operador ortogonal T não precisa ser simétrico. Mas tal operador pode ter uma representação canônica simples.

Teorema 2: Seja T um operador ortogonal num espaço com produto interno V . Então, existe uma base ortogonal com relação à qual T tem a forma

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & -1 \\ & & & & & & \begin{matrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{matrix} \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & \begin{matrix} \cos \theta_r & -\sin \theta_r \\ \sin \theta_r & \cos \theta_r \end{matrix} \end{pmatrix}.$$

Prova: Seja $S = T + T^{-1} = T + T^*$. Então $S^* = (T + T^*)^* = T^* + T = S$. Assim S é um operador simétrico em V . Pelo Teorema 1, existe uma base ortonormal de V , consistindo de autovetores de S . Se $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ denotam os autovalores distintos de S , então V pode ser decomposto na soma direta $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_m$, onde os V_i consistem nos autovetores de S associados a λ_i . Cada V_i é invariante sob T . De fato, suponhamos $v \in V_i$; então $S(v) = \lambda_i v$ e

$$S(Tv) = (T + T^{-1})Tv = T(T + T^{-1})v = T(Sv) = T(\lambda_i v) = \lambda_i Tv$$

Isto é, $Tv \in V_i$. Logo, V_i é invariante sob T . Como os V_i são ortogonais uns aos outros, podemos restringir nossa investigação ao modo pela qual T atua em cada V_i individualmente. Num dado V_i , $(T + T^{-1})(v) = Sv = \lambda_i v$. Multiplicando por T ,

$$(T^2 - \lambda_i T + I)(v) = 0$$

Consideremos os casos $\lambda_i = \pm 2$ e $\lambda_i \neq \pm 2$.

Se $\lambda_i = \pm 2$ então $(T \pm I)^2(v) = 0$, o que conduz a $(T \pm I)(v) = 0$ ou $Tv = \pm v$. Assim, T restrito a esse V_i é ou I ou $-I$. Se $\lambda_i \neq \pm 2$, então T não tem autovetores em V_i , pois pelo Teo. 13.8, os únicos autovetores de T são 1 e -1 . De acordo com isso, para $v \neq 0$ os vetores v e Tv são l.i. Seja W o subespaço gerado por v e Tv . Então, W é invariante sob T , pois

$$T(Tv) = T^2(v) = \lambda_i T(v) - v$$

46

Exemplo: Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$. Encontramos uma matriz ortogonal P tal que $P^t A P$ é diagonal. O polinômio característico $p_T(t)$ de A é

$$p_T(t) = \det |tI - A| = \begin{vmatrix} t-2 & -2 \\ -2 & t-5 \end{vmatrix} = (t-6)(t-1)$$

Os autovalores de A são $\lambda_1 = 6$ e $\lambda_2 = 1$. Para $\lambda_1 = 6$, encontramos $v_1 = (1, -2)$.

A seguir, substitua $\lambda_2 = 1$ p/ obter $v_2 = (2, 1)$. v_1 e v_2 são ortogonais.

Normalizando v_1 e v_2 obtemos:

$$u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right), \quad u_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

e $\{u_1, u_2\}$ é base ortonormal de $\mathbb{R}^2$. Seja P a matriz cujas colunas são u_1 e u_2 , respectivamente. Então

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \quad P^t A P = P^t A P = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Não

Exemplo: Encontre uma transformação ortogonal de coordenadas que diagonalize a forma quadrática

$$q(x, y) = 2x^2 - 4xy + 5y^2 = (x, y) \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

A é a matriz de q . No exemplo precedente, encontramos

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \quad P^t A P = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matriz ortogonal tal que $P^t A P$ é uma matriz diagonal. Assim a transformação requerida é

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \text{ isto é, } \begin{aligned} x &= \frac{x'}{\sqrt{5}} + \frac{2y'}{\sqrt{5}} \\ y &= -\frac{2x'}{\sqrt{5}} + \frac{y'}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

e q é transformada em:

$$q(x', y') = 6x'^2 + y'^2.$$

DIAGONALIZAÇÃO E FORMAS CANÔNICAS EM ESPAÇOS EUCLIDEANOS

Seja $T: V \rightarrow V$ um op. linear, V espaço com p.i. $\dim V < \infty$. A representação de T por uma matriz diagonal depende dos autovetores e autovalores de T , e, portanto, das raízes do polinômio característico $p_T(t)$ de T . Mas $p_T(t)$ sempre se fatora em polinômios lineares sobre o corpo $\mathbb{C}$, porém não pode sempre conter fatores lineares sobre $\mathbb{R}$. Por isso, vamos diferenciar o tratamento para espaços euclidianos ($K = \mathbb{R}$) dos espaços unitários ($K = \mathbb{C}$).

Teorema 1: Seja T um operador simétrico (auto-adjunto) num espaço real, de dimensão finita, com p.i. V . Então existe uma base ortonormal de V consistindo de auto-vetores de T ; isto é, T pode ser representado por uma matriz diagonal em relação a uma base ortonormal.

Forma Alternativa do Teorema 1: Seja A uma matriz simétrica real. Então, existe uma matriz ortogonal P tal que $B = P^T A P = P^T A P$ é diagonal.

Prova: Demonstração por indução sobre a $\dim V$. Se $\dim V = 1$, o teorema vale trivialmente. Suponhamos, agora, $\dim V = n > 1$. Seja A uma matriz que represente T em relação a uma base ortonormal de V ; então $A = A^T$. Seja $p_T(t)$ o polinômio característico de A . Encarando A como um operador auto-adjunto complexo, A tem somente autovalores reais (Teo. segão anterior). Assim

$$p_T(t) = (t - \lambda_1) \dots (t - \lambda_n)$$

Onde os λ_i são todos reais. Como T tem ao menos um autovalor (real), então T tem um autovetor v_1 não-nulo. Seja W o espaço gerado por v_1 e seja u_1 um vetor unitário em W . Como v_1 é um autovetor de T , o subespaço W de V é invariante sob T . Não é difícil ver que $W^\perp$ é invariante sob $T^* = T$. Assim a restrição $\hat{T} = T|_{W^\perp}$ é um operador simétrico. Temos que $V = W \oplus W^\perp$. Portanto, $\dim W^\perp = n - 1$, pois $\dim W = 1$. Por indução, existe uma base ortonormal $\{u_2, \dots, u_n\}$ de $W^\perp$ consistindo de autovetores de $\hat{T}$, e, portanto, de T . Mas $\langle u_1, u_i \rangle = 0$, $i = 2, \dots, n$. Logo, $\{u_1, \dots, u_n\}$ é um conj. ortonormal e consiste de autovetores de T .

$$\begin{aligned} v \in W^\perp, W = [v_1] \\ T^* v \in W^\perp, w \in W \\ \langle T^* v, w \rangle &= \langle v, T w \rangle \\ &= \langle v, \lambda_1 w \rangle = 0 \end{aligned}$$

46

Exemplo: Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$. Encontramos uma matriz ortogonal P tal que $P^t A P$ é diagonal. O polinômio característico $p_T(t)$ de A é

$$p_T(t) = \det |tI - A| = \begin{vmatrix} t-2 & -2 \\ -2 & t-5 \end{vmatrix} = (t-6)(t-1)$$

Os autovalores de A são $\lambda_1 = 6$ e $\lambda_2 = 1$. Para $\lambda_1 = 6$, encontramos $v_1 = (1, -2)$.

A seguir, substitua $\lambda_2 = 1$ p/ obter $v_2 = (2, 1)$. v_1 e v_2 são ortogonais.

Normalizando v_1 e v_2 obtemos:

$$u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right), \quad u_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

e $\{u_1, u_2\}$ é base ortonormal de $\mathbb{R}^2$. Seja P a matriz cujas colunas são u_1 e u_2 , respectivamente. Então

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad P^t A P = P^t A P = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Não

Exemplo: Encontre uma transformação ortogonal de coordenadas que diagonalize a forma quadrática

$$q(x, y) = 2x^2 - 4xy + 5y^2 = (x, y) \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

A é a matriz de q . No exemplo precedente, encontramos

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \quad P^t A P = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matriz ortogonal tal que $P^t A P$ é uma matriz diagonal. Assim a transformação requerida é

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \text{isto é,} \quad \begin{aligned} x &= \frac{x'}{\sqrt{5}} + \frac{2y'}{\sqrt{5}} \\ y &= -\frac{2x'}{\sqrt{5}} + \frac{y'}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

e q é transformada em:

$$q(x', y') = 6x'^2 + y'^2.$$

DIAGONALIZAÇÃO E FORMAS CANÔNICAS EM ESPAÇOS EUCLIDEANOS

Seja $T: V \rightarrow V$ um op. linear, V espaço com p.i. $\dim V < \infty$. A representação de T por uma matriz diagonal depende dos autovetores e autovalores de T , e, portanto, das raízes do polinômio característico $p_T(t)$ de T . Mas $p_T(t)$ sempre se fatora em polinômios lineares sobre o corpo $\mathbb{C}$, porém não pode sempre conter fatores lineares sobre $\mathbb{R}$. Por isso, vamos diferenciar o tratamento para espaços euclidianos ($K = \mathbb{R}$) dos espaços unitários ($K = \mathbb{C}$).

Teorema 1: Seja T um operador simétrico (auto-adjunto) num espaço real, de dimensão finita, com p.i. V . Então existe uma base ortonormal de V consistindo de auto-vetores de T ; isto é, T pode ser representado por uma matriz diagonal em relação a uma base ortonormal.

Forma Alternativa do Teorema 1: Seja A uma matriz simétrica real. Então, existe uma matriz ortogonal P tal que $B = P^{-1}AP = P^tAP$ é diagonal.

Prova: Demonstração por indução sobre a $\dim V$. Se $\dim V = 1$, o teorema vale trivialmente. Suponhamos, agora, $\dim V = n > 1$. Seja A uma matriz que represente T em relação a uma base ortonormal de V ; então $A = A^t$. Seja $p_T(t)$ o polinômio característico de A . Encarando A como um operador auto-adjunto complexo, A tem somente autovalores reais (teo. seq. anterior). Assim

$$p_T(t) = (t - \lambda_1) \dots (t - \lambda_r)$$

Onde os λ_i são todos reais. Como T tem ao menos um autovalor (real), então T tem um autovetor v_1 não-nulo. Seja W o espaço gerado por v_1 e seja u_1 um vetor unitário em W . Como v_1 é um autovetor de T , o subespaço W de V é invariante sob T . Não é difícil ver que $W^\perp$ é invariante sob $T^* = T$. Assim a restrição $\hat{T} = T|_{W^\perp}$ é um operador simétrico. Temos que $V = W \oplus W^\perp$. Portanto, $\dim W^\perp = n-1$, pois $\dim W = 1$. Por indução, existe uma base ortonormal $\{u_2, \dots, u_n\}$ de $W^\perp$ consistindo de autovetores de $\hat{T}$, e, portanto, de T . Mas $\langle u_i, u_i \rangle = 0$, $i = 2, \dots, n$. Logo, $\{u_1, \dots, u_n\}$ é um conj. ortonormal e consiste de autovetores de T .

$$\begin{aligned} v \in W^\perp, W = [v_1] \\ T^*v \in W^\perp, w \in W \\ \langle T^*v, w \rangle = \langle v, Tw \rangle \\ = \langle v, \lambda_1 w \rangle = 0 \end{aligned}$$

MUDANÇAS DE BASE ORTONORMAIS

Teo.: Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ base ortonormal de um esp. com p.i. V . Então a matriz de transição de $\{e_i\}$ para outra base ortonormal é unitária (ortogonal). Reciprocamente, se $P = (a_{ij})$ é uma matriz unitária (ortogonal), então a seguinte base é ortonormal

$$\{e'_i = a_{i1}e_1 + a_{i2}e_2 + \dots + a_{in}e_n : i = 1, \dots, n\}$$

Prova: $\langle e'_i, e'_j \rangle = a_{i1}\bar{a}_{j1} + a_{i2}\bar{a}_{j2} + \dots + a_{in}\bar{a}_{jn} = \langle C_i, C_j \rangle$

onde C_i denota a i -ésima coluna da matriz unitária (ortogonal) $P = (a_{ij})$. Pelo Teo. anterior, as colunas de P são ortonormais; portanto $\langle e'_i, e'_j \rangle = \langle C_i, C_j \rangle = \delta_{ij}$. Assim $\{e'_i\}$ é base ortonormal.

Definição: Matrizes complexas A, B são unitariamente equivalentes se existe uma matriz unitária P para a qual $B = P^*AP$. Analogamente, matrizes reais A e B são ortogonalmente equivalentes se $\exists P$ matriz ortogonal tal que $B = P^tAP$.

OPERADORES POSITIVOS

Seja P um operador linear num espaço com p.i. V . Diz-se que P é positivo (ou semi-definido) se

$$P = S^*S \text{ para algum operador } S$$

e diz-se que P é definido positivo se S é também não-singular.

Teorema: As seguintes condições sobre um operador P são equivalentes:

- (i) $P = T^2$ para algum operador T auto-adjunto. (P definido positivo: então T é não-singular)
- (ii) $P = S^*S$ para algum operador S . (S não-singular)
- (iii) P é auto-adjunto e $\langle Pu, u \rangle \geq 0$ para todo $u \in V$. ($\langle Pu, u \rangle > 0, \forall u \neq 0$)

(13)

MATRIZES ORTOGONAIS E UNITÁRIAS

Seja U um op. linear num esp. com p.i. V . Se $IK = \mathbb{C}$.

Teorema: Uma matriz A com elementos complexos representa um op. unitário U (em relação a uma base ortonormal) se, e somente se, $A^* = A^{-1}$.

Por outro lado, se $IK = \mathbb{R}$ então $A^* = A^t$ e o teorema correspondente para espaços com p.i. reais é:

Teorema: Uma matriz A com elementos reais representa um op. ortogonal (em relação a uma base ortonormal) se, e somente se, $A^t = A^{-1}$.

Definição: Uma matriz complexa, para a qual $A^* = A^{-1}$ ou, equivalentemente, $A^*A = AA^* = I$, é chamada matriz unitária.

Definição: Uma matriz real A , para a qual $A^t = A^{-1}$ ou, equivalentemente, $A^tA = AA^t = I$ é chamada matriz ortogonal.

Observe que uma matriz unitária com elementos reais é ortogonal.

Ex.: Sup. $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$ é uma matriz unitária. Então $A^*A = I$, portanto,

$$AA^* = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a}_1 & \bar{b}_1 \\ \bar{a}_2 & \bar{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a_1|^2 + |a_2|^2 & a_1\bar{b}_1 + a_2\bar{b}_2 \\ \bar{a}_1b_1 + \bar{a}_2b_2 & |b_1|^2 + |b_2|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$|a_1|^2 + |a_2|^2 = 1, |b_1|^2 + |b_2|^2 = 1, a_1\bar{b}_1 + a_2\bar{b}_2 = 0$$

Assim as linhas de A formam um cov. ortonormal. Semelhantemente, A^*A faz as colunas de A a formarem um cov. ortonormal.

Teorema: As seguintes condições p/ A são equivalentes:

- (i) A é unitária (ortogonal).
- (ii) As linhas de A formam um cov. ortonormal.
- (iii) As colunas de A formam um cov. ortonormal.

Ex.: A matriz A , da rotação dada no exemplo acima em relação à base canônica é

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

OPERADORES ORTOGONAIS E UNITÁRIOS

Seja U um operador linear num espaço com p.i. $\dim V < \infty$. Sabemos que se

$$U^* = U^{-1} \text{ ou } UU^* = U^*U = I$$

então U é ortogonal ou unitário conforme o corpo seja real ou complexo.

Teorema: As seguintes condições para um op. linear U são equivalentes:

a) $U^* = U^{-1}$, isto é, $UU^* = U^*U = I$

b) U preserva p.i., isto é, $\forall u, v \in V$

$$\langle U(u), U(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

c) U preserva comprimentos, isto é, $\forall v \in V$

$$\|U(v)\| = \|v\|.$$

Prova: (i) vale $\Rightarrow \langle U(v), U(w) \rangle = \langle v, U^*Uw \rangle = \langle v, w \rangle$

(ii) vale $\Rightarrow \|U(v)\| = \sqrt{\langle U(v), U(v) \rangle} = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \|v\|$

(iii) vale $\Rightarrow \langle U^*Uv, v \rangle = \langle U(v), U(v) \rangle = \langle v, v \rangle = \langle Iv, v \rangle$

Logo: $\langle (U^*U - I)v, v \rangle = 0, \forall v \in V$. Mas $U^*U - I$ é auto-adjunto, então $U^*U - I = 0 \Rightarrow U^*U = I$.

$$S = U^*U - I$$

$$I^* = I, \quad S^* = S$$

$$\begin{aligned} \langle Su, v \rangle &= \langle u, S^*v \rangle = \langle u, (U^*U - I)^*v \rangle = \\ &= \langle u, (U^*U - I)v \rangle = \langle u, U^*Uv - Iv \rangle = \langle u, U^*Uv \rangle - \langle u, v \rangle = \langle u, v \rangle - \langle u, v \rangle = 0 \end{aligned}$$

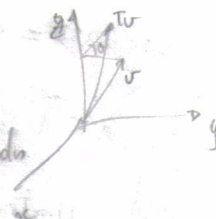
Exemplo: Seja $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ o op. que gira cada vetor em relação ao eixo- z por um ângulo

fixo θ :

$$T(x, y, z) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta, z)$$

Observe que os comprimentos (distâncias à origem) são preservados.

sob T . Assim, T é um op. ortogonal.



Exemplo 2: $V = \ell_2$. $T: V \rightarrow V$, $T(a_1, a_2, \dots) = (0, a_1, a_2, \dots)$. T preserva p.i. e comprimentos. Mas, T não é sobrejetor, pois, $(1, 0, \dots) \notin \text{Im } T$; logo, T não é injetivo. Logo, o Teorema acima não é válido p/ dimensão infinita.

Um isomorfismo de um espaço com p.i. noutro é uma transf. bijetora que preserva as três operações básicas de espaços com p.i.: adição, multiplicação por escalar, e prod. internos. Assim, as transformações dadas (ortogonais ou unitárias) podem também ser caracterizadas como os isomorfismos de V em si mesmo. Note que uma tal transformação preserva distâncias, pois

$$\|U(v) - U(w)\| = \|U(v - w)\| = \|v - w\| \quad (\text{isometria}).$$

TEOREMA: Seja λ um autovalor de um operador linear T em V :

- (i) Se $T^* = T^{-1}$, então $|\lambda| = 1$. (Op. ortogonais (caso real) e unitários (caso complexo)).
- (ii) Se $T^* = T$, então λ é real. (Op. auto-adjuntos simétricos (caso real) ou hermitianos (caso complexo)).
- (iii) Se $T^* = -T$, então λ é imaginário puro. (Op. anti-adjuntos anti-simétricos (real) ou anti-hermitianos (complexo)).
- (iv) Se $T = S^*S$ com S não-singular, então λ é real e positivo. (Op. definidos positivos).

Prova: Em cada caso, seja $v \neq 0$ autovetor de T associado a λ , isto é, $Tv = \lambda v$, $v \neq 0$.

Portanto, $\langle v, v \rangle$ é positivo.

Dem. (i): $\lambda \bar{\lambda} \langle v, v \rangle = \langle v, v \rangle$. De fato,

$$\lambda \bar{\lambda} \langle v, v \rangle = \langle \lambda v, \lambda v \rangle = \langle Tv, Tv \rangle = \langle v, T^*Tv \rangle = \langle v, Iv \rangle = \langle v, v \rangle$$

Como $\langle v, v \rangle \neq 0$; então $\lambda \bar{\lambda} = |\lambda|^2 = 1$, logo, $|\lambda| = 1$.

Dem. (ii): Mostremos que $\lambda \langle v, v \rangle = \bar{\lambda} \langle v, v \rangle$

$$\lambda \langle v, v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \langle Tv, v \rangle = \langle v, T^*v \rangle = \langle v, Tv \rangle = \langle v, \lambda v \rangle = \bar{\lambda} \langle v, v \rangle$$

Logo, $\lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda$ é real.

Dem. (iii): Mostremos que $\lambda \langle v, v \rangle = -\bar{\lambda} \langle v, v \rangle$

$$\lambda \langle v, v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \langle Tv, v \rangle = \langle v, T^*v \rangle = \langle v, -Tv \rangle = \langle v, -\lambda v \rangle = -\bar{\lambda} \langle v, v \rangle$$

Logo, $\lambda = -\bar{\lambda}$ ou $\bar{\lambda} = -\lambda$, logo λ é imaginário puro.

Dem. (iv): Note que, $S(v) \neq 0$, pois S é não-singular, portanto $\langle Sv, Sv \rangle$ é positivo.

Mostremos que $\lambda \langle v, v \rangle = \langle Sv, Sv \rangle$

$$\lambda \langle v, v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \langle Tv, v \rangle = \langle S^*Sv, v \rangle = \langle Sv, Sv \rangle$$

Mas $\langle v, v \rangle$ e $\langle Sv, Sv \rangle$ são positivos; portanto, λ é positivo.

Operadores T tais que $TT^* = T^*T$ são ditos operadores normais.

(10)

Definição: Um operador linear $T: V \rightarrow V$ tem um operador adjunto T^* em V , se $\langle Tu, v \rangle = \langle u, T^*(v) \rangle$, $\forall u, v \in V$.

O Teorema acima afirma que qualquer operador T tem adjunto, se V tem dimensão finita. Mas isso não é nec. verdade se $\dim V = +\infty$.

Exemplo: Seja $T: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ definido por

$$T(x, y, z) = (2x + iy, y - 5iz, x + (1-i)y + 3z)$$

$$[T]_{\text{can}} = \begin{pmatrix} 2 & i & 0 \\ 0 & 1 & -5i \\ 1 & 1-i & 3 \end{pmatrix}$$

Assim

$$[T^*]_{\text{can}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -i & 1 & 1+i \\ 0 & 5i & 3 \end{pmatrix}$$

Desse modo,

$$T^*(x, y, z) = (2x + z, -ix + y + (1+i)z, 5iy + 3z)$$

Teorema: Sejam S e T op. lin. em V e $k \in \mathbb{K}$. Então

- (i) $(S+T)^* = S^* + T^*$ (iii) $(ST)^* = T^*S^*$
 (ii) $(kT)^* = \bar{k}T^*$ (iv) $(T^*)^* = T$

Prova: (i) $\forall u, v \in V$

$$\begin{aligned} \langle u, (S+T)^*v \rangle &= \langle (S+T)u, v \rangle = \langle Su + Tu, v \rangle = \langle Su, v \rangle + \langle Tu, v \rangle = \langle u, S^*v \rangle + \langle u, T^*v \rangle \\ &= \langle u, S^*v + T^*v \rangle = \langle u, (S^* + T^*)v \rangle. \end{aligned}$$

A unicidade do adjunto implica que $(S+T)^* = S^* + T^*$

$$(ii) \langle (kT)u, v \rangle = \langle kTu, v \rangle = k \langle Tu, v \rangle = k \langle u, T^*v \rangle = \langle u, \bar{k}T^*v \rangle = \langle u, (\bar{k}T^*)v \rangle$$

$$\begin{aligned} (iii) \langle u, (ST)^*v \rangle &= \langle (ST)u, v \rangle = \langle S(Tu), v \rangle = \langle Tu, S^*v \rangle = \langle u, T^*(S^*v) \rangle \\ &= \langle u, T^*S^*v \rangle \Rightarrow (ST)^* = T^*S^*. \end{aligned}$$

$$T^* = S$$

$$\begin{aligned} (iv) \langle u, (T^*)^*v \rangle &= \langle u, S^*v \rangle = \langle Su, v \rangle = \langle T^*u, v \rangle = \overline{\langle v, T^*u \rangle} = \overline{\langle Tv, u \rangle} \\ &= \langle u, Tv \rangle \Rightarrow (T^*)^* = T. \end{aligned}$$

(9)

Então, para $i=1, \dots, n$

$$T_u(e_i) = \langle e_i, u \rangle = \langle e_i, \overline{\phi(e_1)}e_1 + \dots + \overline{\phi(e_n)}e_n \rangle = \phi(e_i)$$

Como $T_u(e_i) = \phi(e_i)$ então $T_u = \phi$.

Agora, suponha u' outro vetor em V , para o qual $\phi(v) = \langle v, u' \rangle, \forall v \in V$.

Então, $\langle v, u \rangle = \langle v, u' \rangle$ ou $\langle v, u - u' \rangle = 0$. Tome $v = u - u'$, logo,

$$\langle u - u', u - u' \rangle = 0 \Rightarrow u - u' = 0 \text{ e } u = u'.$$

Teorema: Seja T um operador linear num espaço com p.i., $\dim V < \infty$.

Então $\exists!$ T^* tal que $\langle T(u), v \rangle = \langle u, T^*(v) \rangle \forall u, v \in V$. Além disso,

se A é a matriz de T numa base ortogonal $\{e_i\}$ de V , então a transposta conjugada A^* de A é a matriz de T^* em $\{e_i\}$.

Prova: Definição de T^* : Seja $v \in V$ qquer, fixo. A transformação

$u \mapsto \langle T(u), v \rangle$ é um funcional linear em V . Portanto, pelo Teo.

anterior, $\exists!$ $v' \in V$ tq: $\langle T(u), v \rangle = \langle u, v' \rangle, \forall u \in V$. Definimos:

$T^*: V \rightarrow V$ por $T^*(v) = v'$. Então $\langle T(u), v \rangle = \langle u, T^*(v) \rangle, \forall u, v \in V$.

T^* é linear.

$$\begin{aligned} \langle u, T^*(av_1 + bv_2) \rangle &= \langle T(u), av_1 + bv_2 \rangle = \overline{a} \langle T(u), v_1 \rangle + \overline{b} \langle T(u), v_2 \rangle \\ &= \overline{a} \langle u, T^*(v_1) \rangle + \overline{b} \langle u, T^*(v_2) \rangle = \langle u, aT^*(v_1) + bT^*(v_2) \rangle \end{aligned}$$

Como essa igualdade, vale p/ todo $u \in V$, segue que

$$T^*(av_1 + bv_2) = aT^*(v_1) + bT^*(v_2). \quad T^* \text{ é linear.}$$

$$a_{ij} = \langle T(e_j), e_i \rangle, \quad b_{ij} = \langle T^*(e_j), e_i \rangle$$

$$b_{ij} = \langle T^*(e_j), e_i \rangle = \overline{\langle e_i, T^*(e_j) \rangle} = \overline{\langle T(e_i), e_j \rangle} = \overline{a_{ji}}$$

8
Primeiro, normalizamos v_1 , isto é, fazemos

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Agora, fazemos

$$w_2 = v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1 = (0,1,1) - \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

e, depois, normalizamos w_2 , isto é, fazemos

$$u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

Finalmente, fazemos:

$$\begin{aligned} w_3 &= v_3 - \langle v_3, u_1 \rangle u_1 - \langle v_3, u_2 \rangle u_2 \\ &= (0,0,1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{\sqrt{6}} \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

normalizando w_3 :

$$u_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|} = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

A base ortonormal requerida é:

$$\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\}.$$

FUNCAIONAIS LINEARES E OPERADORES ADJUNTOS

Seja V um espaço com produto interno. Cada $u \in V$ determina uma transformação $T_u: V \rightarrow \mathbb{K}$ por $T_u(v) = \langle v, u \rangle$.

$$T_u(av_1 + bv_2) = \langle av_1 + bv_2, u \rangle = a\langle v_1, u \rangle + b\langle v_2, u \rangle = aT_u(v_1) + bT_u(v_2)$$

ou seja, T_u é linear em V . A recíproca para espaços de dimensão finita é verdadeira.

Teorema: Seja ϕ um funcional linear num espaço com produto interno de dimensão finita V . Então, $\exists! u \in V$ tal que $\phi(v) = \langle v, u \rangle, \forall v \in V$.

Prova: Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base ortonormal de V . Faça

$$u = \overline{\phi(e_1)}e_1 + \dots + \overline{\phi(e_n)}e_n$$

Seja T_u o funcional linear em V definido por $T_u(v) = \langle v, u \rangle, \forall v \in V$.

(7)

PROCESSO DE ORTOGONALIZAÇÃO DE GRAM-SCHMIDT

Teorema: Seja $\{v_1, \dots, v_r\}$ uma base arbitrária de um espaço com produto interno V . Então, existe uma base ortogonal $\{u_1, \dots, u_r\}$ de V tal que a matriz de transição de $\{v_i\}$ a $\{u_i\}$ é triangular, isto é,

$$u_i = a_{i1}v_1 + a_{i2}v_2 + \dots + a_{ii}v_i$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Demonstração: Fazemos $u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$, então $\{u_1\}$ é ortonormal.

A seguir fazemos:

$$w_2 = v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1 \quad e \quad u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|}$$

Pelo Lema 1, w_2 (e, portanto, u_2) é ortogonal a u_1 ; então $\{u_1, u_2\}$ é ortonormal.

A seguir, fazemos

$$w_3 = v_3 - \langle v_3, u_1 \rangle u_1 - \langle v_3, u_2 \rangle u_2 \quad e \quad u_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|}$$

Novamente, pelo Lema 1, w_3 (e, portanto u_3) é ortogonal a u_1 e u_2 ; então $\{u_1, u_2, u_3\}$ é ortonormal. Em geral, depois de obter $\{u_1, \dots, u_i\}$ fazemos

$$w_{i+1} = v_{i+1} - \langle v_{i+1}, u_1 \rangle u_1 - \dots - \langle v_{i+1}, u_i \rangle u_i \quad e \quad u_{i+1} = \frac{w_{i+1}}{\|w_{i+1}\|}$$

(Note que $w_{i+1} \neq 0$, porque $v_{i+1} \notin [v_1, \dots, v_i] = [u_1, \dots, u_i]$.) Como antes, $\{u_1, \dots, u_{i+1}\}$ é ortonormal. Por indução, obtemos um conj. $\{u_1, \dots, u_r\}$ que é base de V .

A construção acima garante que a matriz de transição é triangular.

$$u_1 = a_{11}v_1 = \frac{1}{\|v_1\|}v_1$$

$$u_2 = \frac{1}{\|w_2\|}v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\|w_2\|\|v_1\|}v_1 = a_{21}v_1 + a_{22}v_2$$

$\vdots$

Exemplo: Consideremos a seguinte base de $\mathbb{R}^3$

$$\{v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (0, 0, 1)\}$$

Usamos o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt para transformar $\{v_i\}$ numa base ortogonal $\{u_i\}$.

6

CONJUNTOS ORTOGONAIS

Diz-se que um conj. $\{u_i\}$ de vetores em V é ortogonal se seus elementos são dois a dois ortogonais, isto é, se $\langle u_i, u_j \rangle = 0$ para $i \neq j$. Em particular, diz-se que $\{u_i\}$ é ortonormal se ele é ortogonal e se cada u_i tem comprimento 1, isto é, se

$$\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Exemplo: Consideremos a base canônica do $\mathbb{R}^3$:

$$\{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$$

É claro que: $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$. Logo, $\{e_1, e_2, e_3\}$ é ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 2: $V = \mathcal{C}([- \pi, \pi], \mathbb{R}) = \{f: [- \pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, \text{ contínua} \}$ p.i.

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt.$$

Um exemplo clássico de subconjunto ortogonal de V é $\{1, \cos t, \cos 2t, \dots, \sin t, \sin 2t, \dots\}$.

Lema 1: Um conj. $\{u_1, \dots, u_r\}$ ortonormal é l.i. e para qualquer $v \in V$, o

vetor $(*) \quad w = v - \langle v, u_1 \rangle u_1 - \langle v, u_2 \rangle u_2 - \dots - \langle v, u_r \rangle u_r$

é ortogonal a cada um dos u_i .

Prova:

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_r u_r = \vec{0} \Rightarrow \langle \lambda_1 u_1, u_1 \rangle + \dots + \langle \lambda_r u_r, u_r \rangle = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_1 \langle u_1, u_1 \rangle = 0, \text{ como } \langle u_1, u_1 \rangle > 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0. \text{ Analogamente:}$$

$$\lambda_2 = \dots = \lambda_r = 0.$$

Considere w dado por $(*)$ e considere

$$\langle w, u_i \rangle = \langle v, u_i \rangle - \langle \langle v, u_1 \rangle u_1, u_i \rangle - \dots - \langle \langle v, u_i \rangle u_i, u_i \rangle - \dots$$

$$- \langle \langle v, u_r \rangle u_r, u_i \rangle$$

$$= \langle v, u_i \rangle - \langle v, u_1 \rangle \underbrace{\langle u_1, u_i \rangle}_{=0} - \dots - \langle v, u_i \rangle \underbrace{\langle u_i, u_i \rangle}_{=1} - \dots$$

$$- \langle v, u_i \rangle \underbrace{\langle u_i, u_i \rangle}_{=1} = \langle v, u_i \rangle - \langle v, u_i \rangle = 0.$$

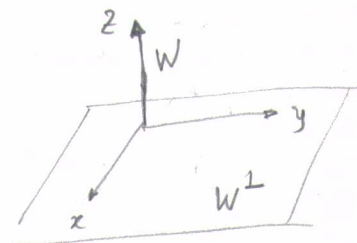
⑤

Exemplo 1: Seja W o eixo- z em $\mathbb{R}^3$, isto é,

$$W = \{(0, 0, c), c \in \mathbb{R}\}$$

Então, $W^\perp$ é o plano- xy , isto é,

$$W^\perp = \{(a, b, 0); a, b \in \mathbb{R}\}$$



Temos que $\mathbb{R}^3 = W \oplus W^\perp$. $E: \mathbb{R}^3 \rightarrow W$ é dada por

$$E(x, y, z) = (0, 0, z).$$

Exemplo 2: Consideremos um sistema homogêneo de eqs. lineares sobre $\mathbb{R}$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0$$

$\vdots$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0$$

ou em notação matricial $AX=0$. Lembremos que o espaço das soluções W pode ser encarado como o núcleo do operador linear A . Podemos também encarar W como o conjunto de todos os vetores $v = (x_1, \dots, x_n)$, que são ortogonais a cada linha de A . Assim, W é o complemento ortogonal do espaço das linhas de A . Do Teorema acima, concluímos que $\dim W = n - \text{posto}(A)$.

Obs.: Se V é espaço com p.i. real, então o ângulo θ entre $u, v \in V$ é

definido por

$$\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|}.$$

(4)

ORTOGONALIDADE

Seja V um espaço com p.i. Dizemos que os vetores $u, v \in V$ são ortogonais se $\langle u, v \rangle = 0$. A relação é simétrica, isto é, se u é ortogonal a v , então $\langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle} = \overline{0} = 0$; logo, v é ortogonal a u .

Obs.: 0 é ortogonal a todo $v \in V$. Reciprocamente, se u é ortogonal a todo $v \in V$, então $\langle u, u \rangle = 0$ e, portanto, $u = 0$.

Agora suponhamos que W é um subconjunto de V . O complemento ortogonal de W , denotado por $W^\perp$, é o conjunto:

$$W^\perp = \{v \in V : \langle v, w \rangle = 0, \forall w \in W\}$$

$W^\perp$ é subespaço de V . De fato, $0 \in W^\perp$. Suponhamos que $u, v \in W^\perp$. Então, para quaisquer $a, b \in K$ e qualquer $w \in W$,

$$\langle au + bv, w \rangle = a \langle u, w \rangle + b \langle v, w \rangle = a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0$$

assim $au + bv \in W^\perp$, portanto, $W^\perp$ é subespaço de V .

Teorema: Seja W um subespaço de V . Então, V é soma direta de $W^\perp$ e W , isto é, $V = W \oplus W^\perp$.

Prova: Considere $\{u_1, \dots, u_r\}$ uma base de W . Completamos esta base até obter uma base de V : $\beta = \{u_1, \dots, u_r, u_{r+1}, \dots, u_n\}$. Podemos ortogonalizar esta base, desse modo, $u_{r+1}, \dots, u_n \in W^\perp$. Se $v \in V$ (Processo de ortogonalização de Gram-Schmidt)

$$v = a_1 u_1 + \dots + a_r u_r + a_{r+1} u_{r+1} + \dots + a_n u_n, \text{ onde } a_1 u_1 + \dots + a_r u_r \in W$$

$$\text{assim, } a_{r+1} u_{r+1} + \dots + a_n u_n \in W^\perp. \text{ Desse modo, } V = W + W^\perp.$$

Por outro lado, se $w \in W \cap W^\perp$ então $\langle w, w \rangle = 0 \Rightarrow w = 0 \Rightarrow W \cap W^\perp = \{0\}$.

Seja W subespaço de V , então $V = W \oplus W^\perp$ pelo Teo. ant.; portanto, existe uma única projeção $E_W: V \rightarrow V$ com imagem W e núcleo $W^\perp$. Isto é, se $v \in V$ e $v = w + w'$, onde $w \in W$ e $w' \in W^\perp$, então $E_W(v) = w$. E_W é a projeção ortogonal de V em W .

③

Observação 1: Se $\|v\|=1$, isto é, se $\langle v, v \rangle = 1$, então v é chamado vetor unitário ou diz-se que está normalizado. Notemos que, todo vetor não-nulo $u \in V$ pode ser normalizado, fazendo $v = u/\|u\|$.

Observação 2: O número real não-negativo $d(u, v) = \|u - v\|$ é chamado a distância entre u e v .

DESIGUALDADE DE CAUCHY-SCHWARZ

Teorema: (Cauchy-Schwarz) Para quaisquer vetores $u, v \in V$,

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|.$$

Prova: Se $v = 0$, a desigualdade se reduz a $0 \leq 0$ e, portanto, é válida. Suponhamos $v \neq 0$. Usando $z\bar{z} = |z|^2$ ($\forall z \in \mathbb{C}$) e $\langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle}$, expandimos $\|u - \langle u, v \rangle v\|^2 \geq 0$ onde t é qualquer valor real:

$$\begin{aligned} 0 \leq \|u - \langle u, v \rangle v\|^2 &= \langle u - \langle u, v \rangle v, u - \langle u, v \rangle v \rangle \\ &= \langle u, u \rangle - \overline{\langle u, v \rangle} t \langle u, v \rangle - \langle u, v \rangle t \overline{\langle u, v \rangle} + \langle u, v \rangle \overline{\langle u, v \rangle} t^2 \langle v, v \rangle \\ &= \|u\|^2 - 2t |\langle u, v \rangle|^2 + |\langle u, v \rangle|^2 t^2 \|v\|^2 \end{aligned}$$

Faça $t = \frac{1}{\|v\|^2}$ para encontrar $0 \leq \|u\|^2 - \frac{|\langle u, v \rangle|^2}{\|v\|^2}$, daí, $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$.

Exemplo 1: Consideremos números complexos $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}$. Então pela desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$(a_1 \bar{b}_1 + \dots + a_n \bar{b}_n)^2 \leq (|a_1|^2 + \dots + |a_n|^2) (|b_1|^2 + \dots + |b_n|^2)$$

isto é,

$$|\langle u, v \rangle|^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2$$

onde

$$u = (a_i), v = (b_i).$$

Exemplo 2: Sejam f e g funções reais contínuas def. em $0 \leq t \leq 1$. Então pela desig. de Cauchy-Schwarz:

$$\langle f, g \rangle^2 = \left(\int_0^1 f(t)g(t) dt \right)^2 \leq \int_0^1 f(t)^2 dt \int_0^1 g(t)^2 dt = \|f\|^2 \|g\|^2$$

(2)

Exemplo 2: Consideremos o produto escalar em $\mathbb{C}^n$:

$$u \cdot v = z_1 \bar{w}_1 + \dots + z_n \bar{w}_n,$$

onde $u = (z_i)$ e $v = (w_i)$. Este é um produto interno em $\mathbb{C}^n$.

Exemplo 3: Denotemos por V o espaço vetorial das matrizes $m \times n$ sobre $\mathbb{R}$.

Um p.i. em V é

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^t A)$$

onde tr indica traço. Analogamente, se U denota o espaço vetorial das matrizes $m \times n$ sobre $\mathbb{C}$, então é um produto interno em U :

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^* A)$$

onde B^* é a transposta conjugada de B .

Exemplo 4: Seja V o espaço vetorial das funções reais contínuas no intervalo $a \leq t \leq b$. Um p.i. em V é

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt.$$

Analogamente, se V denota o espaço vetorial das funções complexas contínuas no intervalo real $a \leq t \leq b$, então um produto interno em V é:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt.$$

Exemplo 5: Seja V o espaço vetorial das seqüências infinitas de números reais

$(a_1, a_2, \dots)$, satisfazendo

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots < \infty,$$

Adição:

$$(a_1, a_2, \dots) + (b_1, b_2, \dots) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots)$$

$$K(a_1, a_2, \dots) = (Ka_1, Ka_2, \dots)$$

Um p.i. em V é definido como:

$$\langle (a_1, a_2, \dots), (b_1, b_2, \dots) \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots$$

Essa soma converge absolutamente $\forall$ par de pontos de V . Este é o espaço l_2 (espaço de Hilbert). $l_2 = \{(a_i)_{i=1}^{\infty} : \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty\}$.

PRODUTO INTERNO

Seja $\mathbb{K}$ um corpo arbitrário. ($\mathbb{K}$ pode ser o corpo real $\mathbb{R}$ ou o corpo complexo $\mathbb{C}$). Consideremos V um espaço vetorial de dimensão finita, a menos que se diga o contrário.

Espaços com Produto Interno

Definição: Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Suponhamos que, para cada par de vetores $u, v \in V$ está associado um escalar $\langle u, v \rangle \in \mathbb{K}$. Esta transformação é chamada de produto interno em V e satisfaz os axiomas:

$$(i) \langle au_1 + bu_2, v \rangle = a\langle u_1, v \rangle + b\langle u_2, v \rangle$$

$$(ii) \langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$$

$$(iii) \langle u, u \rangle \geq 0; \text{ e } \langle u, u \rangle = 0 \text{ se, e somente se, } u = 0.$$

O espaço vetorial V com produto interno é chamado espaço com produto interno.

Observe que $\langle u, u \rangle$ é sempre real por (ii); logo, faz sentido a desigualdade em (iii). Usamos também a notação

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

Este número real não-negativo $\|u\|$ é chamado norma ou comprimento de u .

Também usando (i) e (ii) obtemos:

$$\langle u, au_1 + bu_2 \rangle = \overline{a}\langle u, u_1 \rangle + \overline{b}\langle u, u_2 \rangle.$$

Um espaço com produto interno real é chamado espaço euclidiano e um espaço com produto interno complexo é chamado espaço unitário.

Exemplo 1: Consideremos o produto escalar no $\mathbb{R}^n$:

$$u \cdot v = a_1b_1 + \dots + a_nb_n$$

onde $u = (a_i)$ e $v = (b_i)$. Este é um p.i. no $\mathbb{R}^n$, e $\mathbb{R}^n$ é com este produto interno usualmente designado espaço euclidiano n -dimensional.

(2)

ESPAÇO QUOCIENTE (Revisão)

Sejam V espaço sobre um corpo K e W um subespaço de V . Se v é qualquer vetor em V , indicamos por $v+W$ o conjunto:

$$v+W = \{v+w : w \in W\}$$

Classes laterais de W em V .

$$\frac{V}{W} = \{v+W : v \in V\}$$

Definimos as operações:

$$(i) \quad (u+W) + (v+W) = (u+v) + W$$

$$(ii) \quad k(u+W) = ku + W, \quad k \in K.$$

$\frac{V}{W}$ é um espaço vetorial sobre K com estas operações.

Proposição: $\dim V = \dim W + \dim V/W$.

Teorema: Suponhamos que W é um subespaço T -invariante. Então, T induz um operador linear $\bar{T}$ em V/W definido por $\bar{T}(v+W) = T(v) + W$. Além disso, se T é raiz de algum polinômio, então $\bar{T}$ também é. Assim, o polinômio mínimo de $\bar{T}$ divide o polinômio mínimo de T .

Prova: $\bar{T}$ está bem definido, isto é, se $u+W = v+W$ então $\bar{T}(u+W) = \bar{T}(v+W)$.

Se $u+W = v+W$, então $u-v \in W$, e, como W é T -invariante, $T(u-v) = T(u) - T(v) \in W$.

Assim,

$$\bar{T}(u+W) = T(u) + W = T(v) + W = \bar{T}(v+W).$$

$\bar{T}$ é linear,

$$\begin{aligned} \bar{T}((u+W) + (v+W)) &= \bar{T}(u+v+W) = T(u+v) + W = T(u) + T(v) + W \\ &= T(u) + W + T(v) + W = \bar{T}(u+W) + \bar{T}(v+W). \end{aligned}$$

$$e \quad \bar{T}(k(u+W)) = \bar{T}(ku+W) = T(ku) + W = kT(u) + W = k(T(u) + W) = k\bar{T}(u+W).$$

Agora para qualquer classe lateral $u+W \in V/W$, temos

(ii)

$$\overline{T}^2(u+W) = \overline{T}(\overline{T}(u+W)) = \overline{T}(T(u)+W) = \overline{T}(T(u)) + W = \overline{T}^2(u) + W$$

$$\overline{T}^2(u+W) = \overline{T}^2(u) + W = T(T(u)) + W = \overline{T}(T(u)+W) = \overline{T}(\overline{T}(u+W)) = \overline{T}^2(u+W).$$

Analogamente, $\overline{T}^n = (\overline{T})^n$, $\forall n$. Assim se

$$f(t) = a_n t^n + \dots + a_0 = \sum a_i t^i$$

então

$$\begin{aligned} \overline{f(T)}(u+W) &= f(T)u + W = \sum a_i T^i u + W = \sum a_i (T^i(u) + W) \\ &= \sum a_i \overline{T}^i(u+W) = \sum a_i \overline{T}^i(u+W) = \overline{f(T)}(u+W); \end{aligned}$$

$a_i u \in W$

Logo, $\overline{f(T)} = f(\overline{T})$. De acordo com isso, se T é raiz de $f(t)$, então $\overline{f(T)} = \overline{0} = W = f(\overline{T})$, isto é, $\overline{T}$ é também raiz de $f(t)$.

TEOREMA: Seja $T: V \rightarrow V$ linear. Seja W um subespaço T -invariante de V e seja $\overline{T}$ o operador induzido em V/W . Demonstre:

- (i) O T -anulador de $v \in V$ divide o polinômio mínimo de T .
- (ii) O $\overline{T}$ -anulador de $\overline{v} \in V/W$ divide o polinômio mínimo de T .

Prova: (i) O T -anulador de $v \in V$ é o polinômio mínimo da restrição de T a $Z(v, T)$ e, portanto, ele divide o polinômio mínimo de T .

(ii) O $\overline{T}$ -anulador de $\overline{v} \in V/W$ divide o polinômio mínimo de $\overline{T}$, que divide o polinômio mínimo de T .

Observação. No caso do polinômio mínimo de T ser $f(t)^n$, onde $f(t)$ é um polinômio mônico irredutível, então o $\overline{T}$ -anulador de $\overline{v} \in V/W$ é da forma $f(t)^m$, onde $m \leq n$.

TEOREMA: Seja $W = Z(v, T)$ e suponhamos que o T -anulador de v é $f(t)^n$ onde $f(t)$ é um polinômio mônico irredutível de grau d . Mostre que $f(T)^s(W)$ é um subespaço cíclico gerado por $f(T)^s(v)$ e tem dimensão $d(n-s)$, se $n > s$ e dimensão 0, se $n \leq s$.

$$\begin{aligned} s &\leq n+r \\ s &> n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(T)^s v &= f(T)^{n+r} v = f(T)^n f(T)^r v \\ &= f(T)^n f(T)^r v \\ &= f(T)^n f(T)^r v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z(v, T) &= \{ f(T)v, f \in P(K) \} \Rightarrow f(T)^n v = 0 \\ f(t) &= t^d + a_{d-1}t^{d-1} + \dots + a_1t + a_0 \\ f(t)^n &= (t^d + a_{d-1}t^{d-1} + \dots + a_1t + a_0)^n \end{aligned}$$

$$f(T)^{n-s} f(T)^s w = f(T)^n w = f(T)^n v = 0$$

$$\begin{aligned} f(T)^n v &= (T^d + a_{d-1}T^{d-1} + \dots + a_0I)^n v = 0 \\ f(T)^s w &= (T^d + a_{d-1}T^{d-1} + \dots + a_0I)^s w \end{aligned}$$

ESPAÇO QUOCIENTE (Revisão)

Sejam V espaço sobre um corpo K e W um subespaço de V . Se v é qualquer vetor em V , indicamos por $v+W$ o conjunto:

$$v+W = \{v+w : w \in W\}$$

Classes laterais de W em V .

$$\frac{V}{W} = \{v+W; v \in V\}$$

Definimos as operações:

$$(i) \quad (u+W) + (v+W) = (u+v) + W$$

$$(ii) \quad K(u+W) = Ku + W, \quad K \in K.$$

$\frac{V}{W}$ é um espaço vetorial sobre K com estas operações.

$$\begin{pmatrix} b(T) = 0 \Rightarrow \\ m_H // p(T) \\ m_T(\bar{T}) = 0 = m_{\bar{T}} // m_{\bar{p}} \end{pmatrix}$$

Proposição: $\dim V = \dim W + \dim V/W$.

Teorema: Suponhamos que W é um subespaço T -invariante. Então, T induz um operador linear $\bar{T}$ em V/W definido por $\bar{T}(v+W) = T(v) + W$. Além disso, se T é raiz de algum polinômio, então $\bar{T}$ também é. Assim, o polinômio mínimo de $\bar{T}$ divide o polinômio mínimo de T .

Prova: $\bar{T}$ está bem definido, isto é, se $u+W = v+W$ então $\bar{T}(u+W) = \bar{T}(v+W)$.

Se $u+W = v+W$, então $u-v \in W$, como W é T -invariante, $T(u-v) = T(u) - T(v) \in W$.

Assim,

$$\bar{T}(u+W) = T(u) + W = T(v) + W = \bar{T}(v+W).$$

$\bar{T}$ é linear,

$$\begin{aligned} \bar{T}((u+W) + (v+W)) &= \bar{T}(u+v+W) = T(u+v) + W = T(u) + T(v) + W \\ &= T(u) + W + T(v) + W = \bar{T}(u+W) + \bar{T}(v+W). \end{aligned}$$

$$e \quad \bar{T}(K(u+W)) = \bar{T}(Ku + W) = T(Ku) + W = K T(u) + W = K(T(u) + W) = K \bar{T}(u+W).$$

Agora para qualquer classe lateral $u+W \in V/W$, temos

8

Teorema (forma canônica racional). Seja $T: V \rightarrow V$ um operador linear com polinômio mínimo

$$m(t) = f_1(t)^{m_1} f_2(t)^{m_2} \dots f_s(t)^{m_s}$$

onde os $f_i(t)$ são polinômios irredutíveis mônicos distintos. Então T tem uma única representação matricial diagonal em blocos

$$\begin{pmatrix} C_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & C_{1r_1} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & C_{s1} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & C_{sr_s} \end{pmatrix}$$

onde os C_{ij} são matrizes companheiras. Em particular, os C_{ij} são as matrizes companheiras dos polinômios $f_i(t)^{n_{ij}}$, onde

$$m_1 = n_{11} \geq n_{12} \geq \dots \geq n_{1r_1}, \dots, m_s = n_{s1} \geq n_{s2} \geq \dots \geq n_{sr_s}.$$

Essa representação matricial de T é chamada a forma canônica racional. Os polinômios $f_i(t)^{n_{ij}}$ são chamados os divisores elementares de T .

(Idéia): Prova: A prova desse Teorema segue do Teorema da decomposição primária e do lema apresentado acima.

$$T = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_s \end{pmatrix}$$

$$V = W_1 \oplus \dots \oplus W_s \text{ (Teo. Decomp. primária)}$$

Cujos polinômios mínimos de $T_i = T|_{W_i}$ são $f_i(t)^{n_i}$. Aplicando o lema

$$A_i = [T_i]_{\beta_i}$$

a $T_i: W_i \rightarrow W_i$. Obtemos:

$$W_i = Z(v_{i1}, T_i) \oplus \dots \oplus Z(v_{ir_i}, T_i)$$

Aplicando o Teo. anterior a T_{i,r_i} , $Z(v_{i,r_i}, T_i)$ e $m_{v_{i,r_i}}(t)$, obtemos o resultado desejado. $\square$

$$[T_i]_{\beta_i} = C \text{ (matriz companheira)}$$

Exemplo: Seja V um esp. vet. de dimensão 6 sobre $\mathbb{R}$ e T op. linear cujo polinômio mínimo é $m(t) = (t^2 - t + 3)(t - 2)^2$. Então a forma canônica racional de T é uma das seguintes somas diretas de matrizes companheiras:

- (i) $C(t^2 - t + 3) \oplus C(t^2 - t + 3) \oplus C(t - 2)^2$
- (ii) $C(t^2 - t + 3) \oplus C((t - 2)^2) \oplus C(t - 2)^2$
- (iii) $C(t^2 - t + 3) \oplus C(t - 2)^2 \oplus C(t - 2) \oplus C(t - 2)$

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}_{6 \times 6} \quad (i)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{6 \times 6} \quad (ii)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{6 \times 6} \quad (iii)$$

(7)

lado, por (1)

$$f(T)^{n_2}(v_2) = f(T)^{n_2}(w - h(T)(v_1)) = f(T)^{n_2}(w) - g(T)v_1 = 0$$

Consequentemente, o T -anulador de v_2 é $f(t)^{n_2}$, como foi dito.Semelhantemente, existem vetores $v_3, \dots, v_r \in V$ tais que $v_i \in \bar{v}_i$ e que o T -anulador de v_i é $f(t)^{n_i}$, o T -anulador de $\bar{v}_i$. Fazemos

$$Z_2 = Z(v_2, T), \dots, Z_r = Z(v_r, T)$$

Seja d o grau de $f(t)$ de modo que $f(t)^{n_i}$ tenha grau dn_i . Então, como $f(t)^{n_i}$ é simultaneamente o T -anulador de v_i e $\bar{T}$ -anulador de $\bar{v}_i$, sabemos

$$\text{que } \{v_i, T(v_i), \dots, T^{dn_i-1}(v_i)\} \text{ e } \{\bar{v}_i, \bar{T}(\bar{v}_i), \dots, \bar{T}^{dn_i-1}(\bar{v}_i)\}$$

são bases para $Z(v_i, T)$ e $Z(\bar{v}_i, \bar{T})$, respectivamente, para $i=2, \dots, r$. Mas $\bar{V} = Z(\bar{v}_2, \bar{T}) \oplus \dots \oplus Z(\bar{v}_r, \bar{T})$; portanto,

$$\{\bar{v}_2, \dots, \bar{T}^{dn_2-1}(\bar{v}_2), \dots, \bar{v}_r, \dots, \bar{T}^{dn_r-1}(\bar{v}_r)\}$$

é base para $\bar{V}$. Como $\dim V = \dim Z_1 + \dim V/Z_1$, e como $\bar{T}^i(\bar{v}) = \overline{T^i(v)}$

$$\text{então } \{v_1, \dots, T^{dn_1-1}(v_1), v_2, \dots, T^{dn_2-1}(v_2), \dots, v_r, \dots, T^{dn_r-1}(v_r)\}$$

$$\text{é base para } V. \text{ Assim, } V = Z(v_1, T) \oplus \dots \oplus Z(v_r, T).$$

Falta mostrar que os expoentes $n_1, \dots, n_r$ são determinados de maneira única por T . Como d denota o grau de $f(t)$,

$$\dim V = d(n_1 + \dots + n_r) \text{ e } \dim Z_i = dn_i, i=1, \dots, r.$$

Se s é qualquer inteiro positivo, então, $f(T)^s(Z_i)$ é um subespaço cíclico gerado por

$$f(T)^s v_i \text{ e tem dimensão } d(n_i - s), \text{ se } n_i > s \text{ e dimensão } 0 \text{ se } n_i \leq s.$$

Agora qualquer vetor em $f(T)^s(V)$ pode ser escrito unicamente na forma

$$f(T)^s v = f(T)^s w_1 + \dots + f(T)^s w_r$$

onde $f(T)^s w_i \in f(T)^s(Z_i)$. Seja t o inteiro dependente de s , para o qual

$$n_1 > s, \dots, n_t > s, n_{t+1} \leq s$$

Então

$$f(T)^s(V) = f(T)^s(Z_1) \oplus \dots \oplus f(T)^s(Z_t)$$

$$\text{logo, } (*) \quad \dim(f(T)^s(V)) = d(n_1 - s) + \dots + d(n_t - s)$$

Os números à esquerda de (*) são determinados de maneira única por T . Faça $s=n-1$. Os números à direita de (*) são determinados de maneira única por T . Faça $s=n-2$, e assim determina o número de n_i iguais a $n-1$. Repita até $s=0$. Assim, obtém-se n_i iguais a 1. $\square$

6

é gerado por um único vetor.

Prova do lema: Indução sobre $\dim V$. Se $\dim V = 1$, então V é de próprio T-cíclico, o lema vale. Suponhamos que $\dim V > 1$ e que o lema vale p/ os espaços vetoriais de dimensão menor que a dimensão de V .

Como o polinômio mínimo de T é $f(t)^n$, existe $v_1 \in V$ tal que $f(T)^{n-1}v_1 \neq 0$; portanto, o T-anelador de v_1 é $f(t)^n$. Seja $Z_1 = Z(v_1, T)$ e lembre que Z_1 é T-invariante.

Seja $\bar{V} = V/Z_1$ e seja $\bar{T}$ o operador linear em $\bar{V}$ induzido por T . Pelo Teo. abaixo o polinômio mínimo de $\bar{T}$ divide $f(t)^n$, portanto, a hipótese vale p/ $\bar{V}$. ($\dim \bar{V} < \dim V$)

Teorema: Sup. W subesp. invariante sob $T: V \rightarrow V$. Então T induz um op. linear $\bar{T}$ em V/W def. por $\bar{T}(v+W) = T(v)+W$. Além disto, se T é raíz de algum polinômio, então $\bar{T}$ também é. Assim o polinômio mínimo de $\bar{T}$ divide o polinômio mínimo de T .

Consequentemente, por indução

$$\bar{V} = Z(\bar{v}_1, \bar{T}) \oplus \dots \oplus Z(\bar{v}_r, \bar{T})$$

onde os $\bar{T}$ -aneladores correspondentes são

$$f(t)^{n_1} \dots f(t)^{n_r}, \quad n \geq n_1 \geq \dots \geq n_r.$$

$$\left(\begin{array}{l} f(T)^{n_1} \bar{v}_1 = \bar{0} = Z_1 \\ f(T)^{n_2} w \in Z_1, \forall w \in \bar{v}_2 \end{array} \right)$$

Dizemos que existe um vetor v_2 na classe lateral $\bar{v}_2$, cujo T-anelador é $f(t)^{n_2}$, o $\bar{T}$ -anelador de $\bar{v}_2$. Seja w qualquer vetor em $\bar{v}_2$. Então, $f(T)^{n_2}(w) \in Z_1$.

Portanto, existe um polinômio $g(t)$, para o qual

$$(1) \quad f(T)^{n_2}(w) = g(T)v_1.$$

Como $f(t)^n$ é o polinômio mínimo de T , temos por (1)

$$0 = f(T)^n w = f(T)^{n-n_2} g(T) v_1. \quad (f(t)^{n-n_2} g(t) \text{ anula } v_1)$$

Mas $f(t)^n$ é o T-anelador de v_1 ; portanto, $f(t)^n$ divide $f(t)^{n-n_2} g(t)$; logo, $g(t) = f(t)^{n_2} h(t)$ ($f(t)^{n-n_2} g(t) = f(t)^{n-n_2} f(t)^{n_2} h(t) = f(t)^n h(t)$) para algum polinômio $h(t)$. Fazemos

$$v_2 = w - \underbrace{h(T)v_1}_{\in Z_1}$$

Como $w - v_2 = h(T)v_1 \in Z_1$, v_2 também pertence à classe lateral $\bar{v}_2$. Assim o T-anelador de v_2 é um múltiplo do T-anelador de $\bar{v}_2$. Por outro

(5)

(iii)

$$T_v(v) = T(v)$$

$$T_v(Tv) = T^2(v)$$

$$\vdots$$

$$T_v(T^{k-1}(v)) = T^{k-1}(v)$$

$$T_v(T^{k-1}(v)) = T^k(v) = -a_0 v - a_1 T(v) - \dots - a_{k-1} T^{k-1}(v)$$

Assim,

$$C = [T]_{\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & -a_{k-1} \\ 0 & 0 & & 1 & -a_{k-1} \end{bmatrix}$$

FORMA CANÔNICA RACIONAL

 $T: V \rightarrow V$ op. linear.

Lema 1: Seja $T: V \rightarrow V$ um operador linear, cujo polinômio mínimo é $f(t)^n$, onde $f(t)$ é um polinômio mônico irredutível. Então, V é a soma direta

$$V = Z(v_1, T) \oplus \dots \oplus Z(v_r, T)$$

de subespaços T -cíclicos $Z(v_i, T)$ com T -anuladores correspondentes

$$f(t)^{n_1}, f(t)^{n_2}, \dots, f(t)^{n_r}, \quad n = n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_r$$

$$(f(T)^{n_1} v_1 = 0, \dots, f(T)^{n_r} v_r = 0)$$

Qualquer outra decomposição de V em subespaços T -cíclicos tem o mesmo número de componentes e o mesmo conjunto de T -anuladores.

Enfatizamos que o lema acima não afirma que os vetores v_i ou os subespaços T -cíclicos $Z(v_i, T)$ são determinados de maneira única por T ; mas afirma que o conj. dos T -anuladores é determinado de maneira única por T . Assim, T tem uma representação matricial única

$$\begin{pmatrix} C_1 & & \\ & C_2 & \\ & & \ddots \\ & & & C_r \end{pmatrix}$$

onde as C_i são matrizes companheiras. Os C_i são as matrizes companheiras de $f(t)^{n_i}$.

(4)

Teorema 2: Sejam $Z(V, T)$, T_V e $m_V(t)$ definidos como acima. Então

- (i) O conjunto $\{v, T_V v, \dots, T_V^{k-1} v\}$ é base de $Z(V, T)$; portanto, $\dim Z(V, T) = k$.
- (ii) O polinômio mínimo de T_V é $m_V(t)$.
- (iii) A representação matricial de T_V na base acima é

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{k-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{k-1} \end{pmatrix}$$

A matriz C acima é chamada a matriz companheira do polinômio $m_V(t)$.

Prova:

Por definição de $m_V(t)$, $T_V^k(v)$ é o primeiro vetor na sequência $v, T_V(v), T_V^2(v), \dots$ que é combinação linear de todos os vetores que o precedem na sequência; portanto, o conjunto $B = \{v, T_V(v), \dots, T_V^{k-1}(v)\}$ é l.i. Agora, só precisamos mostrar que $Z(V, T) = L(B)$, onde $L(B)$ é o subespaço gerado por B . Pelo que vimos acima $T_V^k(v) \in L(B)$. Provaremos por indução que $T_V^n(v) \in L(B)$, $\forall n$. Suponhamos $n > k$ e $T_V^{n-1}(v) \in L(B)$, isto é, $T_V^{n-1}(v)$ é combinação linear de $v, \dots, T_V^{k-1}(v)$.

Então, $T_V^n(v) = T_V(T_V^{n-1}(v))$ é combinação linear de $T_V(v), \dots, T_V^k(v)$. Mas $T_V^k(v) \in L(B)$; portanto, $T_V^n(v) \in L(B)$, $\forall n$. Consequentemente, $f(T_V)v \in L(B)$, $\forall f(t)$. Assim $Z(V, T) = L(B)$; logo, B é base.

(ii) Suponhamos que $m(t) = t^s + b_{s-1}t^{s-1} + \dots + b_0$ é polinômio mínimo de T_V . Então, como $v \in Z(V, T)$,

$$0 = m(T_V)v = m(T)v = T_V^s v + b_{s-1}T_V^{s-1}v + \dots + b_0 v \quad (K \text{ é o menor inteiro que satisfaz isso.})$$

Assim, T_V^s é combinação linear de $v, T_V(v), \dots, T_V^{s-1}(v)$ e, portanto, $K \leq s$.

Entretanto, $m_V(T) = 0$, logo, $m_V(T_V)v = 0$. Então, $m(t)$ divide $m_V(t)$, logo, $s \leq k$. Logo, $K = s$, e portanto, $m_V(t) = m(t)$.
(polinômio mínimo)

3

Exemplo 3: Determine todas as possíveis formas canônicas de Jordan, para uma matriz de ordem 5, cujo polinômio mínimo é $m(t) = (t-2)^2$.

sol.: J deve ter um bloco de Jordan de ordem 2 e os outros devem ser de ordem 2 ou 1. Então só existem duas possibilidades

$$J = \left(\begin{array}{cc|cc|c} 2 & 0 & & & \\ 1 & 2 & & & \\ \hline & & 2 & 0 & \\ & & 1 & 2 & \\ \hline & & & & 2 \end{array} \right) \quad \text{ou} \quad J = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & & \\ 1 & 2 & & \\ \hline & & 2 & 0 \\ & & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$(T(f(t)v)) = f(T)v$$

SUBESPAÇOS CÍCLICOS

$$Z(v, T) = \{ f(T)v, \forall f \in P(K) \} \quad \left(\begin{array}{l} T_v: Z(v, T) \rightarrow Z(v, T) \\ w \rightarrow T_v(w) = T(w) \\ w = f(T)v \end{array} \right)$$

Seja T um operador linear num espaço vetorial V , $\dim V < \infty$. Suponhamos que $v \in V$ e $v \neq 0$. O conjunto de todos os vetores da forma $f(T)v$, onde $f(t)$ varia sobre todos os polinômios sobre K , é um subespaço T -invariante de V , chamado o subespaço T -cíclico de V gerado por v ; vamos denotá-lo por $Z(v, T)$ e denotamos a restrição de T a $Z(v, T)$ por T_v . Equivalentemente, poderíamos definir $Z(v, T)$ como a interseção de todos os subespaços T -invariantes de V contendo v .

Agora, consideremos a sequência

$$v, T(v), T^2(v), T^3(v), \dots$$

Seja k o menor inteiro tal que $T^k(v)$ é combinação linear dos vetores que o precedem na sequência; digamos

$$T^k(v) = -a_{k-1}T^{k-1}(v) - \dots - a_1T(v) - a_0v$$

Então

$$m_v(t) = t^k + a_{k-1}t^{k-1} + \dots + a_1t + a_0$$

é o único polinômio mônico de grau mínimo, para o qual, $m_v(T)(v) = 0$.

Chamamos $m_v(T)$ o T -anulador de v e $Z(v, T)$.

2

Exemplo 1: Suponhamos que os polinômios característicos e mínimo de um operador T são, respectivamente,

$$P_T(t) = (t-2)^4(t-3)^3 \quad \text{e} \quad m_T(t) = (t-2)^2(t-3)^2$$

Então a forma canônica de Jordan de T é uma das seguintes matrizes:

$$\begin{pmatrix} \boxed{2 \ 0} & & & & \\ \boxed{1 \ 2} & & & & \\ & \boxed{2 \ 0} & & & \\ & \boxed{1 \ 2} & & & \\ & & \boxed{3 \ 0} & & \\ & & \boxed{1 \ 3} & & \\ & & & \boxed{3} & \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} \boxed{2 \ 0} & & & & \\ \boxed{1 \ 2} & & & & \\ & \boxed{2} & & & \\ & & \boxed{2} & & \\ & & & \boxed{3 \ 0} & \\ & & & \boxed{1 \ 3} & \\ & & & & \boxed{3} \end{pmatrix}$$

A primeira matriz ocorre se T tem dois autovetores independentes associados ao autovalor 2; a segunda matriz ocorre se T tem três autovetores independentes associados a 2.

Exemplo 2: Determine todas as possíveis formas canônicas de Jordan para um operador linear $T: V \rightarrow V$, cujo polinômio característico é

$$P_T(t) = (t-2)^3(t-5)^2$$

Como $t-2$ tem expoente 3 em $P_T(t)$, 2 deve aparecer três vezes na diagonal principal. Semelhantemente, 5 deve aparecer duas vezes. Assim as possíveis formas de Jordan são:

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} \boxed{2 \ 0} & & \\ \boxed{1 \ 2 \ 0} & & \\ & \boxed{1 \ 2} & \\ & & \boxed{5 \ 0} \\ & & & \boxed{1 \ 5} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \boxed{2 \ 0} & & \\ \boxed{1 \ 2} & & \\ & \boxed{2} & \\ & & \boxed{5 \ 0} \\ & & & \boxed{1 \ 5} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \boxed{2} & & \\ & \boxed{2} & \\ & & \boxed{2} & \\ & & & \boxed{5 \ 0} \\ & & & & \boxed{1 \ 5} \end{pmatrix} \\ \text{(i)} & \text{(ii)} & \text{(iii)} \\ \begin{pmatrix} \boxed{2} & & \\ \boxed{1 \ 2} & & \\ & \boxed{1 \ 2} & \\ & & \boxed{5} \\ & & & \boxed{5} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \boxed{2} & & \\ \boxed{1 \ 2} & & \\ & \boxed{2} & \\ & & \boxed{5} \\ & & & \boxed{5} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \boxed{2} & & \\ & \boxed{2} & \\ & & \boxed{2} & \\ & & & \boxed{5} \\ & & & & \boxed{5} \end{pmatrix} \\ \text{(iv)} & \text{(v)} & \text{(vi)} \end{array}$$

(1)

FORMA CANÔNICA DE JORDAN

Teorema 1: Seja $T: V \rightarrow V$ um operador linear, cujo polinômio mínimo e característico são, respectivamente:

$$\begin{aligned} m_T(t) &= (t-\lambda_1)^{m_1} \dots (t-\lambda_r)^{m_r}, \quad e \\ p_T(t) &= (t-\lambda_1)^{n_1} \dots (t-\lambda_r)^{n_r} \end{aligned}$$

onde os λ_i são escalares distintos. Então T tem uma representação matricial diagonal em blocos J , cujos elementos diagonais são da forma:

$$J_{n_i}(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_i & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_i \end{bmatrix} = \lambda_i I + N = \begin{bmatrix} \lambda_i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Isto é:

$$J = \begin{bmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{n_2}(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{n_r}(\lambda_r) \end{bmatrix}$$

Para cada λ_i , os blocos $J_{n_i}(\lambda_i)$ têm as seguintes propriedades:

- (i) Existe ao menos um $J_{n_i}(\lambda_i)$ de ordem m_i , todos os outros são de ordem $\leq m_i$.
- (ii) A soma das ordens dos $J_{n_i}(\lambda_i)$ é n_i .
- (iii) O nº dos $J_{n_i}(\lambda_i)$ é igual à multiplicidade geométrica de λ_i .
- (iv) O nº dos $J_{n_i}(\lambda_i)$ de cada ordem possível é det. unicamente por T .

Prova: Pelo Teorema da decomposição primária, T é decomponível em operadores

$T_1, \dots, T_r$, isto é, $T = T_1 \oplus \dots \oplus T_r$, onde $(t-\lambda_i)^{m_i}$ é o polinômio mínimo de T_i ,

Assim, em particular,

$$(T_1 - \lambda_1 I)^{m_1} = 0, \dots, (T_r - \lambda_r I)^{m_r} = 0$$

Faça $N_i = T_i - \lambda_i I$. Então, para $i=1, \dots, r$,

$$T_i = N_i + \lambda_i I, \quad \text{onde } N_i^{m_i} = 0.$$

Isto é, T_i é a soma do operador escalar $\lambda_i I$ e um operador nilpotente N_i , que é de índice m_i , pois $(t-\lambda_i)^{m_i}$ é o polinômio mínimo de T_i .

Pelo Teorema da seção anterior sobre operadores nilpotentes, podemos escolher uma base tal que N_i esteja na forma canônica. Nessa base, $T_i = N_i + \lambda_i I$ é representado por uma matriz diagonal de blocos M_i , cujos elementos diagonais são as matrizes $J_{n_i}(\lambda_i)$. A soma direta J das matrizes M_i está na forma canônica, - pelo Teo. 5 é a representação matricial de T .

(2)

Vamos agora mostrar a unicidade. Suponha que $V = U_1 \oplus U_2$, onde $T'_1 = T|_{U_1}$ é nilpotente de índice m' e $T'_2 = T|_{U_2}$ é invertível. Queremos mostrar $U_1 = W_1 = N(T^m)$ e $U_2 = W_2 = \text{Im } T^m$. Seja $\bar{m} = \max\{m, m'\}$ e seja $w_1 \in W_1$. Então $w_1 = u_1 + u_2$, $u_i \in U_i$, $i=1,2$.

Então

$$0 = T^{\bar{m}}(w_1) = T^{\bar{m}}(u_1 + u_2) = T^{\bar{m}}(u_1) + T^{\bar{m}}(u_2) = T^{\bar{m}}(u_2)$$

Como $T|_{U_2}$ é invertível, segue que $u_2 = 0$ e, portanto, $w_1 \in U_1$. Analogamente, mostra-se que $U_1 \subset W_1$ e, portanto, $U_1 = W_1 = N(T^m)$. Seja agora $0 \neq w_2 \in W_2$. Então $w_2 = u_1 + u_2$.

Então

$$T^{\bar{m}}(w_2) = T^{\bar{m}}(u_1 + u_2) = T^{\bar{m}}(u_1) + T^{\bar{m}}(u_2) = T^{\bar{m}}(u_2)$$

Mas $T^{\bar{m}}|_{W_2}$ é invertível, pois $T|_{W_2}$ também é. Daí, $w_2 = u_2$ e $W_2 \subset U_2$. Analogamente, mostra-se que $U_2 \subset W_2$. $\square$

Observação: Considere o seguinte exemplo: $T: P(\mathbb{R}) \rightarrow P(\mathbb{R})$ dada por $T(p(t)) = t p(t)$. e suponha $T = T_1 \oplus T_2$ com T_1 nilpotente e T_2 invertível. Note agora, que T não é nilpotente pois, para todo $l \geq 1$, $N(T^l) = \{0\}$.

$$T(p(t)) = t p(t)$$

$$T(T^l p(t)) = T(t^l p(t)) = t^{l+1} p(t) \rightarrow T^l(T p(t)) = t^l p(t)$$

$$\text{Se } p(t) = 1 \Rightarrow 0 = T^l(p(t)) = t^l \rightarrow t^l = 0 \text{ (impossível, basta tomar } t \neq 0)$$

Portanto, $T_2 \neq 0$. Em outras palavras, $\exists$ subespaço T -invariante não nulo W_2 tal que a restrição T_2 de T a W_2 é invertível e, em particular, $T_2: W_2 \rightarrow W_2$ é sobre. Mas isso, não é possível, pois o polinômio mônico de menor grau em W_2 não está na imagem de T_2 .

$$p(t) = t^l + a_{l-1}t^{l-1} + \dots + a_1t + a_0$$

$$\exists: p_2 \in W_2: T_2(p_2) = p_1 \quad ? \text{ Não pois } \partial p_2 \geq \partial p_1 \text{ e } \partial(t p_2) > \partial p_1.$$

$$(t p_2 = p_1 \text{ Não pode})$$

1

TEOREMA: Seja $T: V \rightarrow V$ um operador linear, onde V é um espaço vetorial com $\dim V < \infty$. Então T é a soma direta de um operador nilpotente e um operador invertível. Além disso, tal decomposição é única.

$$(T = T_N \oplus T_I)$$

Dem.: Considere os operadores $T^l, l \geq 1$, teremos a seguinte sequência de subespaços (T-invariantes) de V

$$N(T) \subset N(T^2) \subset \dots \subset N(T^l) \subset \dots \subset V.$$

Como $\dim V < \infty$, a sequência acima para, isto é, existe $m > 0$ t.q. $N(T^m) = N(T^{m+i})$ para todo $i \geq 0$. Escolha tal m que seja minimal, isto é, $N(T^{m-1}) \subsetneq N(T^m)$.

Vamos mostrar que os subespaços T-invariantes $W_1 = N(T^m)$ e $W_2 = \text{Im}(T^m)$ induzem a decomposição desejada. Em primeiro lugar, $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. De fato, se $v \in W_1 \cap W_2$, então, por um lado, $T^m(v) = 0$ e, por outro, existe $v' \in V$ tal que $T^m(v') = v$.

Logo, $0 = T^m(v) = T^{2m}(v') = T^m(v')$. Logo, $v' \in W_1$. Segue que $v = T^m(v') = 0$ e $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. Como $T^m: V \rightarrow V$ é um operador linear, segue que

$$\dim V = \dim N(T^m) + \dim \text{Im}(T^m).$$

Por outro lado,

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

Como $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, concluímos que

$$\dim V = \dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1 + W_2)$$

e, portanto, $V = W_1 \oplus W_2$.

Considere agora as restrições $T_1 = T|_{W_1}$ e $T_2 = T|_{W_2}$ de T a W_1 e W_2 , resp. Daí, $T = T_1 \oplus T_2$. Falta mostrarmos que T_1 é nilpotente e que T_2 é invertível.

É claro que: $T_1^m(w) = T^m(w) = 0, \forall w \in W_1$ e, portanto, T_1 é nilpotente. Por outro lado, se $0 \neq v \in W_2$, então existe $v' \in V$ tal que $v = T^m(v')$. Se $T_2(v) = 0$, então

$$0 = T_2(v) = T_2(T^m v') = T^{m+1}(v') \neq T^m(v')$$

e, portanto, $v' \in W_1$ e $v = T^m(v') = 0$. Logo, T_2 é injetora e, portanto, é um isomorfismo.

$W_1 \in N(T)$
 $W_2 \in N(T^2)$
 $v_1, w_2 \neq \dots \neq v_2 \neq \dots$
 $\vdots$
 $\{v_1, \dots, v_m, \dots\} \subset V$
 p.i.
 abundando $\Rightarrow$ dimensão

(28)

De fato, de (3) temos que $W \subset W''$ e

$$W \cap (U \cap W'') = (W' + \bar{W}) \cap (U \cap W'') = \{0\} \text{ por (3).}$$

Assim

$$U \cap W = W \cap (U \cap W'') = \{0\} \quad (4)$$

Da afirmação 1, temos

$$\dim V = \dim U + \dim W'' - \dim(U \cap W'') \quad (5)$$

De (3) temos

$$\dim W'' - \dim(U \cap W'') = \dim(W' \oplus \bar{W}) \quad (6)$$

De (5) e (6) obtemos:

$$\begin{aligned} \dim V &= \dim U + \dim(W' \oplus \bar{W}) \\ &= \dim U + \dim W \end{aligned}$$

Como por (4) $U \cap W = \{0\}$, temos que: $\dim V = \dim(U + W)$ e

$$V = U \oplus W.$$

Falta mostrar que W é T -invariante. Como $W \subset W''$, então

$$T(W) \subset W' \subset W. \quad \blacksquare$$

Teorema 12: Seja $T: V \rightarrow V$ um operador linear nilpotente com índice $m \geq 1$, onde V é um espaço de dimensão finita. Então existem números positivos $t, m_1, \dots, m_t$ e vetores $v_1, \dots, v_t \in V$ tais que

$$(a) \quad m = m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_t.$$

$$(b) \quad B = \{v_1, Tv_1, \dots, T^{m_1-1}v_1, \dots, v_t, Tv_t, \dots, T^{m_t-1}v_t\} \text{ é base}$$

$$(c) \quad T^{m_i}(v_i) = 0 \text{ para todo } i = 1, \dots, t.$$

$$T_3 = T_2|_{W'_3} = T|_{W'_3}$$

Demonstração: Como $T^{m-1} \neq 0$, existe $v_1 \in V$ tal que $T^{m-1}v_1 \neq 0$. Pelo teorema anterior, $B_1 = \{v_1, Tv_1, \dots, T^{m-1}v_1\}$ é l.i. e

$$V = W_1 \oplus W'_2$$

onde

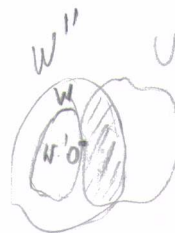
$$W_1 = [v_1, Tv_1, \dots, T^{m-1}v_1]$$

e W'_2 é T -invariante. Seja $m_1 = m$. Note que $T_2 = T|_{W_2}$ é nilpotente com índice $m_2 \leq m_1$.

Repetindo o argumento acima, existe $v_2 \in W'_2$ e $B_2 = \{v_2, Tv_2, \dots, T^{m_2-1}v_2\}$ é base de W_2 tg:

$$W'_2 = W_2 \oplus W'_3$$

com W'_3 T -invariante. Como $\dim V$ é finito, depois de um n.º finito de etapas obtemos o resultado desejado.



T_2 é nilpotente
Faça $K = m_2$. Tome $v_2 \in W'_2$
 $T_2^K v_2 \neq 0$
 m_2 divide m_1
Como $m_1(t) = t^m \Rightarrow$
 $m_2(t) = t^k, k \leq m$
e $m_2(t) = 0 \Rightarrow T_2^K = 0$

(27) Afirmacao 2: $U \cap W' = \{0\}$

$$U' = [T^0 v, \dots, T^{k-1} v]$$

Seja $u \in U \cap W'$. Note que

$$(2) \quad T u \in U \cap \text{Im } T = U'$$

$$\begin{array}{l} T u \in W' \subset \text{Im } T \\ T u \in U \end{array} \Rightarrow T u \in U \cap \text{Im } T = U'$$

De fato, U é T -invariante ($T u \in U$) e daí segue (2). Além disso, W' é T -invariante e portanto $T u \in W'$. Assim $T u \in U' \cap W'$ e de (2) segue que $T u = 0$. No entanto, como $u \in U$, $\exists \exists a_0, \dots, a_{k-1}$ tais que

$$u = \sum_{i=0}^{k-1} a_i T^i v$$

$$T u \in U' \cap W'$$

$$0 = T u = T \left(\sum_{i=0}^{k-1} a_i T^i v \right)$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} a_i T^{i+1} v$$

$$= \sum_{i=0}^{k-2} a_i T^{i+1} v$$

$$\begin{array}{l} k-1+1 = k \\ k-2+1 = k-1 \end{array}$$

Como $\{T^0 v, \dots, T^{k-1} v\}$ é l.i., segue que $a_0 = \dots = a_{k-2} = 0$ e

$$u = a_{k-1} T^{k-1} v \in U'$$

Logo, $u \in U' \cap W' = \{0\}$, portanto, $u = 0$.

De afirmacao 2 segue que

$$(U \cap W'') \cap W' = \{0\}$$



Como $U \cap W'' \subset W''$ e

$$(v \in W' \subset V, T v \in W')$$

$$W' \subset W'' \text{ (pois } W'' = \{w \in V : T w \in W'\} \text{ e } T(W') \subset W')$$

e como $(U \cap W'') \cap W' = \{0\}$, temos que existe um subespaço $\bar{W}$ tal que

$$(3) \quad W'' = (U \cap W'') \oplus W' \oplus \bar{W}$$

Vamos mostrar que

$$W := W' \oplus \bar{W}$$

é o subespaço procurado.

(26)

Se fosse $a_0 \neq 0$, teríamos:

$$v = \frac{1}{a_0} (u' - a_1 T v - \dots - a_{k-1} T^{k-1} v) \in \text{Im } T$$

Mas isso não é possível. De fato, se fosse $v \in \text{Im } T$, teríamos $v = Tw$ para algum w . Logo

$$\{v, Tv, \dots, T^{k-1} v\} = \{Tw, T^2 w, \dots, T^{k-1} w, 0\}$$

e esse conjunto não é l.i. De fato segue que $a_0 = 0$ e $u' \in [Tv, \dots, T^{k-1} v]$ daí:

$$U' = [Tv, \dots, T^{k-1} v].$$

Como $T|_{\text{Im } T} : \text{Im } T \rightarrow \text{Im } T$ é nilpotente de índice $k-1$, podemos usar a hipótese da indução. Assim, existe W' subespaço de $\text{Im } T$, que é $T|_{\text{Im } T}$ -invariante, tal que

$$(1) \quad \text{Im } T = U' \oplus W'.$$

$$T|_{\text{Im } T} : W' \rightarrow W'$$

Seja

$$W'' = \{w \in V : Tw \in W'\}$$

Afirmarção 1: $V = U + W''$

Seja $u \in V$ qualquer. Temos $Tu \in \text{Im } T = U' \oplus W'$. Logo,

$$Tu = u' + w', \quad u' \in U', \quad w' \in W'.$$

Então existem escalares $a_1, \dots, a_{k-1}$ tais que

$$u' = \sum_{i=1}^{k-1} a_i T^i v = T \left(\sum_{i=1}^{k-1} a_i T^{i-1} v \right).$$

Note que: $u'' := \sum_{i=1}^{k-1} a_i T^{i-1} v \in U \quad \left(U = [v, Tv, \dots, T^{k-1} v] \right)$

e portanto

$$T(u) = u' + w' = T(u'') + w'$$

$$\therefore T(u - u'') = w' \in W'$$

$$\therefore u - u'' \in W''$$

$$\therefore u = u'' + u - u'' \in U + W''.$$

Teorema 11: Seja $T: V \rightarrow V$ linear. Suponhamos que para $v \in V$, $T^k(v) = 0$ mas $T^{k-1}(v) \neq 0$. Demonstre:

- (i) O conjunto $S = \{v, T(v), \dots, T^{k-1}(v)\}$ é l.i.
 (ii) Existe um subespaço T -invariante W tal que $V = U \oplus W$ onde $U = [v, T(v), \dots, T^{k-1}(v)]$

Prova: (i) Suponha

$$(*) \quad a_0 v + a_1 T(v) + \dots + a_{k-1} T^{k-1}(v) = 0$$

aplicando T^{k-1} a $(*)$ e usando $T^k(v) = 0$, obtemos $a_0 T^{k-1}(v) = 0$ daí, $a_0 = 0$ pois, $T^{k-1}(v) \neq 0$. Agora aplicando T^{k-2} a $(*)$ e usando $T^k(v) = 0$ e $a_0 = 0$, encontramos $a_1 T^{k-1}(v) = 0$, o que implica, $a_1 = 0$; continuando com esse processo, encontraremos que todos os $a_i = 0$; logo, S é independente.

(ii) Indução no índice de nilpotência de T . Se $k=1$, então $T=0$. Assim, para qualquer $v \neq 0$, temos $U = [v]$ e W qualquer subespaço de V tal que $V = [v] \oplus W$, pois como $T=0$, todo subespaço é T -invariante.

Suponha $k > 1$ e que o resultado esteja provado para todos os operadores nilpotentes de índice menor que k . $\text{Im } T$ é T -invariante e

$$T|_{\text{Im } T}: \text{Im } T \rightarrow \text{Im } T \quad \left(\begin{array}{l} v \in \text{Im } T \subset V \\ T(v) \in V \Rightarrow \exists w \in V: Tv = w, \text{ assim} \\ T(Tv) = T(w) \in \text{Im } T \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} v \in \text{Im } T \Rightarrow \exists u \in V: v = Tu \\ T(Tu) = Tw \\ w \in V \end{array}$$

é nilpotente, com índice $k-1$.

$$\text{Seja } U' = U \cap \text{Im } T$$

Afirmamos que $U' = [Tv, \dots, T^{k-1}v]$.

De fato, é claro que $[Tv, \dots, T^{k-1}v] \subset U'$. Vamos provar a inclusão contrária. Seja $u' \in U'$. Então

$$u' = a_0 v + a_1 Tv + \dots + a_{k-1} T^{k-1}v$$

OPERADORES NILPOTENTES

Um operador linear $T: V \rightarrow V$ é chamado nilpotente se $T^n = 0$ para algum inteiro positivo n ; chamamos K o índice de nilpotência de T se $T^K = 0$, mas $T^{K-1} \neq 0$. Analogamente, uma matriz quadrada é chamada nilpotente se $A^n = 0$ p/ algum $n > 0$ e de índice K se $A^K = 0$, mas $A^{K-1} \neq 0$. É claro que o polinômio mínimo de um operador (matriz) nilpotente de índice K é $m(t) = t^K$; portanto, seu único autovalor é zero.

Exemplo: O operador derivada $T: P_n(\mathbb{R}) \rightarrow P_n(\mathbb{R})$ dado por $T(p) = p'$ é nilpotente com índice $n+1$, mas o mesmo operador com $V = P(\mathbb{R})$ não é nilpotente.

Exemplo: Se $V \neq \{0\}$ e $T: V \rightarrow V$ é nilpotente, mostre que $N(T) \neq \{0\}$.

Prova: De fato, $\exists v \in V, v \neq 0$ tal que $T(v) = 0$. Sendo T nilpotente não existe polinômio mínimo na forma:

$$m(t) = a_{K-1}t^{K-1} + \dots + a_1t + a_0$$

Se existisse $\Rightarrow a_{K-1}T^{K-1} + \dots + a_1T + a_0I = 0$. Aplicando T a essa equação obtemos:

$$a_{K-1}T^K + a_{K-2}T^{K-1} + \dots + a_1T^2 + a_0T = 0$$

$$\text{ou seja } a_{K-2}T^{K-2} + \dots + a_1T + a_0I = 0$$

$$\text{ou ainda: } T(a_{K-2}T^{K-2} + \dots + a_1T + a_0I) = 0 \quad (T \neq 0)$$

$$\text{Seguiria } a_{K-2}T^{K-2} + \dots + a_1T + a_0I = 0$$

Aplicando T^2 , obtemos:

$$a_{K-3}T^{K-1} + \dots + a_1T^3 + a_0T^2 = 0$$

$$\text{ou } T^2(a_{K-3}T^{K-3} + \dots + a_1T + a_0I) = 0$$

$$\text{Seguiria } a_{K-3}T^{K-3} + \dots + a_1T + a_0I = 0$$

Continuando dessa forma, obtemos:

$$a_0T^{K-1} = 0 \Rightarrow (a_0 = 0) \quad a_1 = 0, \dots, a_{K-1} = 0.$$

Logo, $m(t) = t^K$ e portanto, T tem o autovalor zero.

Tome $v \neq 0$, autovetor de T

$$T(v) = 0 \cdot v = 0.$$

Teorema 10: Um operador $T: V \rightarrow V$ linear tem uma representação matricial diagonal se, e somente se, seu polinômio mínimo é um produto de polinômios lineares distintos.

Prova: Suponhamos que $m(t)$ é dado por

$$m(t) = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2) \dots (t - \lambda_n)$$

onde os λ_i são escalares distintos. Pelo Teorema da Decomposição primária, V é a soma direta dos subespaços $W_1, \dots, W_n$, onde $W_i = N(T - \lambda_i I)$. Assim, se $v \in W_i$ então $(T - \lambda_i I)v = 0$, o que implica, $Tv = \lambda_i v$. Ou seja, v é autovetor de T associado a λ_i . Pelo Teo. 4, a união das bases de $W_1, \dots, W_n$ é uma base de V , que consiste de autovetores de T ; logo, T é diagonalizável.

Reciprocamente, suponha que T é diagonalizável, isto é, V tem uma base consistindo de autovetores de T . Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ os autovalores distintos de T . Então o operador

$$f(T) = (T - \lambda_1 I) \dots (T - \lambda_n I)$$

transforma cada vetor da base em 0. Assim, $f(T) = 0$ e, portanto, o polinômio mínimo $m(t)$ de T divide o polinômio

$$f(t) = (t - \lambda_1) \dots (t - \lambda_n).$$

Desse modo, $m(t)$ é um produto de polinômios lineares distintos.

Forma alternada do Teorema 10. Uma matriz A é semelhante a uma matriz diagonal se, e somente se, seu polinômio mínimo é produto de polinômios lineares distintos.

Exemplo: Suponhamos que $A \neq I$ é uma matriz quadrada, para a qual $A^3 = I$. Determine se A é semelhante a uma matriz diagonal, quando A é uma matriz sobre (i) o corpo $\mathbb{R}$, (ii) o corpo $\mathbb{C}$.

Sol.: Como $A^3 = I$, A é um zero do polinômio $f(t) = t^3 - 1 = (t - 1)(t^2 + t + 1)$. O polinômio mínimo $m(t)$ de A não pode ser $t - 1$, pois $A \neq I$. Portanto,

$$m(t) = t^2 + t + 1 \text{ ou } m(t) = t^3 - 1.$$

Como nenhum desses polinômios é um produto de polinômios lineares sobre $\mathbb{R}$, A não é diagonalizável sobre $\mathbb{R}$. Por outro lado, em $\mathbb{C}$, $m(t)$ é um produto de pol. lineares distintos, logo, A é diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.

$$\forall v \in W_i' \Rightarrow 0 = f_i(T_i')^n v = f_i(T_L)^n v = f_i(T)^n v \Rightarrow W_i' \subset W_i \quad W_i = N(f_i(T)^n) \quad \forall v \in W_i \subset V$$

DECOMPOSIÇÃO PRIMÁRIA

$$(T, T^2, \dots, T^n)$$

$$0 = f_i(T)^n v = f_i(T_L)^n v = f_i(T_L)^n v \quad (T_L = T|_{W_i}) \quad \forall v \in N(f_i(T_L)^n) = W_i'$$

TEOREMA DA DECOMPOSIÇÃO PRIMÁRIA: Seja $T: V \rightarrow V$ um operador linear, com polinômio mínimo $m(t) = f_1(t)^{n_1} f_2(t)^{n_2} \dots f_r(t)^{n_r}$ $(W_i' = W_i)$

onde os $f_i(t)$ são polinômios irredutíveis mônicos distintos. Então, V é soma direta de subespaços T -invariantes $W_1, \dots, W_r$:

- 1) $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_r$
- 2) $W_i = N(f_i(T)^{n_i})$, $i=1, \dots, r$.
- 3) $f_i(t)^{n_i}$ é o polinômio mínimo da restrição de T a W_i .

$$m(t) = f_1(t)^{n_1} \dots f_r(t)^{n_r} \quad V_{\lambda_i} = [v_1, \dots, v_{n_i}] \quad T v_i = \lambda_i v_i, i=1, \dots, n_i \quad 0 = f_i(T v_i) = f_i(\lambda_i v_i)^{n_i} = f_i(\lambda_i)^{n_i} v_i$$

Demonstração: Indução em r . $r=1$ é simples. Suponhamos o Teorema vale para $r-1$.

Pelo Teorema 7, podemos escrever V como a soma direta de subespaços T -invariantes W_1 e V_1 , onde $W_1 = N(f_1(T)^{n_1})$ e V_1 é o núcleo de $f_2(T)^{n_2} \dots f_r(T)^{n_r}$. Pelo Teorema 8, os polinômios mínimos das restrições de T a W_1 e V_1 são, resp, $f_1(t)^{n_1}$ e $f_2(t)^{n_2} \dots f_r(t)^{n_r}$.

Denote por T_1 a restrição de T a V_1 . Pela hipótese de indução V_1 é soma direta dos subespaços $W_2, \dots, W_r$ tal que $W_i' = N(f_i(T_1)^{n_i})$ e tal que $f_i(T_1)^{n_i}$ é o polinômio mínimo da restrição de T_1 a W_i' . Mas o núcleo de $f_i(T)^{n_i}$, para $i=2, \dots, r$ está nec. contido em V_1 , pois $f_i(t)^{n_i}$ divide $f_2(t)^{n_2} \dots f_r(t)^{n_r}$. Assim o núcleo de $f_i(T)^{n_i}$ é o mesmo núcleo de $f_i(T_1)^{n_i}$, que é W_i . Também a restrição de T a W_i é a mesma restrição de T_1 a W_i ($i=2, \dots, r$); portanto, $f_i(t)^{n_i}$ é também o polinômio mínimo da restrição de T a W_i . Assim,

$V = W_1 \oplus \dots \oplus W_r$ é a decomposição desejada.

$$V_1 = N(f_2(T)^{n_2}) \oplus \dots \oplus N(f_r(T)^{n_r}) \quad \downarrow \quad N(f_i(T)^{n_i})$$

$$T: V_1 \rightarrow V_1$$

$$\forall v \in N(f_i(T)^{n_i}) \quad f_i(T)^n v = 0$$

$$V_1 = N(f_2(T)^{n_2} \dots f_r(T)^{n_r})$$

$$\forall v \in W_i' \Rightarrow 0 = f_i(T_L)^n v = f_i(T)^n v \Rightarrow v \in N(f_i(T)^{n_i}) = W_i' \quad \forall v \in W_i \Rightarrow 0 = f_i(T)^n v = f_i(T_L)^n v \Rightarrow v \in N(f_i(T_L)^{n_i}) = W_i'$$

$$f_2(T)^{n_2} \quad f_r(T)^{n_r}$$

$$\downarrow \quad \forall v \in V_1 \quad W_i = W_i'$$

$$\forall v \in W_i \subset V_1 \quad T_i v = T_L v = T v = T_1 v$$

$$T_i = T|_{W_i}: W_i \rightarrow W_i \quad T_i' = T_1|_{W_i}: W_i \rightarrow W_i$$

$$\left(\sum_{i=1}^n f_i(T)^{n_i} \right)^{n_1} \left(\sum_{i=1}^n g_i(T)^{n_i} \right)^{n_2} \quad V = N(f_1(T))$$

Teorema 7. Suponhamos $T: V \rightarrow V$ linear e $f(t) = g(t)h(t)$ polinômios tais que $f(T) = 0$ e $g(t)$ e $h(t)$ são primos entre si. Então, V é a soma direta dos subespaços T -invariantes U e W , onde $U = N(g(T))$ e $W = N(h(T))$.

Prova: U e W são T -invariantes pelo Teo. 2 (da seção). Como g e h são primos entre si, existem $r(t)$ e $s(t)$ tais que

$$r(t)g(t) + s(t)h(t) = 1$$

Portanto,

$$(*) \quad r(T)g(T) + s(T)h(T) = I$$

Seja $v \in V$, por $(*)$

$$v = r(T)g(T)v + s(T)h(T)v$$

Mas o primeiro termo nessa soma pertence a $W = N(h(T))$, pois

$$h(T)r(T)g(T)v = r(T)g(T)h(T)v = r(T)f(T)v = r(T)0v = 0.$$

Analogamente, o segundo termo pertence a U . Logo, $V = U + W$. Para provar que $V = U \oplus W$, provaremos que $v = u + w$, $u \in U$, $w \in W$ se escreve de maneira única por v . Aplicando o operador $r(T)g(T)$ a $v = u + w$ e usando $g(T)u = 0$, obtemos

$$r(T)g(T)v = r(T)g(T)u + r(T)g(T)w = r(T)g(T)w.$$

Aplicando $(*)$ a w e usando $h(T)w = 0$, obtemos:

$$w = r(T)g(T)w + s(T)h(T)w = r(T)g(T)w$$

Ambas as fórmulas acima nos dão $w = r(T)g(T)v$; logo w é determinado de maneira única por v . Semelhantemente u é determinado de maneira única por v . Logo, $V = U \oplus W$.

Teorema 8: No Teo. 7 a $f(t)$ é o polinômio mínimo de T (e g e h são mômios), então g e h são polinômios mínimos das restrições de T a U e W , resp.

Prova: $T_1 = T|_U$, $T_2 = T|_W$. Sejam m_1 e m_2 polinômios mínimos de T_1 e T_2 , resp. Note que $g(T_1) = 0$ e $h(T_2) = 0$. Assim, $m_1(t)$ divide $g(t)$ e $m_2(t)$ divide $h(t)$. $f(t)$ é o mínimo múltiplo comum de m_1 e m_2 . Mas m_1 e m_2 são primos entre si, pois g e h são primos entre si, então $f(t) = g(t)h(t) \Rightarrow g(t) = m_1$ e $h(t) = m_2$. Também $f(t) = g(t)h(t) \Rightarrow g(t) = m_1$ e $h(t) = m_2$.

(20)

(ii) Pelo Teo. 5, T tem uma representação matricial $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, onde A e B são representações matriciais de T_1 e T_2 , resp. Então

$$p_T(t) = |tI - M| = \begin{vmatrix} tI - A & 0 \\ 0 & tI - B \end{vmatrix} = |tI - A| |tI - B| = p_{T_1}(t) p_{T_2}(t).$$

(19)

Prop. 1: Seja $\hat{T}$ a restrição de um op. T a um subespaço invariante W , isto é, $\hat{T}(w) = T(w) \forall w \in W$. Demonstre:

- (i) Para qualquer polinômio, $f(t)$, $f(\hat{T}(w)) = f(T(w))$
- (ii) O polinômio mínimo de $\hat{T}$ divide o polinômio mínimo de T .
- (iii) Se $f(t) = 0$ ou se $f(t) = cte$ então o resultado é válido. Suponha grau $f = n \geq 1$ e que o resultado vale p/ polinômios de grau $\leq n$.

Sup. $f(t) = a_n t^n + \dots + a_1 t + a_0$

Então:
$$\begin{aligned} f(\hat{T})(w) &= (a_n \hat{T}^n + \dots + a_1 \hat{T} + a_0 I)(w) \\ &= (a_n \hat{T}^{n-1})(\hat{T}w) + (a_{n-1} \hat{T}^{n-1} + \dots + a_0 I)(w) \\ &= a_n T^{n-1}(Tw) + (a_{n-1} T^{n-1} + \dots + a_0 I)(w) \\ &= f(T)w. \end{aligned}$$

- (ii) Seja $m(t)$ o polinômio mínimo de T . Então, por (i), $m(\hat{T})(w) = m(T)(w) = 0(w) = 0, \forall w \in W$; isto é, $\hat{T}$ é raiz do polinômio $m(t)$. Portanto, o polinômio mínimo de $\hat{T}$ divide $m(t)$.

Prop. 2: Sup. $T: V \rightarrow V$ linear e $T = T_1 \oplus T_2$ em relação a uma soma direta T -invariante $V = U \oplus W$. decomponível em

Mostre que:

- (i) $m(t)$ é o ^{mínimo} múltiplo comum de m_1 e m_2 , onde m, m_1 e m_2 são os polinômios mínimos de T, T_1 e T_2 , resp.

(ii) $p_T(t) = p_{T_1}(t) p_{T_2}(t)$

- (i) Pela Prop. (1) m_1 e m_2 dividem m . Agora seja $f(t) = m_1^a m_2^b$ outro $f(T)u = 0$ e $f(T_2)w = 0$. Seja $v \in V$; então $v = u + w$ com $u \in U, w \in W$

$$f(T)v = f(T)u + f(T)w = f(T_1)u + f(T_2)w = 0 + 0 = 0.$$

Isto é, T é raiz de $f(t)$. Portanto, $m(t)$ divide $f(t)$; logo $m(t)$ é o mínimo múltiplo comum de m_1 e m_2 .

(18) Agora, suponhamos que $T: V \rightarrow V$ é linear e V é a soma direta de subespaços T -invariantes (não-nulos) $W_1, \dots, W_r$:

$$V = W_1 \oplus \dots \oplus W_r \quad \text{e} \quad T(W_i) \subset W_i, \quad i=1, \dots, r.$$

Seja $T_i = T|_{W_i}$. Então dizemos que T é decomponível nos operadores T_i ou que T é a soma direta dos T_i e escrevemos:

$$T = T_1 \oplus \dots \oplus T_r.$$

Também dizemos que os subespaços $W_1, \dots, W_r$ reduzem T ou formam uma decomposição em soma direta T -invariante de V .

Consideremos o caso especial em que dois subespaços U e W reduzem um operador $T: V \rightarrow V$, sendo, $\dim U = 2$ e $\dim W = 3$, e suponhamos que $\{u_1, u_2\}$ e $\{w_1, w_2, w_3\}$ são bases de U e W , resp. Se T_1 e T_2 denotam restrições de

T a U e W , resp., então:

$$T_1(u_1) = a_{11}u_1 + a_{12}u_2$$

$$T_1(u_2) = a_{21}u_1 + a_{22}u_2$$

$$T_2(w_1) = b_{11}w_1 + b_{12}w_2 + b_{13}w_3$$

$$T_2(w_2) = b_{21}w_1 + b_{22}w_2 + b_{23}w_3$$

$$T_2(w_3) = b_{31}w_1 + b_{32}w_2 + b_{33}w_3$$

$$\begin{aligned} T_1(u_1) &= a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + 0w_1 + 0w_2 + 0w_3 \\ T_1(u_2) &= a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + 0w_1 + 0w_2 + 0w_3 \\ T_2(w_1) &= 0u_1 + 0u_2 + b_{11}w_1 + b_{12}w_2 + b_{13}w_3 \end{aligned}$$

Portanto,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

são representações matriciais de T_1 e T_2 , resp. Pelo Teo. acima $\{u_1, u_2, w_1, w_2, w_3\}$ é base de V . Como $T(u_i) = T_1(u_i)$ e $T(w_j) = T_2(w_j)$, a matriz de T nessa base é a matriz diagonal de blocos $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

Uma generalização do argumento acima nos dá o seguinte teorema.

Teorema 5: Sup. $T: V \rightarrow V$ linear, e $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_r$ (W_i subespaços T -invariantes). Se A_i é representação matricial de $T_i = T|_{W_i}$, então T pode ser representado pela matriz diagonal de blocos

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_r \end{pmatrix}$$

$$M = A_1 \oplus \dots \oplus A_r.$$

M , às vezes, é chamada soma direta das matrizes $A_1, \dots, A_r$.

(17)

DECOMPOSIÇÕES EM SOMAS DIRETAS INVARIANTES

V é soma direta de $W_1, \dots, W_r$ (subespaços de V) se

$$V = W_1 \oplus \dots \oplus W_r.$$

Teorema 4: Suponhamos que $W_1, \dots, W_r$ são subespaços de V e que

$$\{w_{11}, \dots, w_{1n_1}\}, \dots, \{w_{r1}, \dots, w_{rn_r}\}$$

são bases de $W_1, \dots, W_r$, resp. Então, V é soma direta dos W_i se, e somente se, a união

$$B = \{w_{11}, \dots, w_{1n_1}, \dots, w_{r1}, \dots, w_{rn_r}\}$$

é uma base de V .

Prova: Suponhamos que B é base de V . Então, para qualquer $v \in V$,

$$v = a_{11}w_{11} + \dots + a_{1n_1}w_{1n_1} + \dots + a_{r1}w_{r1} + \dots + a_{rn_r}w_{rn_r} = w_1 + \dots + w_r$$

onde $w_i = a_{i1}w_{i1} + \dots + a_{in_i}w_{in_i} \in W_i$. Vamos mostrar que tal soma é única.

Suponhamos que

$$v = w'_1 + \dots + w'_r, \quad w'_i \in W_i$$

Como $\{w_{i1}, \dots, w_{in_i}\}$ é base de W_i , $w'_i = b_{i1}w_{i1} + \dots + b_{in_i}w_{in_i}$; logo,

$$v = b_{11}w_{11} + \dots + b_{1n_1}w_{1n_1} + \dots + b_{r1}w_{r1} + \dots + b_{rn_r}w_{rn_r}.$$

Como B é base de V , $a_{ij} = b_{ij}$, $\forall i, j$. Portanto, $w'_i = w_i$, logo, v é única.

Portanto, $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_r$.

Reciprocamente, suponha que V é soma direta dos W_i . Então, $\forall v \in V$, $v = w_1 + \dots + w_r$, onde $w_i \in W_i$. Como $\{w_{ij}\}$ é base de W_i , cada w_i é combinação linear dos w_{ij} ; logo, v é combinação linear dos elementos de B .

Assim, B gera V . Mostraremos que B é l.i. Suponha que

$$a_{11}w_{11} + \dots + a_{1n_1}w_{1n_1} + \dots + a_{r1}w_{r1} + \dots + a_{rn_r}w_{rn_r} = 0$$

Note que $a_{i1}w_{i1} + \dots + a_{in_i}w_{in_i} \in W_i$. Também $0 = 0 + \dots + 0$, $0 \in W_i$.

Como tal soma é única então

$$a_{i1}w_{i1} + \dots + a_{in_i}w_{in_i} = 0, \quad i = 1, \dots, r.$$

Daí: $a_{ij} = 0$, $\forall i, j$. Logo, B é l.i.

(16)

Autovetores não-nulos de um operador linear $T: V \rightarrow V$ podem ser caracterizados como geradores de subespaços unidimensionais T -invariantes. De fato, suponha $Tv = \lambda v$, $v \neq 0$. Então, $W = \{kv, k \in K\}$ é invariante sob T , pois,

$$T(kv) = \lambda(kv) \in W.$$

Reciprocamente, suponha que $\dim U = 1$ e $u \neq 0$ gera U e que U é invariante sob T . Então $T(u) \in U$, logo, $T(u)$ é múltiplo de u , isto é, $T(u) = \mu u$. Portanto, u é autovetor de T , associado a μ .

Classes de subespaços invariantes: $N(f(T)) = \{v \in V : f(T)(v) = 0\}$

Teorema 2: Seja $T: V \rightarrow V$ um operador linear e seja $f(t)$ um polinômio. Então o núcleo de $f(T)$ é invariante sob T .

Prova: Suponhamos $v \in N(f(T))$, isto é, $f(T)(v) = 0$. Precisamos mostrar que $T(v)$ também pertence ao núcleo de $f(T)$, isto é, $f(T)(Tv) = 0$. Como $f(t)t = t f(t)$, temos $f(T)T = T f(T)$. Assim $f(T)(Tv) = T f(T)(v) = T(0) = 0$.

Teorema 3: Suponhamos que W é subespaço invariante de $T: V \rightarrow V$. Então, T tem uma representação matricial em blocos $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, onde A é representação matricial da restrição de T a W .

Prova: Escolha uma base $\{w_1, \dots, w_r\}$ de W , e estendamos a uma base $\{w_1, \dots, w_r, v_1, \dots, v_s\}$ de V . Temos

$$\hat{T}(w_1) = T(w_1) = a_{11}w_1 + \dots + a_{1r}w_r + 0v_1 + \dots + 0v_s$$

$$\hat{T}(w_2) = T(w_2) = a_{21}w_1 + \dots + a_{2r}w_r + 0v_1 + \dots + 0v_s$$

$$\vdots$$

$$\hat{T}(w_r) = T(w_r) = a_{r1}w_1 + \dots + a_{rr}w_r + 0v_1 + \dots + 0v_s$$

$$- \quad T(v_1) = b_{11}w_1 + \dots + b_{1r}w_r + c_{11}v_1 + \dots + c_{1s}v_s$$

$$T(v_2) = b_{21}w_1 + \dots + b_{2r}w_r + c_{21}v_1 + \dots + c_{2s}v_s$$

$$\vdots$$

$$T(v_s) = b_{s1}w_1 + \dots + b_{sr}w_r + c_{s1}v_1 + \dots + c_{ss}v_s$$

Mas a matriz de T nessa base é a transposta da matriz dos coeficientes. Logo, ela tem a forma $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$. A é a matriz de

$$\hat{T} = T|_W.$$

FORMA TRIANGULAR

Seja T um operador linear num espaço vetorial n -dimensional V . Suponhamos que T pode ser representado por uma matriz triangular

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Então o polinômio característico de T ,

$$(*) \quad p_T(t) = \det(tI - A) = (t - a_{11})(t - a_{22}) \dots (t - a_{nn})$$

é um produto de fatores lineares. Também vale o recíproco.

Teorema 1: Seja $T: V \rightarrow V$ um operador linear, cujo polinômio característico seja dado (*). Então, existe uma base de V , na qual T é representada por uma matriz triangular.

Forma Alternada do Teorema 1: Seja A uma matriz quadrada, cujo polinômio característico se fatora em polinômios lineares. Então, A é semelhante a uma matriz triangular, isto é, existe uma matriz inversível P tal que $P^{-1}AP$ é triangular.

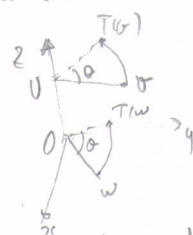
INVARIÂNCIA

Seja $T: V \rightarrow V$ um operador linear. Diz-se que um subespaço W de V é invariante, sob T , ou T -invariante, se T transforma W em si mesmo, isto é, se $v \in W$ implica que $T(v) \in W$. Neste caso, T restrito a W define um operador linear em W ; isto é, T induz um operador $T_W: W \rightarrow W$ definido por $T_W(w) = T(w)$, $\forall w \in W$.

Exemplo: Seja $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ o operador linear que gira cada vetor em relação ao eixo- z de um ângulo θ :

$$T(x, y, z) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta, z)$$

Seja W o plano- xy , observe que cada vetor $(a, b, 0) \in W$ permanece em W sob a transformação T , isto é, W é T -invariante. Note também que o eixo- z , U , é invariante sob T . $T|_W$ gira cada vetor em rel. à origem O e a restrição a U é a identidade em U .



(11)

(b) Seja $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$[T]_{\beta} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

onde β é uma base de $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$. Um cálculo simples nos leva ao polinômio característico $p_T(x) = (x-1)(x-2)^2$, portanto, os autovalores são 1 e 2. Calculando V_1 e V_2 . Temos $V_1 = N(I-T)$

$$[I-T]_{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Assim $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

encontramos $V_1 = [(1, 0, 2)]$. Analogamente, $V_2 = [(1, 1, 2)]$. Como $V_1 + V_2 \neq \mathbb{R}^3$, então não pode existir uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de T .

(c) Seja $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$[T]_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

onde β é base de $\mathbb{R}^3$. Fazendo alguns cálculos obtemos

$$p_T(x) = (x+1)^2(x+2) \text{ e } V_{-1} = [(1, 0, 2), (0, 1, 2)], V_{-2} = [(1, -1, 1)]$$

observe que $\beta' = \{(1, 0, 2), (0, 1, 2), (1, -1, 1)\}$ é base de $\mathbb{R}^3$. Logo,

$$[T]_{\beta'} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Logo, T é diagonalizável.

Teorema: Seja $T: V \rightarrow V$ op. linear, $\dim V = n$. Se $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ são autovalores de T então T é diagonalizável se e só se, $\dim V = \sum_{i=1}^r \dim V_{\lambda_i}$.

10

Seja $T: V \rightarrow V$ um operador linear, onde V é um espaço vetorial de dimensão finita, tal que $P_T(x) = (x - \lambda_1)^{n_1} \dots (x - \lambda_r)^{n_r}$. Temos que $\dim V = \sum_{i=1}^r n_i$. Pelo Teorema acima podemos ver que $\dim V_{\lambda_i} = n_i$, e somente n_i , para cada i , $m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i)$.

TEOREMA: Seja $T: V \rightarrow V$ um operador linear, onde V tem dimensão finita e sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ os seus autovalores distintos. As seguintes afirmações são equivalentes:

- a) T é diagonalizável.
- b) $P_T(x) = (x - \lambda_1)^{n_1} \dots (x - \lambda_r)^{n_r}$, $n_i \geq 1$ e $m_g(\lambda_i) = m_a(\lambda_i)$, $\forall i = 1, \dots, r$.
- c) $\dim V = \sum_{i=1}^r \dim V_{\lambda_i}$.

Exemplos:

(a) Seja $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y) \mapsto (-y, x)$

Se $\beta = \{(1, 0), (0, 1)\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}$ então

$$[T]_{\beta} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Também

$$P_T(t) = \det \left(t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{pmatrix} = t^2 + 1.$$

Como $P_T(t) = t^2 + 1$ não tem raízes reais, segue que T não possui autovalores. Se ao invés de $\mathbb{R}^2$ tivéssemos $\mathbb{C}^2$ (como $\mathbb{C}$ -espaço) então $T: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ dado por $T(x, y) = (-y, x)$ teria o mesmo polinômio característico e autovalores i e $-i$.

9

POLINÔMIOS CARACTERÍSTICOS E MÍNIMOS DE OPERADORES LINEARES

Suponhamos $T: V \rightarrow V$ um op. linear em V $\dim V < \infty$. O polinômio característico $P_T(x)$ de T é o polinômio característico da qqua representação matricial de T .

Teo. Cayley-Hamilton: $P_T(T) = 0$.

Teo: $\lambda \in K$ é autovalor de $T \Leftrightarrow \lambda$ é raiz de $P_T(x)$.

A multiplicidade algébrica de um autovalor $\lambda \in K$ de T é definida como sendo a multiplicidade de λ como uma raiz do polinômio característico de T . A multiplicidade geométrica de λ é a dimensão do espaço V_λ .

$$m_g(\lambda) = \dim V_\lambda, \quad m_a(\lambda) = n_i.$$

$$P_T(x) = (x - \lambda)^{n_i} q(x).$$

Teorema: A multiplicidade geométrica de λ não excede sua multiplicidade algébrica, isto é, $m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$.

Prova: Sup. que $m_g(\lambda) = r$. Então λ contém r autovetores l.i. $v_1, \dots, v_r$.
Estenda o cay. $\{v_i\}$ a uma base de V : $\beta = \{v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_s\}$. Temos

$$T(v_1) = \lambda v_1$$

$$T(v_i) = \lambda v_i$$

$$\vdots$$

$$T(v_r) = \lambda v_r$$

$$T(w_1) = a_{11}v_1 + \dots + a_{1r}v_r + b_{11}w_1 + \dots + b_{1s}w_s$$

$$\vdots$$

$$T(w_s) = a_{s1}v_1 + \dots + a_{sr}v_r + b_{s1}w_1 + \dots + b_{ss}w_s$$

Logo a matriz de T em relação a β é:

$$M = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & a_{11} & \dots & a_{1r} \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & a_{r1} & \dots & a_{rs} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & \dots & b_{1s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{s1} & \dots & b_{ss} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda I_r & A \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

$$A = (a_{ij})^t$$

$$B = (b_{ij})^t$$

$$P_{\lambda I_r}(t) = (t - \lambda)^r$$

$P_{\lambda I_r}$ divide $P_n(x)$ ou $P_T(x)$.

Assim:
 $m_a(\lambda) \geq r$.

$$P_T(x) \in \det(\pi I - M) = (t - \lambda)^r \det(t I - B)$$

(... $v_1, \dots, v_r$ não formam base de V .)

(t - λ) inclui

$$(m(t)q(t) = \underbrace{f(t)}_{\text{é irredutível}} s(t) \Rightarrow m(t) = f(t) \cdot s_1 \text{ ou } q(t) = f(t) \cdot s_2)$$

Prova Teorema 1: Suponha que $f(t)$ é um polinômio tal que $f(A)=0$. Pelo algoritmo da divisão $f(t) = m(t)q(t) + r(t)$, $q(t), r(t)$ polinômios e $r(t)=0$ ou $\text{grau}(r) < \text{grau}(m)$. Substituindo A em $f(t)$, obtemos $0 = f(A) = m(A)q(A) + r(A)$. Como $m(A)=0$, segue que $r(A)=0$. Se $r(t) \neq 0$, então $r(t)$ é um polinômio de grau menor que o grau de $m(t)$ e como $r(A)=0$, isto contradiz o fato que $m(t)$ é mínimo. Logo, $r(t)=0$ e $f(t) = m(t)q(t)$, portanto, $m(t)$ divide $f(t)$.

$$(p(\lambda) = (\lambda - a)^2(\lambda^2 + 1)); (m(\lambda) = (\lambda - a)^2(\lambda^2 + 1)).$$

Teorema 2: $\forall$ esp. vet. $\dim V < \infty$ sobre $\mathbb{K}$, $T \in L(V, V)$. Então os polinômios característico e minimal de T têm as mesmas raízes, a menos de multiplicidade.

Dem.: Sejam p_T e $m_T = \sum_{i=0}^m a_i x^i$ os polinômios característico e minimal de T , resp. Suponha que $p_T(\lambda) = 0$. Nesse caso, λ é um autovalor de T e existe $v \neq 0$ tal que $T(v) = \lambda v$ e para qualquer $i \geq 1$ temos ainda que $T^i(v) = \lambda^i v$. Assim,

$$0 = m_T(T)(v) = \left(\sum_{i=0}^m a_i T^i \right)(v) = \left(\sum_{i=0}^m a_i \lambda^i \right)(v)$$

Como $v \neq 0$ então $\sum_{i=0}^m a_i \lambda^i = 0$ e $m_T(\lambda) = 0$. Reciprocamente, suponha que $m_T(\lambda) = 0$. Assim, m_T é divisível por $(x - \lambda)$ e

$$m_T(x) = (x - \lambda)q(x)$$

Como $\text{grau}(q(x)) < \text{grau}(m_T(x))$ então $q(T) \neq 0$. Seja $u \neq 0$ tal que $q(T)u \neq 0$.

$$\text{Tomos que } 0 = m_T(T)u = (T - \lambda I)q(T)u$$

$$\text{e } T(q(T)u) = \lambda q(T)u$$

donde, $q(T)u$ é autovetor de T associado a λ , λ é autovalor, logo, $p_T(\lambda) = 0$.

Polinômio Mínimo

Seja A uma matriz quadrada $n \times n$ sobre K . Observemos que existem polinômios não-nulos $f(t)$ tais que $f(A) = 0$. Entre esses polinômios, consideremos o de mais baixo grau (polinômio mônico). Tal polinômio é chamado de polinômio minimal de A .

Teorema 1: O polinômio minimal de A , $m(t)$, divide todo polinômio que anula A . Em particular, $m(t)$ divide o polinômio característico, $p(t)$, de A .

Teorema 2: Os polinômios minimal e característico de uma matriz A têm os mesmos fatores irredutíveis.

Este teorema nos diz que qualquer fator irredutível de um desses polinômios deve dividir o outro. Em particular, como todo fator linear é irredutível, $m(t)$ e $p(t)$ têm os mesmos fatores lineares; portanto, têm as mesmas raízes.

Teorema 3: Um escalar λ é um autovalor p/ uma matriz A se, e somente se, λ é raiz do polinômio minimal de A .
($\rightarrow p(\lambda) = 0 \Rightarrow m(\lambda) = 0$)

Exemplo: Encontre o polinômio minimal $m(t)$ da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

O polinômio característico de A é $p(t) = \det(tI - A) = (t-2)^3(t-5)$. Pelo Teo. 2, ambos $t-2$ e $t-5$ devem ser fatores de $m(t)$. pois pelo Teo. 1, $m(t)$ deve dividir $p(t)$; portanto, $m(t)$ deve ser um dos três polinômios:

$$m_1(t) = (t-2)(t-5), \quad m_2(t) = (t-2)^2(t-5), \quad m_3(t) = (t-2)^3(t-5)$$

Pelo Teo. Cayley-Hamilton, $m_3(A) = p(A) = 0$. Como $m_1(A) \neq 0$ e $m_2(A) = 0$, segue que $m_2(t) = (t-2)^2(t-5)$ é o polinômio mínimo de A .

7

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Teorema: Seja A uma matriz quadrada $n \times n$ sobre $\mathbb{K}$. Um escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ é um autovalor de A se, e somente se, λ é uma raiz do polinômio característico de A .

Prova: λ é autovalor $\Leftrightarrow \lambda I - A$ é singular. Além disso, $\lambda I - A$ é singular $\Leftrightarrow \det(\lambda I - A) = 0$, isto é, λ é raiz de $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$.

Corolário: Se o polinômio característico $p(\lambda)$ de uma matriz quadrada A é um produto de fatores lineares distintos:

$$p(\lambda) = (\lambda - a_1) \dots (\lambda - a_n)$$

a_i são autovalores de A com v_i autovetores p.i. $\Rightarrow Av_i = \lambda v_i$

isto é, $a_1, \dots, a_n$ são raízes distintas de $p(\lambda)$, então A é semelhante a uma matriz diagonal cujos elementos diagonais são os a_i .

Como os a_i são distintos $\Rightarrow v_i$ são p.i. $i=1, \dots, n$.

$$B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix}$$

Corolário: Tomando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ então $A_{n \times n}$ sobre $\mathbb{C}$ tem pelo menos um autovalor.

Exemplo: Seja $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Seu polinômio característico é

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 - \lambda & -5 \\ 0 & 1 & -2 - \lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda^2 + 1)$$

Temos dois casos a considerar:

- (1) A é uma matriz sobre $\mathbb{R}$. Então, A tem somente o autovalor 3.
- (2) A é uma matriz sobre $\mathbb{C}$. Então A tem três autovalores distintos: 3, i e $-i$. Assim, existe uma matriz inversível P sobre $\mathbb{C}$ para a qual

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

Agora, suponhamos que A e B sejam semelhantes, digamos, $B = P^{-1}AP$, onde

P é inversível. Temos que

$$\begin{aligned} \det(tI - B) &= \det(tI - P^{-1}AP) = \det(P^{-1}tIP - P^{-1}AP) \\ &= \det(P^{-1}(tI - A)P) = \det P^{-1} \det(tI - A) \det P \\ &= \det(tI - A). \end{aligned}$$

Teo.: Matrizes semelhantes têm o mesmo polinômio característico.

(6)

Prova: Seja A uma matriz $n \times n$ cujo polinômio característico é:

$$\det(tI - A) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_1t + a_0$$

Seja $B(t)$ a adjunta de $tI - A$. Os elementos de B são cofatores de $tI - A$ e, portanto, são polinômios em t de grau não excedendo $n-1$.

Assim,

$$B = B_{n-1}t^{n-1} + \dots + B_1t + B_0,$$

$$B = (\text{cof } A)^t \quad (A_1 = tI - A)$$

onde as B_i são matrizes quadradas $n \times n$ sobre $\mathbb{K}$ indep. de t .

$$(tI - A)B = \det(tI - A)I$$

ou

$$(*) \quad (tI - A)(B_{n-1}t^{n-1} + \dots + B_1t + B_0) = (t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_1t + a_0)I$$

Reagrupando o produto no lado esq. de (*) obtemos:

$$B_{n-1} = I$$

$$B_{n-2} - AB_{n-1} = a_{n-1}I$$

$\vdots$

$$B_0 - AB_1 = a_1I$$

$$-AB_0 = a_0I$$

Multiplicando a eq. matricial acima por $A^n, A^{n-1}, \dots, A, I$, resp obtemos:

$$A^n B_{n-1} = A^n$$

$$A^{n-1} B_{n-2} - A^n B_{n-1} = a_{n-1} A^{n-1}$$

$\vdots$

$$AB_0 - A^2 B_1 = a_1 A$$

$$-AB_0 = a_0 I$$

Somando as eq. matriciais acima

$$0 = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 I.$$

5

Exemplo: Consideremos a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. A tem dois autovetores independentes $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Faça $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$; logo,

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

Então, A é semelhante à matriz diagonal

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

4 e -1 são os autovalores de A.

POLINÔMIO CARACTERÍSTICO. TEOREMA DE CAYLEY-HAMILTON

Consideremos uma matriz quadrada A de ordem n sobre um

corpo K:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

A matriz $tI_n - A$, $I_n \in M_{n \times n}(K)$ é chamada a matriz característica de A

$$tI_n - A = \begin{pmatrix} t - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & t - a_{nn} \end{pmatrix}$$

Seu determinante $\det(tI_n - A)$, polinômio em t, é chamado polinômio característico de A. $\det(tI_n - A) = 0$ é a eq. característica de A.

$$\det(tI_n - A) = (t - a_{11})(t - a_{22}) \dots (t - a_{nn}) + \text{termos (ordem} < n-1)$$

Assim: $\det(tI_n - A) = t^n - (a_{11} + \dots + a_{nn})t^{n-1} + \text{termos de grau menor.}$
(polinômio mônico de grau n)

Teorema (Cayley-Hamilton): Toda matriz é um zero de seu polinômio característico.

Ex.: O polinômio característico de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ é

$$\det(tI - A) = t^2 - 3t - 4 = p(t)$$

$$p(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^2 - 3 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

④ Agora subtraindo (3) de (2) obtemos

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_n)v_1 + \dots + a_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_n)v_{n-1} = 0$$

Por indução, cada um dos coeficientes acima é 0. Como os λ_i são distintos, $\lambda_i - \lambda_n, i \neq n$. Segue que $a_i = 0, i = 1, \dots, n-1$. Substituindo em (1), temos $a_nv_n = 0$ e, portanto, $a_n = 0$. Assim, os v_i são l.i.

DIAGONALIZAÇÃO E AUTOVETORES

Seja $T: V \rightarrow V$ um op. linear num espaço vetorial V de dimensão finita n . Note que T pode ser representado por uma matriz diagonal.

$$\begin{pmatrix} k_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k_n \end{pmatrix}$$

Se, e somente se, existe uma base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ de V para a qual

$$T(v_1) = k_1 v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_n$$

$$T(v_2) = 0v_1 + k_2 v_2 + \dots + 0v_n$$

$$\vdots$$

$$T(v_n) = 0v_1 + 0v_2 + \dots + k_n v_n,$$

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k_n \end{bmatrix}$$

isto é, tal que os vetores $v_1, \dots, v_n$ são autovetores de T associados, respectivamente, a autovalores $k_1, \dots, k_n$. Em outras palavras,

Teorema 3: Um operador linear T pode ser representado por uma matriz diagonal B se, e somente se, V tem uma base consistindo de autovetores de T . Neste caso, os elementos diagonais de B são os autovalores correspondentes.

Forma alternada do Teorema: Uma matriz quadrada A de ordem n é semelhante a uma matriz diagonal B se, e somente se, A tem n autovetores l.i. Neste caso, os elementos diagonais de B são os autovalores correspondentes.

No teorema dado, se P é a matriz cujas colunas são os n autovetores independentes de A , então $B = P^{-1}AP$.

(3)

O sistema homogêneo acima tem solução não-nula $\Leftrightarrow$

$$\det \begin{pmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -3 & \lambda-2 \end{pmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda-4)(\lambda+1) = 0.$$

Assim, λ é um autovalor de A , $\Leftrightarrow \lambda=4$ ou $\lambda=-1$.

Daí: para $\lambda=4$

$$\begin{cases} 3x-2y=0 \\ -3x+2y=0 \end{cases} \Rightarrow 3x-2y=0$$

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Fazendo $\lambda=-1$: obtém $x+y=0$ daí: $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$

Teorema: $T: V \rightarrow V$ op. linear num espaço vetorial sobre K . Então $\lambda \in K$ é um autovalor de T se, e somente se, o operador $\lambda I - T$ é singular. O auto-espaço de λ é o núcleo de $\lambda I - T$.

Dem.: λ é um autovalor de T se, e somente se, existe um vetor não-nulo v tal que

$$T(v) = \lambda v \text{ ou } (\lambda I)(v) - T(v) = 0 \text{ ou } (\lambda I - T)(v) = 0$$

isto é, $\lambda I - T$ é singular. Além disso, $v \in V_\lambda \Leftrightarrow$ As relações acima acontecem; portanto, $v \in N(\lambda I - T)$.

Teorema 2: Autovetores não-nulos pertencentes a autovalores distintos são linearmente independentes.

Dem.: Demonstração por indução. Se $n=1$, então v_1 é l.i., pois $v_1 \neq 0$.

Admita que $n > 1$. Suponha

$$(1) \quad a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0$$

onde os a_i são escalares. Aplicando T à relação acima, obtemos por linearidade

$$a_1 T(v_1) + \dots + a_n T(v_n) = T(0) = 0$$

Por hipótese

$$(2) \quad a_1 \lambda_1 v_1 + \dots + a_n \lambda_n v_n = 0$$

Por outro lado multiplicando (1) por λ_n , obtemos:

$$(3) \quad a_1 \lambda_n v_1 + \dots + a_n \lambda_n v_n = 0$$

(2)

AUTOVALORES E AUTOVETORES

Seja $T: V \rightarrow V$ um operador linear num espaço vetorial V sobre um corpo K . Um escalar $\lambda \in K$ é autovalor de T , se $\exists$ um vetor $v \in V$, $v \neq 0$, para o qual

$$(*) \quad T(v) = \lambda v.$$

v que satisfaz $(*)$ é chamado autovetor de T correspondente ao autovalor λ .

Note que kv é um autovetor de T , pois

$$T(kv) = kTv = k(\lambda v) = (k\lambda)v = \lambda(kv).$$

O conjunto: $V_\lambda = \{v \in V: T(v) = \lambda v\}$ é um auto-espaço de λ .

vetor característico = autovetor,
valor " = autovalor.

Exemplo 1: $I: V \rightarrow V$ identidade. $I(v) = 1 \cdot v$, $\forall v$. Logo, 1 é autovalor de I e todo $v \in V$ é autovetor de correspondente a 1.

Exemplo 2: Seja $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o operador linear que gira cada vetor $v \in \mathbb{R}^2$ de um ângulo de 90° . Note que nenhum vetor não-nulo é um múltiplo de si mesmo. Portanto, T não tem autovalores; logo, não tem autovetores.

$$T(x, y) = (-y, x)$$

Exemplo 3: Seja D o operador diferencial no espaço vetorial V de funções diferenciáveis. Tem-se que $D(e^{5t}) = 5e^{5t}$. Portanto, 5 é um autovalor de D com autovetor e^{5t} .

Se A é uma matriz quadrada $n \times n$ sobre K , então um autovalor de A , pode ser encarado como $Av = \lambda v$, $v \in K^n$.

Exemplo: Encontre os autovalores e autovetores de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Procuramos um escalar λ : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e $AX = \lambda X$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\text{ou} \quad \begin{cases} x + 2y = \lambda x \\ 3x + 2y = \lambda y \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} (\lambda - 1)x + 2y = 0 \\ (\lambda - 2)y - 3x = 0 \end{cases}$$

AUTOVALORES E AUTOVETORES

POLINÔMIOS DE MATRIZES E OPERAÇÕES LINEARES

Seja $f(t)$ sobre $\mathbb{K}$; $f(t) = a_n t^n + \dots + a_1 t + a_0$. Se A é uma matriz quadrada sobre $\mathbb{K}$, então definimos

$$f(A) = a_n A^n + \dots + a_1 A + a_0 I,$$

onde I é a matriz identidade. Em particular, A é uma raiz ou zero de $f(t)$ se $f(A) = 0$.

Exemplo: Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Sejam $f(t) = 2t^2 - 3t + 7$, $g(t) = t^2 - 5t - 2$. Então

$$f(A) = 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^2 - 3 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 14 \\ 21 & 39 \end{pmatrix},$$

$$g(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^2 - 5 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, A é um zero de $g(t)$, mas não é um zero de $f(t)$.

Teorema 1: Sejam f e g polinômios sobre $\mathbb{K}$ e A uma matriz $n \times n$ sobre $\mathbb{K}$. Então,

$$(i) (f+g)(A) = f(A) + g(A)$$

$$(ii) (fg)(A) = f(A)g(A)$$

$$(iii) (kf)(A) = kf(A), \quad \forall k \in \mathbb{K}.$$

Além disso, como $f(t)g(t) = g(t)f(t)$ então
 $f(A)g(A) = g(A)f(A)$.

Seja $T: V \rightarrow V$ um operador linear num espaço vetorial V sobre $\mathbb{K}$. Se $f(t) = a_n t^n + \dots + a_1 t + a_0$ então $f(T)$ é definido por:

$$f(T) = a_n T^n + \dots + a_1 T + a_0 I$$

I é a transf. identidade. T é zero de $f(t)$ se $f(T) = 0$.

Além disso, se A é uma representação matricial de T , então $f(A)$ é representação matricial de $f(T)$. Em particular, $f(T) = 0 \Leftrightarrow f(A) = 0$.

(6)

DEM.: Sejam $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V e $\gamma = \{w_1, \dots, w_m\}$ base de W .

considere $\beta^* = \{f_1, \dots, f_n\}$ dual a β e $\gamma^* = \{g_1, \dots, g_m\}$ dual a γ .

Por definição $f_i(v_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \dots, n$ e $g_k(w_l) = \delta_{kl}$, $k, l = 1, \dots, m$. Sejam

$$[T]_{\beta, \gamma} = (a_{ki})_{k,i} \quad 1 \leq k \leq m \text{ e } 1 \leq i \leq n \text{ e } [T^t]_{\gamma^*, \beta^*} = (b_{ik})_{i,k} \quad 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m$$

as matrizes de T e T^t com relação às bases indicadas. Por definição, temos

$$T(v_i) = \sum_{k=1}^m a_{ki} w_k, \quad i=1, \dots, n \text{ e}$$

$$(*) \quad T^t(g_k) = \sum_{i=1}^n b_{ik} f_i, \quad k=1, \dots, m$$

Temos também que

$$T^t(g_k) = \sum_{i=1}^n (T^t(g_k)(v_i)) f_i, \quad k=1, \dots, m$$

Comparando com $(*)$ temos: $b_{ik} = T^t(g_k)(v_i)$. segue que:

$$b_{ik} = T^t(g_k)(v_i) = g_k(T(v_i)) = g_k\left(\sum_{l=1}^m a_{li} w_l\right) = \sum_{l=1}^m a_{li} g_k(w_l) = \sum_{l=1}^m a_{li} \delta_{kl} = a_{ki}.$$

Logo, $a_{ki} = b_{ik}$ e, portanto,

$$[T]_{\beta, \gamma}^t = [T^t]_{\gamma^*, \beta^*}. \quad \square$$

COROLÁRIO. Seja $A = (a_{ij})_{i,j} \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$. Então o posto-linha de A é igual ao posto-coluna de A .

Dem.: Sejam β e γ as bases canônicas de $\mathbb{K}^n$ e $\mathbb{K}^m$ resp. Considere

$T: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ a transf. linear tal que $[T]_{\beta, \gamma} = A$. segue que

$$T(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_m) \text{ onde } y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \quad 1 \leq i \leq m$$

Observe que o posto-coluna de A é o posto de T . Como $[T^t]_{\gamma^*, \beta^*} = A^t$,

segue que o posto de T^t = posto-coluna de A^t = posto-linha de A . Como

posto T^t = posto T , temos o resultado.

Exemplo: $T: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^3$

$$T(1, i) = (2+i, i-1, -1)$$

$$T(0, i) = (1, 1, i)$$

$$(x, y) \rightarrow (2x+y, y-x, iy)$$

$$\text{e } \gamma = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\} \text{ de } \mathbb{C}^3.$$

Considere as bases $\beta = \{(1, i), (0, i)\}$ de $\mathbb{C}^2$

$$[T]_{\beta, \gamma} = \begin{pmatrix} 2+i & 1 \\ i-1 & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \quad [T^t]_{\gamma^*, \beta^*} = \begin{pmatrix} 2+i & i-1 & -1 \\ 1 & 1 & i \end{pmatrix}$$

(5)

Agora, $f \in N(T)^\perp \Leftrightarrow f(T(u)) = 0 \forall u \in V \Leftrightarrow f(v) = 0, \forall v \in \text{Im } T \Leftrightarrow f \in (\text{Im } T)^\perp$.

(b) Vamos supor que $\dim U = n$ e $\dim V = m$. Teremos

$$\dim V^* = \dim V$$

$$\dim V^* = \dim N(T^t) + \dim \text{Im}(T^t)$$

$$\dim V = \dim \text{Im } T + \dim (\text{Im } T)^\perp$$

segue que

$$\dim \text{Im}(T^t) = \dim V^* - \dim N(T^t) = \dim V - \dim (\text{Im } T)^\perp = \dim \text{Im } T$$

e portanto, $\text{posto } T = \text{posto } T^t$.

(c) Seja $\varphi \in \text{Im } T^t$. Então existe $g \in V^*$ tal que $\varphi = T^t(g)$. Observe que

$$\varphi(u) = T^t(g)(u) = (g \circ T)(u), \forall u \in V. \text{ Agora, se } u \in N(T), \text{ então } \varphi(u) = g(T(u)) = g(0) = 0.$$

Logo, $\varphi(u) = 0$ para todo $u \in N(T)$ e, portanto, $\varphi \in (N(T))^\perp$.

Sabemos que

$$\dim V = \dim N(T) + \dim (N(T))^\perp$$

Por outro lado,

$$\dim V = \dim N(T) + \dim \text{Im } T$$

Portanto, $\dim \text{Im } T = \dim (N(T))^\perp$. Pelo item (a), concluímos que $\dim \text{Im } T^t = \dim (N(T))^\perp$.

TEOREMA: Sejam V e W espaços vetoriais sobre K , ambos de dimensão finita.

Sejam β uma base de V , β^* a base dual a β , γ uma base de W , γ^* a base dual a γ . Se T é uma transf. linear de V em W , então

$$[T]^t_{\beta^*, \gamma^*} = [T^t]_{\gamma, \beta}.$$

(isto é, a transposta da matriz de T em relação às bases β e γ é igual à matriz da transposta de T em relação às bases γ^* e β^*).

(4)

TEOREMA: Sejam U, V espaços vetoriais sobre K e $T: U \rightarrow V$ uma transf. linear. Então existe uma única transf. linear $T^t: V^* \rightarrow U^*$ dada por $T^t(g)(u) = g(T(u))$ para todo $g \in V^*$ e todo $u \in U$.

DEFINIÇÃO: A transformação T^t acima é a transposta de T .

Exemplo: Seja $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $(x, y) \rightarrow (2x - y, x - y, 3y)$

Então $T^t: (\mathbb{R}^3)^* \rightarrow (\mathbb{R}^2)^*$ é dada por

$$T^t(f)(x, y) \rightarrow f(2x - y, x - y, 3y)$$

Por exemplo, se $f_1: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $f_1(z_1, z_2, z_3) = z_1 + 2z_2 - 3z_3$, então

$$\begin{aligned} T^t(f_1)(x, y) &= f_1(2x - y, x - y, 3y) \\ &= 2x - y + 2(x - y) - 3(3y) \\ &= 4x - 12y. \end{aligned}$$

e se $f_2: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é $f_2(z_1, z_2, z_3) = 3z_3$, então $T^t(f_2)(x, y) = 3y$.

TEOREMA: Sejam U, V espaços vetoriais sobre K e $T \in L(U, V)$. Então

$$(a) \ N(T^t) = (\text{Im } T)^\circ.$$

$$(b) \ \text{posto}(T^t) = \text{posto } T$$

$$(c) \ \text{Im}(T^t) = (N(T))^\circ.$$

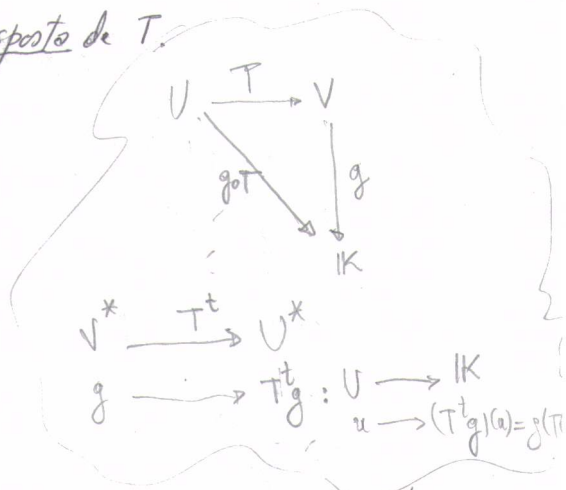
DEM.: (a) Observe que

$$N(T^t) = \{ f \in V^* : T^t(f) = 0 \}$$

$$= \{ f \in V^* : T^t(f)(u) = 0, \forall u \in U \}$$

$$= \{ f \in V^* : f(T(u)) = 0, \forall u \in U \}$$

$$(\text{Im } T)^\circ = \{ f \in V^* : f(v) = 0, \forall v \in \text{Im } T \}.$$



③

Por outro lado,

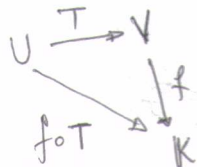
$$T(\lambda f_1 + f_2)(v) = (\lambda f_1 + f_2)(v) = \lambda f_1(v) + f_2(v) = (\lambda T(f_1) + T(f_2))(v).$$

Falta mostrar que T é bijetora.

Seja $f \in W^0$ um funcional tal que $T(f) = 0$, isto é, $0 = T(f)(v) = f(v)$, $\forall v \in V$.
 Como $f \in W^0$ segue que $f(v+w) = 0 \quad \forall v+w \in V \oplus W$. ($f(v+w) = f(v) + f(w) = 0 + 0 = 0$.)
 Logo, $f = 0$ e T é injetora. Por outro lado, dado $g \in V^*$, definimos $f: V \rightarrow K$
 dado por $f(v+w) = g(v)$. É claro que $f \in W^0$ ($f(w) = f(0+w) = g(0) = 0$) e que
 $T(f) = g$ ($T(f)(v) = f(v) = g(v)$) e, portanto, T é sobrejetora.
 Logo, W^0 e V^* são isomorfos. Analogamente, mostra-se que V^0 e W^* são isomorfos.

TRANSPOSTAS DE TRANSFORMAÇÕES

Sejam U e V espaços vetoriais sobre K e seja $T: U \rightarrow V$ uma transf. linear.
 observe que se $f \in V^*$, então a composta $f \circ T: U \rightarrow K$ é um elemento de U^* .



Portanto, podemos definir a função

$$\begin{aligned} T^t: V^* &\longrightarrow U^* \\ f &\longmapsto T^t(f): U \longrightarrow K \\ u &\longmapsto T^t(f)(u) = (f \circ T)(u) \end{aligned}$$

T^t é linear, isto é,

$$T^t(\lambda f_1 + f_2) = \lambda T^t(f_1) + T^t(f_2) \quad \lambda \in K, f_1, f_2 \in V^*.$$

De fato,

$$\begin{aligned} T^t(\lambda f_1 + f_2)(u) &= (\lambda f_1 + f_2)(T(u)) = \lambda f_1(T(u)) + f_2(T(u)) \\ &= (\lambda T^t(f_1) + T^t(f_2))(u) = (\lambda T^t(f_1) + T^t(f_2))(u). \end{aligned}$$

(2)

Uma conta simples mostra-nos que

$$(x, y, z, t) = (-x - 2z, -x - z, y, t + 3z)_B.$$

Segue do resultado acima que $\{f_3, f_4\}$ é uma base de W^0 , onde

$$\begin{aligned} f_3: \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathbb{R} & f_4: \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z, t) &\mapsto y & (x, y, z, t) &\mapsto 3z + t. \end{aligned}$$

TEOREMA: Seja U um espaço vetorial sobre K . Se $U = V \oplus W$, então $U^* = V^0 + W^0$, V^* é isomorfo a W^0 e W^* é isomorfo a V^0 .

DEM.: Como $U = V \oplus W$ então cada $u \in U$ é escrito de maneira única como $u = v + w$, $v \in V$ e $w \in W$. $V \cap W = \{0\}$.

Queremos mostrar primeiro que:

(i) se $f \in U^*$ então $\exists g \in V^0$ e $h \in W^0$ t.q. $f = g + h$.

(ii) $V^0 \cap W^0 = \{0\}$.

Para $f \in U^*$, vamos definir $g, h \in U^*$ como segue.

$$\begin{aligned} g: V \oplus W &\rightarrow K & h: V \oplus W &\rightarrow K \\ v + w &\mapsto f(w) & v + w &\mapsto f(v). \end{aligned}$$

Temos que $g \in V^0$ e $h \in W^0$ ($g(v) = g(v+0) = f(0) = 0$) e

$$f(v+w) = f(v) + f(w) = h(v+w) + g(v+w) = (h+g)(v+w).$$

$\forall v+w \in V \oplus W$ o que prova (i).

Para verificarmos $V^0 \cap W^0 = \{0\}$, seja $f \in V^0 \cap W^0$. Então $f(v+w) = f(v) + f(w) = 0$ para cada $v+w \in V \oplus W = U$, logo, $f = 0$. Assim $U^* = V^0 \oplus W^0$.

Para mostrarmos que V^* é isomorfo a W^0 , consideremos a função

$$\begin{aligned} T: W^0 &\rightarrow V^* \\ f &\mapsto T(f): V \rightarrow K \\ v &\mapsto T(f)(v) = f(v). \end{aligned}$$

É claro que, como f é linear, então $T(f)$ é linear e, portanto, $T(f) \in V^*$.

(1)

ANULADORES

Definição: Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e seja $S \subseteq V$ um subconjunto de V . Chamamos de anulador de S ao subconjunto $S^\circ = \{f \in V^*: f(u) = 0, \forall u \in S\}$.

Obs.: a) Sejam V esp. vet. e $S \subseteq V$. Então S° é um subespaço vetorial de V^* (mesmo que S não seja subespaço de V). De fato, observe que $f=0$ pertence a S° . Dados $\lambda \in \mathbb{K}$ e $f_1, f_2 \in S^\circ$ então $\lambda f_1 + f_2 \in S^\circ$, pois,

$$(\lambda f_1 + f_2)(u) = \lambda f_1(u) + f_2(u) = 0, \text{ para } u \in S.$$

$$b) S = \{0\} \text{ então } S^\circ = V^*$$

$$c) S = V \text{ então } S^\circ = \{0\}. \quad (f(u) = 0, \forall u \in S = V \Rightarrow f = 0)$$

TEOREMA. Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$ e $W \subseteq V$ um subespaço de V . Então

$$\dim V = \dim W + \dim W^\circ.$$

Dem.: Considere $\dim V = n$ e $\dim W = m$. Seja $\beta' = \{v_1, \dots, v_m\}$ uma base de W e complete-a para uma base de V : $\beta = \{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n\}$. Seja $\beta^* = \{f_1, \dots, f_n\}$ a base dual de β ; isto é, $f_i(v_j) = \delta_{ij}$. Vamos provar que $\gamma = \{f_{m+1}, \dots, f_n\}$ é base de W° . Como $\gamma \subset W^\circ$ e $\gamma \in V^*$, basta mostrar que γ é um conj. gerador para W° . ($f_j(v_i) = 0$ p/ $j \geq m+1$ e $1 \leq i \leq m$). Se $f \in V^*$, sabemos que $f = \sum_{i=1}^n f(v_i) f_i$. Se $f \in W^\circ$, temos que $f(v_i) = 0, \forall 1 \leq i \leq m$. Portanto, teremos que $f = \sum_{i=m+1}^n (f(v_i)) f_i$ e γ gera W° . $\square$

Exemplo: Sejam $V = \mathbb{R}^4$ e W o subespaço de V gerado pelos vetores $v_1 = (1, 0, -1, 3)$ e $v_2 = (-2, 0, 1, -3)$. Vamos calcular uma base de W° . Como $\beta' = \{v_1, v_2\}$ é um conjunto l.i., segue que é de fato uma base de W . Vamos completar esta base p/ obtemos uma base de V . Um possível complemento é $\beta = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ onde $v_3 = (0, 1, 0, 0)$ e $v_4 = (0, 0, 0, 1)$. Vamos calcular $\beta^* = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ dual à base β . Vimos anteriormente que, se $v = (x_1, x_2, x_3, x_4)_\beta$, então f_i é definida por $f_i(v) = x_i$.

10

Exemplos:

(a) $V = \mathbb{R}^3$: $H_1 = \{ (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3 : z_2 = 0 \}$ $H_1 = N(f_1)$, $f_1(z_1, z_2, z_3) = z_2$
 $H_2 = \{ (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3 : z_1 + z_2 - z_3 = 0 \}$ $f_2(z_1, z_2, z_3) = z_1 + z_2 - z_3$.

(b) $H = \{ g \in \mathcal{C}([a, b]; \mathbb{R}) : \int_a^b g(x) dx = 0 \}$ é um hiperplano de $\mathcal{C}([a, b]; \mathbb{R})$.
 $H = N(\phi)$ onde: $\phi: \mathcal{C}([a, b]; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$
 $g \rightarrow \int_a^b g(x) dx$.

(c) V esp. vet. sobre $\mathbb{K}$ e H hiperplano de V . Definir o conj.

$$v_0 + H = \{ v_0 + v : v \in H \}$$

hiperplano afim de V . $v_0 + H$ é subespaço de $V \iff v_0 \in H$.

(d) Considere o hiperplano

$$H = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \}$$

de $\mathbb{R}^3$ e o vetor $v_0 = (-1, 3, 2) \in \mathbb{R}^3$. O hiperplano afim $v_0 + H$ será, neste caso,

$$\begin{aligned} v_0 + H &= \{ (-1, 3, 2) + (x_1, x_2, x_3) : x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \} \\ &= \{ (z_1, z_2, z_3) : z_1 + 3z_2 - 2z_3 = 4 \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(-1 + x_1, 3 + x_2, 2 + x_3) \\ &-1 + x_1 + 3(3 + x_2) - 2(2 + x_3) = 0 \\ &-1 + x_1 + 9 + 3x_2 - 4 - 2x_3 = 0 \\ &x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4. \end{aligned}$$

H é o plano de $\mathbb{R}^3$ dado por $x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0$.

Por outro lado, o hiperplano afim $v_0 + H$ é o plano paralelo a H passando por v_0 .

$$(z_1, z_2, z_3) = (x_1 - 1, x_2 + 3, x_3 + 2)$$

$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0$$

(39)

Obs.: Seja V um esp. vet. sobre K de dimensão $n \geq 1$ e seja $f \in V^*$ um funcional não-nulo. Então $\text{Im} f = K$ e, portanto, $\dim N(f) = \dim V - \dim \text{Im} f = n - 1$. Usando a proposição anterior podemos concluir que $N(f)$ é um hiperplano de V .

TEOREMA: Seja V um K -espaço vetorial não-nulo. Se $f \in V^*$ é um funcional linear não nulo, então $N(f)$ é um hiperplano de V . Inversamente, se H é um hiperplano de V , então existe um funcional linear não-nulo $f \in V^*$ tal que $N(f) = H$.

Dem.: Seja $0 \neq f \in V^*$ e denote $H = N(f)$. Como $f \neq 0$, temos que $H \neq V$. Para mostrarmos que H é um hiperplano, considere H' um subespaço de V com $H \subsetneq H' \subseteq V$. Vamos supor que $H \neq H'$ e mostraremos que $H' = V$. Como $H' \neq H$, existe $v_0 \in H' \setminus H$. Assim $f(v_0) \neq 0$. Seja agora $v \in V$ e considere $u = v - \frac{f(v)}{f(v_0)} \cdot v_0$. Observe que $u \in N(f)$

pois

$$f(u) = f\left(v - \frac{f(v)}{f(v_0)} \cdot v_0\right) = f(v) - \frac{f(v)}{f(v_0)} f(v_0) = 0$$

Como $N(f) = H \subseteq H'$, segue que $u \in H'$ e, como $v_0 \in H'$, temos que $v = u + \frac{f(v)}{f(v_0)} v_0 \in H'$. Logo, $H' \supseteq V$. Portanto, $V = H'$. Logo $N(f)$ é um hiperplano de V .

Seja agora H um hiperplano de V . Queremos definir $f \in V^*$ tal que $N(f) = H$. Considere um vetor $v_0 \in V \setminus H$ (existe, pois $H \neq V$). Seja H' o subespaço gerado por H e v_0 . Como $H' \neq H$ e H é um hiperplano, temos $H' = V$. Portanto, cada elemento $v \in V$ se escreve como $v = u + \lambda v_0$, $\lambda \in K$ e $u \in H$. Observe que tal $\lambda \in K$ e $u \in H$ são únicos. De fato, se $v = u + \lambda v_0 = u' + \lambda' v_0$ então $u - u' = (\lambda' - \lambda) v_0$. Se $\lambda' \neq \lambda$ então $0 \neq (\lambda' - \lambda) v_0 = u - u' \in H$, o que implica $v_0 \in H$, contradizendo, pois, $v_0 \notin H$. Logo, $u' = u$ e $\lambda' = \lambda$. Defina $f: V \rightarrow K$ por $f(u + \lambda v_0) = \lambda$. Pela observação acima, f está bem definida. Além disso, $f(v_0) = 1$ e, portanto, $f \neq 0$, também $f \in V^*$ e $N(f) = H$. Todo elemento $u \in H$ é escrito como:

$$u = u + 0 \cdot v_0 \Rightarrow f(u) = f(u + 0 v_0) = 0.$$

(2)8

um subespaço de V tal que $W \subseteq W' \subseteq V$, então ou $W = W'$ ou $W' = V$. De fato, seja $\beta = \{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ uma base de W . Se β for um conj. gerador de W' , então β é uma base de W' e portanto $W' = W$. Suponha agora que β não gera W' e seja $v_n \in W'$ que não seja combinação linear dos elementos de β . Temos que $\beta' = \{v_1, \dots, v_{n-1}, v_n\}$ é l.i. em W' . Como $\dim V = n$ então β' será uma base de V e, como $\beta' \subseteq W'$, temos que $V \subseteq W'$, logo, $W' = V$. Um tal subespaço W é chamado de Hiperplano. Por exemplo, no espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ os seus hiperplanos serão os planos que passam pela origem.

DEFINIÇÃO: Seja V um espaço vetorial não-nulo. Um hiperplano de V é um subespaço próprio W tal que se W' for um subespaço de V satisfazendo $W \subseteq W' \subseteq V$, então $W' = W$ ou $W' = V$. (dimensão finita ou não).

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita $n \geq 1$. Vimos que todo subespaço de dimensão $n-1$ é um hiperplano. A recíproca também vale.

PROPOSIÇÃO: Sejam V um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão $n \geq 1$ e W um subespaço próprio de V . Então W é um hiperplano de V se e somente se $\dim W = n-1$.

Dem.: Seja W um hiperplano de V . Queremos mostrar que $\dim W = n-1$. Como $W \neq V$, então $\dim W < \dim V$. Se $n=1$ não há o que mostrar. Suponha $n \geq 2$ e que $\dim W \leq n-2$. Então existe uma base β' de W com menos de $n-1$ elementos. Seja $v \in V, v \notin W$ (tal v existe pois W é um subespaço próprio de V). Como v não é combinação linear dos elementos de β' segue que $\beta = \beta' \cup \{v\}$ é l.i. Seja W' o subespaço gerado pelos elementos de β . Temos então que $W \subseteq W' \subseteq V$ e $W' \neq W$ (pois $v \in W'$ mas $v \notin W$) e $W' \neq V$ (uma vez que $\dim W' \leq n-1 < \dim V$), o que contradiz a nossa hipótese de que W é um hiperplano. $\square$

①②

REFLEXIVIDADE

Seja agora V um espaço vetorial sobre K , com $\dim V = n$ e seja $\mathcal{B} = \{f_1, \dots, f_n\}$ uma base de V^* . Queremos construir uma base β de V tal que $\beta = \beta^*$. Primeiro, consideremos a base dual a $\mathcal{B}$; isto é, a base $\mathcal{B}^* = \{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ de V^{**} tal que $\phi_i(f_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \dots, n$. Pelo resultado acima, Φ é um isomorfismo e aí o conj. $\{\Phi(\phi_1), \dots, \Phi(\phi_n)\}$ é uma base de V . Denotando $v_i = \Phi(\phi_i)$, teremos que $\Phi(v_i) = \phi_i$. Segue da definição de Φ que $\phi_i = \phi_i$, $i = 1, \dots, n$. Usando agora o fato que $\phi_i(f_j) = \delta_{ij}$ concluímos que

$$\delta_{ij} = \phi_i(f_j) = \phi_{v_i}(f_j) = f_j(v_i), \quad i, j = 1, \dots, n,$$

e, portanto, as bases $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\mathcal{B} = \{f_1, \dots, f_n\}$ são duais. ■

Mostramos acima o Corolário.

COROLÁRIO. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre K . Então toda base de V^* é a dual de alguma base de V .

Dizemos que um espaço vetorial V é reflexivo se a função Φ construída acima for um isomorfismo. Mostramos acima que todo espaço vetorial de dimensão finita é reflexivo. Considere $V = P(\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}$ e seja $\mathcal{B}$ uma base de V^* . Segue que $\mathcal{B}$ não é enumerável e portanto $\mathcal{B}^*$ é um conj. não-enumerável p.i. Com isso, V^{**} terá uma base não-enumerável. Concluímos então que V^{**} não pode ser isomorfo a V pois V tem uma base enumerável. Portanto, $P(\mathbb{R})$ não é reflexivo.

HIPERPLANOS

Seja V um espaço vetorial de dimensão $n \geq 1$ sobre K , e seja $W \subseteq V$ um subespaço com dimensão $n-1$. Observe que W é um subespaço próprio de V e é maximal. Em outras palavras, W tem a seguinte propriedade: se W' for

6

Vamos mostrar agora que Φ é injetora. Seja $v \in V$ tal que $\Phi(v) = 0$, isto é, tal que ϕ_v seja o funcional nulo. Com isso, $\phi_v(f) = f(v) = 0, \forall f \in V^*$. Segue que $v = 0$ e, portanto, Φ é injetora. $\square$

Exercício: V um esp. vet. sobre $\mathbb{K}$ e $v \in V$. Mostre que se $f(v) = 0, \forall f \in V^*$, então $v = 0$.

Prova: $\dim V = n < \infty$. Tome $f = \frac{f_1 + \dots + f_n}{f_j} \neq 0$. Seja $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \neq 0$.

Ten que $0 = f(v) = f(\sum \alpha_i v_i) = \sum \alpha_i f(v_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i (\sum_j f_j(v_i)) = \alpha_i \Rightarrow \underline{v = 0}$.

Em geral, Φ não é sobrejetora. Mas pode acontecer em alguns casos.

TEOREMA. Seja V um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão finita. Então

$$\begin{aligned} \Phi: V &\longrightarrow V^{**} \\ v &\longmapsto \phi_v \end{aligned}$$

é um isomorfismo.

DEM-: Observe que $\dim V^{**} = \dim V^* = \dim V$

$$V^{**} = L(V^*, \mathbb{K}) \quad \dim V^* = n \text{ e } \dim \mathbb{K} = 1 \quad \dim L(V^*, \mathbb{K}) = n \cdot 1 = n.$$

* Φ é injetora. Segue que Φ é isomorfismo.

O ESPAÇO BIDUAL

Se $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ for uma base de V , vimos que existe uma base $\beta^* = \{f_1, \dots, f_n\}$ de V^* que satisfaz $f_i(v_j) = \delta_{ij} \forall i, j = 1, \dots, n$. Questão: Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e dada uma base $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ de V , existe uma base $\beta^* = \{f_1, \dots, f_n\}$ de V^* tal que $f_i(v_j) = \delta_{ij}$?

DEFINIÇÃO: Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Chamamos o espaço $(V^*)^*$ de espaço bidual de V e denotamos por V^{**} .

Por definição: $\phi \in V^{**} \Leftrightarrow \phi: V^* \rightarrow \mathbb{K}$ funcional linear.

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Observe que $\forall v \in V$ podemos associar um $\phi_v \in V^{**}$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \phi_v: V^* &\rightarrow \mathbb{K} \\ f &\mapsto \phi_v(f) = f(v). \end{aligned}$$

ϕ_v é linear. De fato, $f_1, f_2 \in V^*$ e $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\phi_v(\lambda f_1 + f_2) = (\lambda f_1 + f_2)(v) = \lambda f_1(v) + f_2(v) = \lambda \phi_v(f_1) + \phi_v(f_2).$$

Logo: $\phi_v \in V^{**}$.

LEMA: A função $\Phi: V \rightarrow V^{**}$ dada por $\Phi(v) = \phi_v$ é linear e injetora.

DEM.: Vamos mostrar que Φ é linear. De fato, se $v_1, v_2 \in V$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, precisamos mostrar que $\Phi(\lambda v_1 + v_2) = \lambda \Phi(v_1) + \Phi(v_2)$, isto é, $\phi_{\lambda v_1 + v_2} = \lambda \phi_{v_1} + \phi_{v_2}$. Para tanto, vamos mostrar que, $\forall f \in V^*$, vale a igualdade $\phi_{\lambda v_1 + v_2}(f) = (\lambda \phi_{v_1} + \phi_{v_2})(f)$. Por um

lado vale

$$\phi_{\lambda v_1 + v_2}(f) = f(\lambda v_1 + v_2) = \lambda f(v_1) + f(v_2)$$

e, por outro, vale

$$(\lambda \phi_{v_1} + \phi_{v_2})(f) = \lambda \phi_{v_1}(f) + \phi_{v_2}(f) = \lambda f(v_1) + f(v_2).$$

④

OBS.: Se V é um espaço vetorial de dimensão finita e $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ é uma base ordenada de V , construímos como acima uma base ordenada

$\beta^* = \{f_1, \dots, f_n\}$ de V^* tal que $f_i(v_j) = \delta_{ij}$ $\forall i, j = 1, \dots, n$. Agora

se V for um espaço vetorial com $\dim V = +\infty$ e $\beta = \{v_i\}_{i \in I}$ for uma base de V , podemos também construir um conj. $\beta^* = \{f_i\}_{i \in I}$

em V^* tal que $f_i(v_j) = \delta_{ij}$ para $i, j \in I$. Este conj. será li. mas

não será uma base de V^* . Vamos dar um exemplo, seja $P(\mathbb{R}) = V$.

Seja β a base canônica de V . $\{1, t, t^2, \dots\} = \beta$. Observe que o conj.

$\beta^* = \{f_i\}_{i \in I}$ construído como acima é enumerável (pois, β é enumerável).

Vamos mostrar que β^* não gera $(P(\mathbb{R}))^*$. De fato, para cada $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, considere o funcional linear $f_\alpha: P(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$f_\alpha(p(t)) = p(\alpha)$. Se f_α pertencesse ao subespaço gerado por β^* , existiriam

$\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tais que $f = \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i$. Calculando este funcional no

$$\alpha^{m+1} = f_\alpha(t^{m+1}) = \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i f_i \right)(t^{m+1}) = \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(t^{m+1}) = 0.$$

Logo, $\alpha = 0$, contradizendo! $\square$

(3)

(c) Considere um espaço vetorial V e uma base β^* de V^* , vamos procurar uma base β de V tal que β^* seja sua base dual. Seja $V = P_2(\mathbb{R})$ e considere os seguintes funcionais: (em $(P_2(\mathbb{R}))^*$)

$$f_1: P_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_2: P_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_3: P_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R},$$

$$p(t) \mapsto p(1) \quad p(t) \mapsto p(2) \quad p(t) \mapsto p(3)$$

isto é, $f_i(p(t)) = p(i)$, $i=1,2,3$. $\beta^* = \{f_1, f_2, f_3\}$ é uma base de V^* .

De fato, $f \in P_2(\mathbb{R})^* \Leftrightarrow f: P_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$

$$p(t) \mapsto f(p(t)) = r_p$$

Seja que:

$$r_p = a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3? \text{ Tome: } a_1 = \frac{r_p}{p(1)}, a_2 = 0, a_3 = 0.$$

$$r_p = \frac{r_p}{p(1)} p(1) + 0 \cdot p(2) + 0 \cdot p(3) = r_p.$$

Vamos mostrar que é l.i.

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0.$$

Escolha: $p_1(t) = (t-2)(t-3)$ daí: $p_1(1) = 2$, $p_1(2) = 0$, $p_1(3) = 0$.

$$\text{Logo: } \lambda_1 f_1(p_1(t)) + \lambda_2 f_2(p_1(t)) + \lambda_3 f_3(p_1(t)) = 0$$

$$\text{ou seja: } \lambda_1 \cdot 2 + 0 \cdot \lambda_2 + 0 \cdot \lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0.$$

escolhendo $p_2(t) = (t-1)(t-3)$ e $p_3(t) = (t-1)(t-2)$ obtemos:

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 0. \text{ Como } \dim(P_2(\mathbb{R})^*) = \dim P_2(\mathbb{R}) = 3$$

então $\{f_1, f_2, f_3\}$ é base de $(P_2(\mathbb{R}))^*$.

Queremos encontrar uma base $\beta = \{p_1(t), p_2(t), p_3(t)\}$ de V tal que $f_i(p_j(t)) = \delta_{ij}$ $i, j = 1, 2, 3$. Como $f_i(p(t)) = p(i)$ então queremos polinômios

p_1, p_2 e p_3 tais que $p_i(j) = \delta_{ij}$. Tome $p_1(t) = \frac{(t-2)(t-3)}{2}$, $p_2(t) = -\frac{(t-1)(t-3)}{2}$

$$\text{e } p_3(t) = \frac{(t-1)(t-2)}{2}.$$

(2)

EXEMPLOS:

(a) Sejam $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 1, -1)$ e $v_3 = (0, 1, 1)$ em $\mathbb{R}^3$. Observe que $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$. Vamos calcular a base dual $\beta^* = \{f_1, f_2, f_3\}$ de $(\mathbb{R}^3)^*$. Teremos então que $f_i(v_j) = \delta_{ij}$ para $i, j = 1, 2, 3$. Escrevendo um elemento $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ em função da base β , temos:

$$(*) \quad (x, y, z) = \alpha_1(1, 1, 1) + \alpha_2(1, 1, -1) + \alpha_3(0, 1, 1)$$

isto é, $(x, y, z) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)_\beta$. Com isso,

$$f_i(x, y, z) = f_i(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)_\beta = \alpha_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Basta então calcularmos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ em função de x, y, z . De (*):

$$\text{temos: } \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = x \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = y \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = z \end{cases} \Rightarrow \alpha_3 = y - x \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \frac{2x + z - y}{2} \\ \alpha_2 = \frac{y - z}{2} \end{cases}$$

Portanto,

$$f_1(x, y, z) = \frac{2x + z - y}{2}, \quad f_2(x, y, z) = \frac{y - z}{2}, \quad f_3(x, y, z) = y - x.$$

(b) Seja $V = P_2(\mathbb{R})$ e considere a base $\beta = \{1, t+1, t^2+t\}$. Um elemento $p(t) = a_2t^2 + a_1t + a_0 \in V$ pode ser escrito em função da base β como:

$$p(t) = (a_0 - a_1 + a_2)1 + (a_1 - a_2)(t+1) + a_2(t^2+t)$$

isto é, as coordenadas de $p(t)$ em relação à base β são $(a_0 - a_1 + a_2, a_1 - a_2, a_2)$, ou seja, $p(t) = (a_0 - a_1 + a_2, a_1 - a_2, a_2)_\beta$. Dessa maneira a base dual

$\beta^* = \{f_1, f_2, f_3\}$ é tal que $f_1(a_2t^2 + a_1t + a_0) = a_0 - a_1 + a_2$, $f_2(a_2t^2 + a_1t + a_0) = a_1 - a_2$

$$\text{e } f_3(a_2t^2 + a_1t + a_0) = a_2.$$

①

TEOREMA: Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre K e seja $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ uma base de V . Então existe uma única base $\beta^* = \{f_1, \dots, f_n\}$ de V^* tal que $f_i(v_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \dots, n$. Além disto, $\forall v \in V$, temos que

$$v = \sum_{i=1}^n f_i(v) v_i$$

e para cada $f \in V^*$, temos que

$$f = \sum_{i=1}^n f(v_i) f_i.$$

DEM.: Mostramos acima que $\exists$ funcionais lineares $f_1, \dots, f_n$ tais que $f_i(v_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \dots, n$ e que $\beta^* = \{f_1, \dots, f_n\}$ é uma base de V^* e também que $v = \sum_{i=1}^n f_i(v) v_i$, para cada $v \in V$. Falta mostrar a última igualdade do enunciado. Para tanto, considere $f \in V^*$ e observe que $\exists \beta_1, \dots, \beta_n \in K$ tais que $f = \sum_{i=1}^n \beta_i f_i$. Vamos usar a definição das f_i para descobrir os escalares β_i . Calculando f no vetor v_j temos:

$$f(v_j) = \left(\sum_{i=1}^n \beta_i f_i \right)(v_j) = \sum_{i=1}^n \beta_i f_i(v_j) = \sum_{i=1}^n \beta_i \delta_{ij} = \beta_j.$$

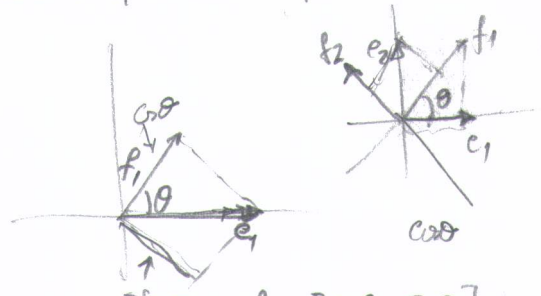
Isto prova que $f = \sum_{i=1}^n f(v_i) f_i$. ■

A base β^* definida acima é chamada de base dual a β . A relação entre as bases β e β^* nos diz que se $v \in V$, então as coordenadas deste vetor com relação à base β são $f_1(v), \dots, f_n(v)$, isto é, $[v]_{\beta} = (f_1(v), \dots, f_n(v))_{\beta}$. Além disso, as coordenadas de um dado $f \in V^*$ com relação à base β^* são $f(v_1), \dots, f(v_n)$, isto é, $f = (f(v_1), \dots, f(v_n))_{\beta^*}$. Dizemos então que existe uma dualidade entre estas bases.

Queremos achar $[T]_{\beta'}^{\beta}$. Vamos escrever e_1 e e_2 em funç de f_1 e f_2 .

$$e_1 = \cos \theta f_1 - \sin \theta f_2$$

$$e_2 = \sin \theta f_1 + \cos \theta f_2$$



$$[T]_{\beta'}^{\beta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$[v]_{\beta'} = [T]_{\beta'}^{\beta} [v]_{\beta}$$

Como sub-exemplo: Se $\theta = \pi/3$ para

$$v = (-2, 3), \text{ isto é, } \begin{matrix} \beta = \{e_1, e_2\} \\ \beta' = \{f_1, f_2\} \end{matrix}$$

$$v = -2e_1 + 3e_2$$

$$\text{temos } [v]_{\beta'} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ que é } [v]_{\beta'} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta = -2 \cos \frac{\pi}{3} + 3 \sin \frac{\pi}{3}$$

$$y_2 = -x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta = 2 \sin \frac{\pi}{3} + 3 \cos \frac{\pi}{3}$$

$$[v]_{\beta'} = \begin{bmatrix} \frac{-2+3\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3+2\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

$$v = \left(\frac{-2+3\sqrt{3}}{2} \right) f_1 + \left(\frac{3+2\sqrt{3}}{2} \right) f_2$$

(10)

claro que se pode resolver

$$(5, -8) = a(2, -1) + b(3, 4).$$

A inversa da matriz de Mudança de base

Se temos as base $\beta = \{u_1, \dots, u_n\}$ e $\beta' = \{w_1, \dots, w_n\}$ e começamos escrevendo os u_i em função dos w_j chegaremos à relação

$$[u]_{\beta'} = [I]_{\beta'}^{\beta} [u]_{\beta}$$

as matrizes $[I]_{\beta'}^{\beta}$ e $[I]_{\beta}^{\beta'}$ são inversíveis

$$([I]_{\beta'}^{\beta})^{-1} = [I]_{\beta}^{\beta'} \quad ([I]_{\beta}^{\beta'})^{-1} = [I]_{\beta'}^{\beta}$$

~~Nota:~~ No ex. anterior podemos obter $[I]_{\beta}^{\beta'}$ a partir de $[I]_{\beta'}^{\beta}$. Note que $[I]_{\beta'}^{\beta}$ é fácil de se calcular, pois β' é a base canônica

$$(2, -1) = 2(1, 0) - 1(0, 1)$$

$$(3, 4) = 3(1, 0) + 4(0, 1)$$

donde $[I]_{\beta'}^{\beta} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

então $[I]_{\beta}^{\beta'} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{11} & -\frac{3}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix}.$

Ex. 2: Consideremos em $\mathbb{R}^2$ a base $\beta = \{e_1, e_2\}$ e a base $\beta' = \{f_1, f_2\}$ obtida da base β pela rotação de um ângulo θ . Dado um vetor $v \in \mathbb{R}^2$ de coord.

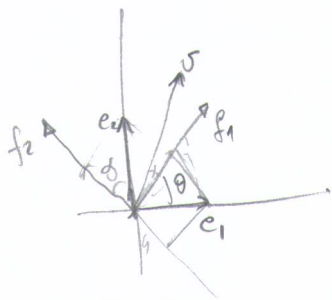
$$[v]_{\beta} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

em rel. à base β , quais as coord.

$$[v]_{\beta'} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

em rel. à base β' ?

$$v = x_1 e_1 + x_2 e_2 = y_1 f_1 + y_2 f_2$$



$$e_1 = x f_1 + y f_2$$

$$x = \cos \theta, y = \sin \theta$$

$$e_1 = \cos \theta f_1 - \sin \theta f_2$$

$$e_2 = \sin \theta f_1 + \cos \theta f_2$$

e quando calculamos $[v]_{\beta'} = [I]_{\beta'}^{\beta} [v]_{\beta}$

8

Isto é, denotando

$$[I]_{\beta}^{\beta'} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Temos

$$[v]_{\beta} = [I]_{\beta}^{\beta'} [v]_{\beta'}$$

A matriz $[I]_{\beta}^{\beta'}$ é chamada matriz de mudança de base β' para a base β .

Compare $[I]_{\beta}^{\beta'}$ com $(**)$ e note que esta matriz é obtida, colocando as coordenadas em relação a β de w_i na i -ésima coluna. Notamos também que uma vez encontrada $[I]_{\beta}^{\beta'}$ podemos obter as coordenadas de qualquer vetor v em relação à base β , multiplicando a matriz pelas coord. de v na base β'

Ex.: Sejam $\beta = \{(2,-1), (3,4)\}$ e $\beta' = \{(1,0), (0,1)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$. Proceamos $[I]_{\beta}^{\beta'}$

$$w_1 = (1,0) = a_{11}(2,-1) + a_{21}(3,4)$$

$$\text{donde } (1,0) = (2a_{11} + 3a_{21}, -a_{11} + 4a_{21}) \text{ o que implica em } a_{11} = \frac{4}{11} \text{ e } a_{21} = \frac{1}{11}.$$

$$w_2 = (0,1) = a_{12}(2,-1) + a_{22}(3,4)$$

$$\text{Resolvendo } a_{12} = -\frac{3}{11} \text{ e } a_{22} = \frac{2}{11}$$

Portanto,

$$[I]_{\beta}^{\beta'} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{11} & -\frac{3}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix}$$

Podemos usar essa matriz para encontrar, por exemplo, $[v]_{\beta}$ para

$$v = (5,-8)$$

$$[(5,-8)]_{\beta} = [I]_{\beta}^{\beta'} [v]_{\beta'}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{4}{11} & -\frac{3}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

isto é,

$$(5,-8) = 4(2,-1) - 1(3,4)$$

8

MUDANÇA DE BASE

Sejam $\beta = \{u_1, \dots, u_n\}$ e $\beta' = \{w_1, \dots, w_n\}$ duas bases ordenadas de um mesmo espaço vetorial V . Dado um vetor $v \in V$, podemos escrevê-lo

Como: $v = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n \quad (\beta)$

(*) $v = y_1 w_1 + \dots + y_n w_n \quad (\beta')$

Como podemos relacionar as coordenadas de v em relação à base β ,

$$[v]_{\beta} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

com as coordenadas do mesmo vetor v em relação à base β' ,

$$[v]_{\beta'} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Já que $\{u_1, \dots, u_n\}$ é base de V , podemos escrever como combinação linear dos u_j , isto é,

os w_i

$$(**) \begin{cases} w_1 = a_{11} u_1 + a_{21} u_2 + \dots + a_{n1} u_n \\ w_2 = a_{12} u_1 + a_{22} u_2 + \dots + a_{n2} u_n \\ \vdots \\ w_n = a_{1n} u_1 + a_{2n} u_2 + \dots + a_{nn} u_n \end{cases}$$

Substituindo em (*) temos

$$\begin{aligned} v &= y_1 w_1 + \dots + y_n w_n \\ &= y_1 (a_{11} u_1 + \dots + a_{n1} u_n) + \dots + y_n (a_{1n} u_1 + \dots + a_{nn} u_n) \\ &= (a_{11} y_1 + \dots + a_{n1} y_n) u_1 + \dots + (a_{1n} y_1 + \dots + a_{nn} y_n) u_n \end{aligned}$$

Como $v = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$ então

$$\begin{aligned} a_{11} y_1 + \dots + a_{n1} y_n &= x_1 \\ \vdots & \\ a_{1n} y_1 + \dots + a_{nn} y_n &= x_n \end{aligned}$$

ou

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

(23) COROLÁRIO: Sejam U e V dois espaços vetoriais de dimensão $n \geq 1$ sobre $\mathbb{K}$ e considere bases β e β' de U e V , resp. Uma transformação linear $T: U \rightarrow V$ é um isomorfismo $\Leftrightarrow$ a matriz $[T]_{\beta'}^{\beta}$ for invertível. Além disso,

$$([T]_{\beta'}^{\beta})^{-1} = [T^{-1}]_{\beta}^{\beta'}.$$

Demonstração: Suponha que T é um isomorfismo e seja T^{-1} sua inversa.

Como $T \circ T^{-1} = I_V$ e $T^{-1} \circ T = I_U$ temos:

$$[I_V]_{\beta'}^{\beta'} = [T \circ T^{-1}]_{\beta'}^{\beta'} = [T]_{\beta'}^{\beta} [T^{-1}]_{\beta}^{\beta'}$$

$$e \quad [I_U]_{\beta}^{\beta} = [T^{-1} \circ T]_{\beta}^{\beta} = [T^{-1}]_{\beta}^{\beta'} [T]_{\beta'}^{\beta}.$$

Como as matrizes $[I_V]_{\beta'}^{\beta'}$ e $[I_U]_{\beta}^{\beta}$ são as matrizes identidade $n \times n$, temos que $[T]_{\beta'}^{\beta}$ é invertível com inversa $[T^{-1}]_{\beta}^{\beta'}$. $\square$

MATRIZ DE MUDANÇA DE BASE

Seja U um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão $n \geq 1$ e sejam $\beta = \{u_1, \dots, u_n\}$ e $\beta' = \{v_1, \dots, v_n\}$ bases de U . Considere $M = (a_{ij})_{i,j} = [I]_{\beta'}^{\beta}$ associada à transformação identidade com rel. às bases β e β' , isto é, a matriz dos coeficientes:

$$u_1 = a_{11}v_1 + \dots + a_{n1}v_n = \sum a_{i1}v_i$$

$$\vdots$$

$$u_n = a_{1n}v_1 + \dots + a_{nn}v_n = \sum a_{in}v_i$$

Com isto se $v \in U$ e $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)_{\beta} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)_{\beta'}$ então

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{[I]_{\beta'}^{\beta}} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}_{\beta} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}_{\beta'}$$

$$[I]_{\beta'}^{\beta} [v]_{\beta} = [v]_{\beta'}$$

$M = [I]_{\beta'}^{\beta}$ é invertível.
(I é bijetora)
 $M^{-1} = [I]_{\beta}^{\beta'}$.

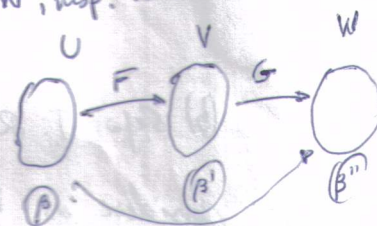
Sejam V e W espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ e considere as bases $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\alpha = \{w_1, \dots, w_m\}$ de V e W , respectivamente. Vimos acima que a cada transformação linear existe uma (única) matriz $M \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ tal que $[T]_{\alpha}^{\beta} = M$. A recíproca deste resultado também é verdadeira; isto é, dada uma matriz $M \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$, existe uma única transformação linear $T: V \rightarrow W$ tal que $[T]_{\alpha}^{\beta} = M$. ($x = (x_1, \dots, x_n) \in V$, $x = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$)

$$[T]_{\alpha}^{\beta} x = Mx = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

Dado: $Tx = y_1 w_1 + \dots + y_m w_m$.

TEOREMA: Sejam $F: U \rightarrow V$ e $G: V \rightarrow W$ transf. lineares, $\dim U = n$, $\dim V = m$ e $\dim W = r$. Fixe as bases β, β', β'' para U, V e W , resp. Então

$$[G \circ F]_{\beta''}^{\beta} = [G]_{\beta''}^{\beta'} [F]_{\beta'}^{\beta}$$



Demonstração: Sejam $\beta = \{u_1, \dots, u_n\}$, $\beta' = \{v_1, \dots, v_m\}$ e $\beta'' = \{w_1, \dots, w_r\}$ bases de U, V e W , resp., considere as matrizes

(1) $[F]_{\beta'}^{\beta} = (a_{ij})_{i,j}$, isto é, $F(u_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} v_i$, $\forall j=1, \dots, n$.

(2) $[G]_{\beta''}^{\beta'} = (b_{ki})_{k,i}$, isto é, $G(v_i) = \sum_{k=1}^r b_{ki} w_k$, $\forall i=1, \dots, m$.

(3) $[G \circ F]_{\beta''}^{\beta} = (c_{kj})_{k,j}$, isto é, $(G \circ F)(u_j) = \sum_{k=1}^r c_{kj} w_k$, $\forall j=1, \dots, n$.

Vamos calcular $(G \circ F)(u_j)$:

$$\begin{aligned} (G \circ F)(u_j) &= G(F(u_j)) = G\left(\sum_{i=1}^m a_{ij} v_i\right) = \sum_{i=1}^m a_{ij} G(v_i) = \sum_{i=1}^m a_{ij} \left(\sum_{k=1}^r b_{ki} w_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^r \left(\sum_{i=1}^m b_{ki} a_{ij}\right) w_k. \end{aligned}$$

Assim: $c_{kj} = \sum_{i=1}^m b_{ki} a_{ij}$, $\forall j=1, \dots, n$ e $\forall k=1, \dots, r$.

Logo: $[G \circ F]_{\beta''}^{\beta} = [G]_{\beta''}^{\beta'} [F]_{\beta'}^{\beta}$.

(21)

DEFINIÇÃO. A matriz $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ é definida acima e é a matriz da transformação linear T com relação às bases β e β' e denotamos por $A = [T]_{\beta'}^{\beta}$. Quando $U = V$ e $\beta' = \beta$ então $[T]_{\beta}^{\beta} = [T]_{\beta}$.

Exemplo: (a) Seja $V = P_3(\mathbb{R})$. Considere $D: P_3(\mathbb{R}) \rightarrow P_3(\mathbb{R})$
 $p(x) \mapsto p'(x)$.

A matriz de D com relação à base canônica $\{1, x, x^2, x^3\}$ de V é

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$D1 = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3$$

$$Dx = 1 + 0x + 0x^2 + 0x^3$$

$$Dx^2 = 0 + 2x + 0x^2 + 0x^3$$

$$Dx^3 = 0 + 0x + 3x^2 + 0x^3$$

(b) Seja $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $T(x, y) = (2x + y, y - x, 3x)$ e considere as bases $\beta = \{(1, 2), (2, -1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e $\beta' = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

$$T(1, 2) = (4, 1, 3) = 4(1, 1, 1) + (-3)(0, 1, 1) + 2(0, 0, 1)$$

$$T(2, -1) = (3, -3, 6) = 3(1, 1, 1) + (-6)(0, 1, 1) + 9(0, 0, 1)$$

daí:

$$[T]_{\beta'}^{\beta} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -6 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}.$$

Agora se $v = (-2, 3)_{\beta}$ então

$$[Tv]_{\beta'} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -6 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}_{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ -12 \\ 23 \end{pmatrix}_{\beta'}$$

Se mudarmos a base β' para a base canônica, teremos:

$$[T]_{\text{can}}^{\text{can}} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Daí:

$$[T(-2, 3)]_{\text{can}} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -11 \\ 12 \end{pmatrix}_{\text{can}}. \text{ Note que: } (1, -12, 23)_{\beta'} = (1, -11, 12)_{\text{can}}$$

20

COROLÁRIO: Todo K -espaço vetorial de dimensão $n \geq 1$ é isomorfo a K^n .

Prova: Seja $\{u_1, \dots, u_n\}$ base de V esp. vet. sobre K de $\dim V = n$.

• $\{e_1, \dots, e_n\}$ base canônica de K^n . Considere a transf.

$$Te_i = u_i \Rightarrow T \text{ é linear e } w \in K^n \Rightarrow w = \sum \alpha_i e_i$$

$$T(w) = T(\sum \alpha_i e_i) = \sum \alpha_i Te_i = \sum \alpha_i u_i = v.$$

T é sobre $\Rightarrow T$ é isomorfismo.

MATRIZES DE TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Sejam V e W espaços vetoriais sobre K , $\dim V = n$ e $\dim W = m$, e $T: V \rightarrow W$ transf. linear. Sejam $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $B' = \{w_1, \dots, w_m\}$ bases de V e W , resp.

Vamos descrever os elementos Tv_i como combinação linear dos elementos de B' .

$$Tv_1 = a_{11}w_1 + \dots + a_{m1}w_m = \sum_{i=1}^m a_{i1}w_i$$

$\vdots$

$$Tv_n = a_{1n}w_1 + \dots + a_{mn}w_m = \sum_{i=1}^m a_{in}w_i$$

para certos $a_{ij} \in K$. Em geral, para $j=1, \dots, n$, temos então que

$$Tv_j = \sum_{i=1}^m a_{ij}w_i. \text{ Agora para } v = \sum \alpha_j v_j \in V \text{ segue que}$$

$$\begin{aligned} Tv &= T\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j v_j\right) = \sum_{j=1}^n \alpha_j Tv_j = \sum_{j=1}^n \alpha_j \left(\sum_{i=1}^m a_{ij}w_i\right) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m (\alpha_j a_{ij})w_i = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}\alpha_j\right)w_i. \end{aligned}$$

Se encontrarmos $\beta_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}\alpha_j$ teremos $Tv = \sum_{i=1}^m \beta_i w_i$. Em outras

palavras $[Tv]_{B'} = (\beta_1, \dots, \beta_m)_{B'}$ (coordenadas de Tv na base B')

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$$

$$A = [T]_{B'}^B$$

$$\text{Ou seja, } [Tv]_{B'} = A \cdot [v]_B$$

onde $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(K)$.

(19)

EXEMPLOS: (a) Considere $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $(x, y) \mapsto (-y, x, x+y)$

Observe que $N(T) = \{(x, y) : (-y, x, x+y) = (0, 0, 0)\} = \{(0, 0)\}$ e, portanto, T é injetora. Note que $(-1, 0, 0) \notin \text{Im } T \Rightarrow T$ não é sobre.

(b) Considere $P(\mathbb{R})$ conj. dos polinômios sobre $\mathbb{R}$ e

$$D: P(\mathbb{R}) \rightarrow P(\mathbb{R})$$

$$p(x) \mapsto p'(x).$$

é transf. linear dada pela derivada. Note que D não é injetora pois todo polinômio constante pertence a $N(D)$. Por outro lado D é sobre (pois todo polinômio de $P(\mathbb{R})$ tem primitiva).

(c) Considere o espaço $F(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ formado por todas as seqüências de elementos de $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Seja $T: F(\mathbb{N}, \mathbb{K}) \rightarrow F(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ dada por $T((x_i)_{i \in \mathbb{N}}) = (x_{i+1})_{i \in \mathbb{N}}$. T é linear. T é sobre uma vez que dada uma seqüência $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$, podemos considerar $x = (0, y_1, y_2, y_3, \dots)$ por termos

$$T(0, y_1, y_2, y_3, \dots) = (y_1, y_2, y_3, \dots)$$

Por outro lado, T não é injetora $N(T) = \{(x_1, 0, 0, \dots) : x_1 \in \mathbb{K}\}$

(d) Considere $S: F(\mathbb{N}, \mathbb{K}) \rightarrow F(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ dada por

$$S((x_1, x_2, x_3, \dots)) = (0, x_1, x_2, x_3, \dots) =$$

S é linear e injetora, pois $N(S) = \{0\}$. S não é sobre, pois a seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, com $x_1 = 1$, $x_j = 0$, $j \geq 2$ não é imagem de nenhuma seqüência de $F(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ por S .

Teorema: Dois espaços vetoriais de mesma dimensão finita são isomorfos.

Dem.: Se ambos forem nulos não há p/ demonstrar. Seja U e V de dimensão $n \geq 1$. Considere as bases $\{u_1, \dots, u_n\}$ e $\{v_1, \dots, v_n\}$ de U e V , resp. Sabemos que $\exists!$ transf. linear $T: U \rightarrow V$ tal que $Tu_i = v_i$. Vamos mostrar que T é sobrijetora. Seja $v = \sum \alpha_i v_i \in V$, $\alpha_i \in \mathbb{K}$. Se $u = \sum \alpha_i u_i \in U$ tem $Tu = T(\sum \alpha_i u_i) = \sum \alpha_i Tu_i = \sum \alpha_i v_i = v \Rightarrow T$ é sobre.

(18)

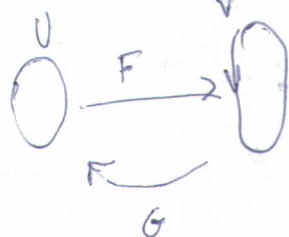
Prova obs.: Seja $T: U \rightarrow V$ isomorfismo. Sup. $\dim U = +\infty$. Em particular U possui cog. l.i. infinitos. Como T é injetora $\Rightarrow V$ também possui cog. l.i. infinitos e portanto, $\dim V = +\infty$. No caso em que $\dim U < +\infty$ Então $\dim U = \dim N(T) + \dim \text{Im} T = 0 + \dim \text{Im} T = \dim T(U) = \dim V$.

Já que T é sobre.

TRANSFORMAÇÕES INVERSAIS

Seja $F: U \rightarrow V$ bijetora. Em particular, $\forall v \in V, \exists! u_v \in U$ t.q. $F(u_v) = v$. Definimos $G: V \rightarrow U$ por $G(v) = u_v$. É claro que $F \circ G = I_V$ e $G \circ F = I_U$. G é a função inversa de F . Agora, se F for linear então G também é linear. De fato, sejam $u_1, u_2 \in U$ e sejam $v_1, v_2 \in V$ tais que $F(u_i) = v_i$.

Portanto,



$$G(v_1 + v_2) = G(F(u_1) + F(u_2)) = G(F(u_1 + u_2)) = G \circ F(u_1 + u_2) = u_1 + u_2 = G(v_1) + G(v_2).$$

$$G(\lambda v) = G(\lambda F(u)) = G(F(\lambda u)) = \lambda u = \lambda G(v).$$

Denotamos a inversa de $F: U \rightarrow V$ por $F^{-1}: V \rightarrow U$.

PROPOSIÇÃO: Sejam U e V dois espaços vetoriais sobre K de mesma dimensão $n \geq 1$ e $T: U \rightarrow V$ uma transf. linear. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) T é um isomorfismo.

(b) T é injetora.

(c) T é sobrejetora.

DEM.: As implicações (a) $\Rightarrow$ (b) e (a) $\Rightarrow$ (c) são óbvias. (b) $\Rightarrow$ (a) Suponha T injetora. Então $N(T) = \{0\}$ e portanto, $\dim N(T) = 0$. Temos que $\dim \text{Im} T = \dim U = \dim V = n \Rightarrow T$ é sobre e T é isomorfismo. (c) $\Rightarrow$ (a) Suponha T sobre, isto é, $\text{Im} T = V$. Segue que $\dim \text{Im} T = \dim V$. Logo, $\dim N(T) = 0 \Rightarrow N(T) = \{0\}$. Logo, T é isomorfismo.

(17)

assim

$$\sum \lambda_i v_i + \sum (-\gamma_j) u_j = 0$$

e como β' é l.i. $\Rightarrow \lambda_i = 0, i=1, \dots, m$. Portanto, β' é l.i.
 Logo, $\dim_{\mathbb{K}} U = n+m = \dim N(T) + \dim \text{Im } T$.

ISOMORFISMOS

DEFINIÇÃO: Sejam U e V dois espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$.

(i) Seja $T: U \rightarrow V$ linear. Se T for bijetora então dizemos que ela é um isomorfismo.

(ii) Se existir um isomorfismo $T: U \rightarrow V$ então U e V são espaços isomorfos e indicaremos por $U \cong V$.

Obs. Se U e V são isomorfos então $\dim U = \dim V$.

$$\left(\begin{array}{l} \dim V = \dim \text{Im } T = \dim U \\ \text{já que } \dim N(T) = 0. \end{array} \right)$$

LEMA: U, V espaços vetoriais $T: U \rightarrow V$ linear.

(a) Prove que T é injetora $\Leftrightarrow T$ leva cada conj. l.i. de U em conj. l.i. de V .
 (b) Prove que se $\{Tu_1, \dots, Tu_n\}$ for l.i. em V então $\{u_1, \dots, u_n\}$ é l.i. em U .

Prova: (a) T injetora: Tome $\{u_1, \dots, u_n, \dots\}$ conj. l.i. de $U \Rightarrow$

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0, \forall n.$$

Considere o ideq. $\{Tu_1, \dots, Tu_n, \dots\}$ infinito de V . $\Rightarrow$ considere a combinação linear

$$\alpha_1 Tu_1 + \dots + \alpha_n Tu_n = 0$$

$$\text{então } T(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n) = 0 \Rightarrow \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n \in N(T) = \{0\}$$

$$\text{Logo, } \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0 \forall n \Rightarrow \{Tu_1, \dots, Tu_n, \dots\} \text{ é l.i.}$$

$\Leftrightarrow$ Sup. A verdadeira. Sejam u e v tal que $Tu = Tv$. Tome uma base infinita de U . Então $u = \sum_{i=1}^p \lambda_i u_i, v = \sum_{j=1}^q \gamma_j u_j, (p \geq q)$. $\{Tu_i\}_{i=1}^p$ é l.i., $\{Tu_j\}_{j=1}^q$ é l.i.

$$T(\sum \lambda_i u_i) = T(\sum \gamma_j u_j) = T(\sum \lambda_i u_i - \sum \gamma_j u_j) = 0$$

$$\sum_{i=1}^p (\lambda_i - \gamma_i) u_i + \sum_{j=q+1}^p \gamma_j u_j = 0 \Rightarrow \lambda_i - \gamma_i = 0, \gamma_j = 0 \Rightarrow u = v.$$

LEMA. Sejam U e V espaços vetoriais sobre K e $T: U \rightarrow V$ uma transformação linear. Se $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ é uma base de U , então $\{T(u_1), \dots, T(u_n)\}$ gera

$\text{Im } T$.

Demonst.: Considere $v \in \text{Im } T$. Por definição $\exists u \in U$ tq. $Tu = v$. Escreva $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$,

com $\alpha_i \in K$. Calcule $T(u)$:

$$v = T(u) = T\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i T(u_i)$$

Logo, v é combinação linear de $T(u_i)$, $i=1, \dots, n$.

Exemplo: Considere $\mathbb{C}^2$ e $\mathbb{R}^3$ esp. vet. sobre $\mathbb{R}$. Seja $T: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a transf. linear

dada por: $T(a+bi, c+di) = (a-c, b+2d, a+b-c+2d)$

$a, b, c \in \mathbb{R}$. Se considerarmos a base $\{(1,0), (i,0), (0,1), (0,i)\}$ de $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{R}$, teremos,

pelo lema acima que os vetores $T(1,0) = (1,0,1)$, $T(i,0) = (0,1,1)$, $T(0,1) = (-1,0,1)$

e $T(0,i) = (0,2,2)$ geram $\text{Im } T$. Como $T(1,0) = -T(0,1)$, $T(i,0) = \frac{1}{2}T(0,i)$ e

$T(1,0)$ não é múltiplo de $T(i,0)$ segue $\{T(1,0), T(i,0)\}$ é uma base de $\text{Im } T$.

$$N(T) = [(1-i), (1+i)].$$

TEOREMA: Sejam U e V dois espaços vetoriais sobre K com $\dim_K U$ finita e

$T: U \rightarrow V$ uma transf. linear. Então

$$\dim_K U = \dim_K N(T) + \dim_K \text{Im } T.$$

Dem.: Suponha $N(T) \neq \{0\}$. Seja $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ uma base de $N(T)$. Observe que $N(T)$ tem dimensão finita. Podemos estender B a uma base $B' = \{u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_m\}$ de U .

Para mostrarmos o teorema, basta exibirmos ^{uma base} de $\text{Im } T$ com m elementos. Considere os

seguintes elementos de V : $T(u_1), \dots, T(u_n), T(v_1), \dots, T(v_m)$ e note que $T(u_i) = 0$, $i=1, \dots, n$.

Segue que $\{T(v_1), \dots, T(v_m)\} = B''$ é um conj. gerador de $\text{Im } T$. Vamos mostrar que B'' é

p.i. Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$ tais que $\sum_{i=1}^m \lambda_i T(v_i) = 0$. Mas $T(\sum_{i=1}^m \lambda_i v_i) = \sum_{i=1}^m \lambda_i T(v_i) = 0$,

logo, $\sum \lambda_i v_i \in N(T)$. Como B é base de $N(T)$ então $\sum \lambda_i v_i = \sum \gamma_j u_j$.

Demonstração: (a) $0 \in N(T)$ pois $T0=0$.

Se $u, v \in N(T)$ então $T(\lambda u + v) = \lambda Tu + Tv = \lambda \cdot 0 + 0 = 0$.

Logo, $\lambda u + v \in N(T)$. $N(T)$ é subespaço.

(b) Se T é injetora, então $N(T) = \{0\}$ pois $T0=0$. Suponha que $N(T) = \{0\}$ e sejam $u_1, u_2 \in U$ com $Tu_1 = Tu_2$. Então $0 = T(u_1) - T(u_2) = T(u_1 - u_2)$. Portanto, $u_1 - u_2 \in N(T) = \{0\}$ daí, $u_1 = u_2$. Logo, T é injetora.

Dada uma transformação linear $T: U \rightarrow V$, a dimensão do subespaço $\text{Im } T$ é também chamada de posto de T enquanto a dimensão de $N(T)$ é chamada de nulidade de T .

Exemplo: Considere a seguinte transformação linear

$$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow M_2(\mathbb{R})$$

$$(a, b, c) \mapsto \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & c-b \end{pmatrix}$$

Um elemento $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ pertence a $N(T) \Leftrightarrow a+b=0$ e $c-b=0 \Leftrightarrow$

$a=-b$ e $c=b$. Logo, $N(T) = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a=-b \text{ e } c=b\} = \{(-b, b, b) : b \in \mathbb{R}\}$

Nota que $\{(-1, 1, 1)\}$ é base de $N(T)$ e $\dim N(T) = 1$. Por outro lado, $\text{Im } T$ é formado pelas matrizes $M_2(\mathbb{R})$ da forma

$$\begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & c-b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}$. Portanto,

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

é um conj. gerador de $\text{Im } T$. Note B' não é l.i. e

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

é uma base de $\text{Im } T$. Em particular, $\dim_{\mathbb{R}} \text{Im } T = 2$. Note também que $\dim_{\mathbb{R}} N(T) + \dim_{\mathbb{R}} \text{Im } T = 1 + 2 = 3 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3$.

(14)

Teorema: Sejam U e V dois espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Se $\{u_1, \dots, u_n\}$ for uma base de U e se $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$, então existe uma única transformação linear $T: U \rightarrow V$ tal que $T(u_i) = v_i$, para cada $i = 1, \dots, n$.

Dem.: Como $\{u_1, \dots, u_n\}$ é base de $U \Rightarrow \exists$ únicos $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tais que $u = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$. Vamos definir $T(u)$ como $T(u) = \sum \lambda_i v_i \in V$. $T: U \rightarrow V$ está bem definida. É evidente que $T(u_i) = v_i$, $i = 1, \dots, n$. Vamos provar que T é linear. Sejam $u = \sum \beta_i u_i$ e $v = \sum \alpha_i u_i \in U$, $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{K}$, $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} T(\lambda u + v) &= T(\lambda \sum \beta_i u_i + \sum \alpha_i u_i) = T(\sum (\lambda \beta_i + \alpha_i) u_i) = \sum (\lambda \beta_i + \alpha_i) v_i \\ &= \lambda \sum \beta_i v_i + \sum \alpha_i v_i = \lambda T(\sum \beta_i u_i) + T(\sum \alpha_i u_i) \\ &= \lambda T u + T v. \end{aligned}$$

Logo, T é linear. T é única, sup $S: U \rightarrow V$ $S(u_i) = v_i$, $i = 1, \dots, n$.

$$u = \sum \lambda_i u_i \in U, \lambda_i \in \mathbb{K}, S(u) = S(\sum \lambda_i u_i) = \sum \lambda_i v_i = T(u).$$

NÚCLEO E IMAGEM

Definição: Sejam U e V dois espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $T: U \rightarrow V$ uma transformação linear.

- O conjunto $\{u \in U : Tu = 0\}$ é chamado de núcleo de T e denotaremos por $N(T)$.
- O conjunto $\{v \in V : \exists u \in U \text{ com } Tu = v\}$ é chamado de imagem de T e denotaremos por $\text{Im } T$.

$T: U \rightarrow V$ é sobrejetora se, e somente se, $\text{Im } T = V$.

Proposição: Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ e $T: U \rightarrow V$ uma transformação linear. Então

- $N(T)$ é um subespaço vetorial de U e $\text{Im } T$ é um subespaço vetorial de V .
- T é injetora $\Leftrightarrow N(T) = 0$.

(13)

Dem.: (a) $0 + T(0) = T(0) = T(0+0) = T(0) + T(0)$

Logo: $T(0) = 0$.

(b) $-u = (-1)u$

$$T(-u) = T((-1)u) = (-1)Tu = -Tu.$$

(c) $T(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n) = \alpha_1 Tu_1 + \dots + \alpha_n Tu_n$. $\square$

Ex.: U e V espaços vetoriais sobre K .

(a) $T: U \rightarrow V$, $T(u) = 0$, $\forall u$ e linear.

$Id: U \rightarrow U$, $Id(u) = u$, e linear.

(b) Se $a \in \mathbb{R}$, $T_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $T_a(x) = ax$, $\forall x \in \mathbb{R}$ e linear.

(c) $T: \mathbb{K}^3 \rightarrow M_2(\mathbb{K})$

$$(a, b, c) \mapsto T(a, b, c) = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & c-b \end{pmatrix} \text{ e linear.}$$

(d) $P(\mathbb{C})$

$D: P(\mathbb{C}) \rightarrow P(\mathbb{C})$

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n \mapsto \alpha_1 + 2\alpha_2 x + \dots + n\alpha_n x^{n-1}$$

D é a derivada. D é linear.

(e) $\mathcal{B}([a, b], \mathbb{R})$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

$T: \mathcal{B}([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$

$$f \mapsto T_f = \int_a^b f(x) dx \text{ e linear.}$$

(f) Sejam $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$. $T: K^n \rightarrow K$

$$T(x_1, \dots, x_n) = \sum \alpha_i x_i \text{ e linear.}$$

($T(e_i) = \alpha_i$.)

$$T(x_1, \dots, x_n) = T(\sum x_i e_i) = \sum x_i T(e_i).$$

(12) Dem.: sejam $B' = \{v_1, \dots, v_m\}$ base de W e $B = \{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n\}$ uma base de V contendo B' . Vamos mostrar que $C = \{\bar{v}_{m+1}, \dots, \bar{v}_n\}$ é base de V/W . Para mostrar que C é l.i. suponha que $\lambda_{m+1}\bar{v}_{m+1} + \dots + \lambda_n\bar{v}_n = \bar{0}$. Como $\lambda_j \in K$ e $j = m+1, \dots, n$. Então $\lambda_{m+1}v_{m+1} + \dots + \lambda_nv_n \in W \Rightarrow \exists \alpha_1, \dots, \alpha_m \in K$ tais que

$$\lambda_{m+1}v_{m+1} + \dots + \lambda_nv_n = \alpha_1v_1 + \dots + \alpha_mv_m$$

Com B l.i. segue que $\lambda_i = 0 = \alpha_i = 0$, assim C é l.i. Seja agora $\bar{v} \in V/W$. Como $v \in V \Rightarrow \exists \alpha_i \in K, 1 \leq i \leq n$, em $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$, segue que

$$\bar{v} = \overline{\alpha_1v_1 + \dots + \alpha_nv_n} = \alpha_1\bar{v}_1 + \dots + \alpha_n\bar{v}_n = \alpha_{m+1}\bar{v}_{m+1} + \dots + \alpha_n\bar{v}_n$$

e, portanto, $\bar{v}_{m+1}, \dots, \bar{v}_n$ geram V/W . C é base de V/W .

TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Definição: sejam U e V espaços vetoriais sobre um corpo K . Uma função $T: U \rightarrow V$ é uma transformação linear se

$$(1) T(u_1 + u_2) = Tu_1 + Tu_2, \forall u_1, u_2 \in U.$$

$$(2) T(\lambda u) = \lambda Tu, \forall \lambda \in K \text{ e } u \in U.$$

Lema: $T: U \rightarrow V$ é linear $\Leftrightarrow T(\lambda u + v) = \lambda Tu + Tv, \forall u, v \in U, \lambda \in K$.

Lema: sejam U e V espaços vetoriais sobre K e $T: U \rightarrow V$ uma transf. linear.

Então:

$$(a) T(0) = 0.$$

$$(b) T(-u) = -Tu, \forall u \in U.$$

$$(c) T(\sum \alpha_i u_i) = \sum \alpha_i Tu_i, \alpha_i \in K, u_i \in U$$

10

Propriedade: Sejam V um espaço vetorial finitamente gerado no $\mathbb{K}$ e W_1 um subespaço de V . Então existe um subespaço W_2 de V tal que $V = W_1 \oplus W_2$.

Dem.: Seja $\{v_1, \dots, v_m\}$ uma base do subespaço W_1 e estendamos a uma base $\{v_1, \dots, v_m, \dots, v_n\}$ de V . O subespaço vetorial W_2 gerado pelos vetores $\{v_{m+1}, \dots, v_n\}$ satisfaz as propriedades desejadas. De fato, é claro que $V = W_1 + W_2$ pois o conj. $\{v_1, \dots, v_m, \dots, v_n\}$ é um conj. gerador de V . Por outro lado, como $\{v_1, \dots, v_m, \dots, v_n\}$ é l.i., segue que $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

O subespaço W_2 como no teo. acima é chamado de complemento de W_1 em V .

Seja V um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial. Para subespaços $W_1, \dots, W_p$ de V , definimos

$$W_1 + \dots + W_p = \{v_1 + \dots + v_p, v_i \in W_i, i=1, \dots, p\}.$$

Se $W_i \cap (W_1 + \dots + W_{i-1} + W_{i+1} + \dots + W_p) = \{0\}$, $\forall i=1, \dots, p$, então $W_1 + \dots + W_p$ é chamada soma direta de $W_1 + \dots + W_p$ e indicaremos por $W_1 \oplus \dots \oplus W_p$.
 V é soma direta de $W_1, \dots, W_p$ se $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_p$.

ESPACOS QUOCIENTES

V espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, W subespaço de V

Dados $v_1, v_2 \in V$ dizemos que $v_1 \sim v_2$ se $v_1 - v_2 \in W$.

Relação de Equivalência:

- $v \sim v$, $\forall v \in V$ (reflexividade)
- Se $u \sim v$, $u, v \in V$ então $v \sim u$ (simetria)
- Se $u \sim v$ e $v \sim w$, $u, v, w \in V$ então $u \sim w$ (transitividade)

Para $v \in V$

$$\bar{v} = \{u \in V : u \sim v\}$$

Temos que

$$\bar{v} = v + W = \{v + w : w \in W\}$$

De fato, $u \in \bar{v} \Leftrightarrow u \sim v \Leftrightarrow u - v \in W \Leftrightarrow \exists w \in W$ tal que $u - v = w \Leftrightarrow u = v + w \Leftrightarrow u \in v + W$.

(11)

Seja $V/W = \{ \bar{v} : v \in V \} =$ espaço quociente de V por W .

Defina:

$$\bullet \bar{v}_1 + \bar{v}_2 := \overline{v_1 + v_2}, \text{ para } \bar{v}_1, \bar{v}_2 \in V/W.$$

$$\bullet \lambda \bar{v} := \overline{\lambda v}, \text{ para } \bar{v} \in V/W, \lambda \in \mathbb{K}.$$

As operações acima estão bem definidas, pois, se $u_1 \in \bar{v}_1 \Rightarrow \bar{v}_1 = \bar{u}_1$.

De fato, tome $v \in \bar{u}_1 \Rightarrow v - u_1 \in W$. Agora $v - u_1 = \underbrace{v - v_1}_{\in W} + \underbrace{v_1 - u_1}_{\in W} \in W$.

Logo: $v \in \bar{u}_1 \Rightarrow \bar{v}_1 \subseteq \bar{u}_1$. Analogamente, $\bar{u}_1 \subseteq \bar{v}_1$. Portanto, $\bar{u}_1 = \bar{v}_1$.

V/W com as duas operações acima é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.

O vetor nulo de V/W é $\bar{0} = W$, isto é, $\bar{v} = \bar{0} \Leftrightarrow v \in W$.

Observações: V espaço vetorial e W subespaço de V .

(a) se $W = V$, então $V/W = \{ \bar{0} \}$. ($\bar{0} = W = V$, $\bar{0} \in V/W \Rightarrow V \subset V/W \Rightarrow V = V/W$)

(b) se $W = \{0\}$ então J uma bijecção entre os elementos de V/W e V .

Exemplo: Seja $V = \mathbb{R}^2$ e $W = [(1,0)]$. Vamos achar uma base para o espaço quociente:

$$V/W = \{ v + W : v \in V \}.$$

Considere uma base de $\mathbb{R}^2$ que contenha o vetor $(1,1)$, por exemplo,

$\beta = \{ (1,1), (1,0) \}$. Vamos mostrar que $\{ \overline{(1,0)} \}$ é base p/ V/W . Seja $\bar{v} \in V/W$

e fixemos $v \in \bar{v}$. Como β é uma base de V , existem $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ tais

que $v = \alpha_1(1,1) + \alpha_2(1,0)$ e, portanto, $\bar{v} = \alpha_1 \overline{(1,1)} + \alpha_2 \overline{(1,0)} = \alpha_2 \overline{(1,0)}$.

Assim, $\overline{(1,0)}$ gera V/W .

Proposição: Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita $n \geq 1$ sobre $\mathbb{K}$ e W um subespaço de V . Então

$$\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} W + \dim_{\mathbb{K}} V/W.$$

10

Proposição: Sejam V um espaço vetorial finitamente gerado no corpo K e W_1 um subespaço de V . Então existe um subespaço W_2 de V tal que $V = W_1 \oplus W_2$.

Dem.: Seja $\{v_1, \dots, v_n\}$ uma base do subespaço W_1 e estendamos a uma base $\{v_1, \dots, v_n, \dots, v_m\}$ de V . O subespaço vetorial W_2 gerado pelos vetores $\{v_{n+1}, \dots, v_m\}$ satisfaz as propriedades desejadas. De fato, é claro que $V = W_1 + W_2$ pois o conj. $\{v_1, \dots, v_n, v_{n+1}, \dots, v_m\}$ é um conj. gerador de V . Por outro lado, como $\{v_1, \dots, v_n, \dots, v_m\}$ é l.i., segue que $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

O subespaço W_2 como no teo. acima é chamado de complemento de W_1 em V .

Seja V um K -espaço vetorial. Para subespaços $W_1, \dots, W_p$ de V , definimos $W_1 + \dots + W_p = \{v_1 + \dots + v_p, v_i \in W_i, i=1, \dots, p\}$.

Se $W_i \cap (W_1 + \dots + W_{i-1} + W_{i+1} + \dots + W_p) = \{0\}$, $\forall i=1, \dots, p$, então $W_1 + \dots + W_p$ é chamada soma direta de $W_1, \dots, W_p$ e indicaremos por $W_1 \oplus \dots \oplus W_p$.
 V é soma direta de $W_1, \dots, W_p$ se $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_p$.

ESPAÇOS QUOCIENTES

V espaço vetorial sobre K , W subespaço de V

Dados $v_1, v_2 \in V$ dizemos que $v_1 \sim v_2$ se $v_1 - v_2 \in W$.

Relação de Equivalência:

- $v \sim v, \forall v \in V$ (reflexividade)
- Se $u \sim v, u, v \in V$ então $v \sim u$ (simetria)
- Se $u \sim v$ e $v \sim w, u, v, w \in V$ então $u \sim w$ (transitividade)

Para $v \in V$

$$\bar{v} = \{u \in V : u \sim v\}$$

Temos que

$$\bar{v} = v + W = \{v + w : w \in W\}$$

De fato, $u \in \bar{v} \Leftrightarrow u \sim v \Leftrightarrow u - v \in W \Leftrightarrow \exists w \in W \text{ t.q. } u - v = w \Leftrightarrow u = v + w \Leftrightarrow u \in v + W$.

9

SOMAS DIRETAS

DEFINIÇÃO: Sejam W_1 e W_2 dois subespaços vetoriais de um espaço vetorial V . Diremos que a soma $W_1 + W_2$ é direta se $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ e, neste caso, escrevemos

$$W_1 \oplus W_2.$$

Exemplos:

(a) Sejam W_1 e W_2 dois subespaços de $\mathbb{C}^4$ com bases $\{(1, 2, 0, i), (i, 0, 0, 1)\}$ e $\{(0, 0, 3, 1)\}$, respectivamente. A soma de W_1 e W_2 é direta pois $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

De fato, se $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in W_1 \cap W_2$, então

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = a(1, 2, 0, i) + b(i, 0, 0, 1) = c(0, 0, 3, 1)$$

com $a, b, c \in \mathbb{C}$. Não é difícil ver que $a = b = c = 0$ e, $z_1 = z_2 = z_3 = z_4 = 0$.

(b) Vimos que $\{e^{iax}, \cos x\}$ é l.i. em $\mathcal{L}([0, 2\pi], \mathbb{R})$. Conclua que $\mathbb{R}\sin x + \mathbb{R}\cos x$ é soma direta. $a \sin x = b \cos x$, $\forall x \in [0, 2\pi]$, p/ algum $a \in \mathbb{R}$ e algum $b \in \mathbb{R}$.

(Impossível) Note que $x=0 \Rightarrow b=0$ e $x=\pi/2 \Rightarrow a=0$.

Definição: Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K e sejam W_1, W_2 dois subespaços de V . Dizemos que V é soma direta de W_1 e W_2 se $V = W_1 \oplus W_2$.

Exemplo: $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}(1, 0) + \mathbb{R}(1, 1)$. É claro que se $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ então $(a, b) = a-b(1, 0) + b(1, 1)$. Por outro lado, $\mathbb{R}(1, 0) \cap \mathbb{R}(1, 1) = \{0\}$.

Proposição: Seja $V = W_1 \oplus W_2$ um espaço vetorial sobre K . Então cada elemento $v \in V$ se escreve de maneira única como uma soma $w_1 + w_2$ com $w_i \in W_i$, $i=1, 2$.

Dem.: É claro que $v \in V$ então $v = w_1 + w_2$, $w_1 \in W_1$ e $w_2 \in W_2$. Suponha que $v = w_1 + w_2 = u_1 + u_2$ com $w_1, u_1 \in W_1$, $w_2, u_2 \in W_2$. Então $w_1 - u_1 = u_2 - w_2 \in W_1 \cap W_2$ pois $w_1 - u_1 \in W_1$ e $u_2 - w_2 \in W_2$. Como $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, temos $w_1 = u_1$ e $w_2 = u_2$.

8)

Proposição. Sejam V esp. vet. e W_1 e W_2 dois subesp. vet. de V , ambos de dimensão finita. Então

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2).$$

Dem.: Sup. inicialmente $W_1 \cap W_2 \neq \{0\}$ e seja $B = \{w_1, \dots, w_n\}$ base de $W_1 \cap W_2$.
 Como $W_1 \cap W_2$ é subesp. vet. de W_1 e W_2 , podemos estender as bases de W_1 e W_2

$$B' = \{w_1, \dots, w_n, v_1, \dots, v_r\} \text{ base de } W_1$$

$$B'' = \{w_1, \dots, w_n, u_1, \dots, u_s\} \text{ base de } W_2$$

Considere $B = \{w_1, \dots, w_n, v_1, \dots, v_r, u_1, \dots, u_s\}$ B para $W_1 + W_2$.

Seja $v \in W_1 + W_2$. Então $v = x_1 + x_2$, $x_1 \in W_1$, $x_2 \in W_2$, usando $B' \cup B''$

$$x_1 = \sum \lambda_i w_i + \sum \gamma_j v_j, \quad x_2 = \sum \alpha_i w_i + \sum \beta_k u_k$$

Daí:

$$v = x_1 + x_2 = \sum (\lambda_i + \alpha_i) w_i + \sum \gamma_j v_j + \sum \beta_k u_k.$$

Vou mostrar que B é l.i.

$$\sum \alpha_i w_i + \sum \beta_j u_j + \sum \gamma_k v_k = 0$$

Daí:

$$\underbrace{\sum \gamma_k v_k}_{\in W_1} = \underbrace{\sum \alpha_i w_i + \sum \beta_j u_j}_{\in W_2} \in W_1 \cap W_2$$

$$\Rightarrow \sum \gamma_k v_k = \sum \lambda_i w_i \Rightarrow \sum \gamma_k v_k + \sum (-\lambda_i) w_i = 0$$

Como $\{u_1, \dots, u_s, w_1, \dots, w_n\}$ é l.i. $\Rightarrow \gamma_k = 0$

$$\sum \alpha_i w_i + \sum \beta_j u_j = 0 \Rightarrow \alpha_i = \beta_j = 0.$$

9

SUBESPAÇOS

Def.: Seja V um espaço vetorial sobre K . Um subconj. W de V é um subespaço vetorial de V se a restrição das operações de V a W torna este conj. um K -espaço vetorial.

Exemplos: a) $W = \{0\}$ é subespaço de V .

b) $\mathbb{C}$ como espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$. Então $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ é uma cadeia de subespaços de $\mathbb{C}$. Observe que se considerarmos $\mathbb{C}$ como espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, então $\mathbb{Q}$ não é subespaço vetorial de $\mathbb{C}$ (pois a multiplicação de um elem. real por um elemento de $\mathbb{Q}$ nem sempre é racional).

c) $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{C})$ é subespaço vetorial de $\mathcal{F}([a,b], \mathbb{C})$.

d) $W = [(1,0,-2,3), (1,1,1,1)]$ é subespaço de $\mathbb{R}^4$.

e) $KV := \{\alpha v : \alpha \in K\}$ é subespaço de V .

Proposição: sejam V um esp. vet. sobre K e $W \subset V$ um subconjunto. Então W é um subespaço de $V \iff$

(a) $0 \in W$;

(b) se $v_1, v_2 \in W$ então $v_1 + v_2 \in W$;

(c) se $\lambda \in K$ e $v \in W$ então $\lambda \cdot v \in W$.

Obs.: V espaço vetorial no-nulo sobre K

(a) Se $W \subset V$ é subespaço próprio de V ; $\dim_K V < \infty$ então $\dim_K W < \dim_K V$. De fato, se $W = \{0\}$ não há o que mostrar. Considere $W \neq \{0\}$ e seja $B = \{w_1, \dots, w_n\}$ uma base de W . Em particular, B é l.i. em V . Como $W \neq V \Rightarrow \exists v \in V, v \notin W$ $\{w_1, \dots, w_n, v\}$ é l.i. $\Rightarrow \dim_K W < \dim_K V$.

(b) Se W_1 e W_2 são subespaços de V então também são subespaços

$W_1 \cap W_2$ e $W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2, w_1 \in W_1 \text{ e } w_2 \in W_2\}$.

$W_1 \cup W_2$ não é necessariamente subespaço vetorial de V .

6

Teorema: Todo espaço vetorial finitamente gerado não-nulo possui uma base finita.

Dem.: Seja V um espaço vetorial finitamente gerado não nulo sobre K . Então V possui um conj. gerador finito, digamos com m elementos, $m \geq 1$. Seja agora $v_1 \in V$ um vetor não-nulo. Então $B_1 = \{v_1\}$ é l.i. Se B_1 gerar V , então B_1 é base de V . Caso contrário, existe $v_2 \in V$ que não é múltiplo de v_1 , pela prop. anterior $B_2 = \{v_1, v_2\}$ é l.i. Se B_2 gerar V , então será uma base de V . Caso contrário, existe $v_3 \in V$ tal que $\{v_1, v_2, v_3\}$ é l.i. Repetindo este argumento chegaremos a uma base de V .

Teorema: Seja V um espaço vetorial finitamente gerado e seja B um conj. l.i. em V . Então existe uma base de V contendo B .

Proposição. Seja V um K -espaço vetorial de dimensão $n \geq 1$ e seja $B \subseteq V$.

São equivalentes:

- (a) B é uma base de V ;
- (b) cada elemento de V se escreve de maneira única como combinação linear de elementos de B .

Dem.: (a) $\Rightarrow$ (b). Suponha $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V . Em particular, B gera V , $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$. Unicidade: $v = \sum \alpha_i v_i$, $v = \sum \beta_i v_i$. Então $\sum \alpha_i v_i = \sum \beta_i v_i$ ou $\sum (\alpha_i - \beta_i) v_i = 0$. Como B é l.i. segue que $\alpha_i - \beta_i = 0$.

(b) $\Rightarrow$ (a). Assume que cada elemento de V se escreve de maneira única como comb. linear de elemto de B . Em particular, B gera V . Para mostrarmos que B é uma base, falta verificar que B é l.i. Sejam $v_1, \dots, v_n \in B$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ tais que $\sum \lambda_i v_i = 0$. Como $0 = \sum 0 v_i \Rightarrow \lambda_i = 0$.

6

Corolário 1: Seja V um K -espaço vetorial finitamente gerado não nulo. Então duas bases quaisquer de V têm o mesmo número de elementos.

DEMONST.: Sejam B e B' duas bases de V . Como V é finitamente gerado, decorre da proposição anterior que B e B' são finitos com m e m' elementos, resp. Considerando B como conj. gerador e B' l.i. segue que $m' \leq m$. Por outro lado, considerando B' como conj. gerador e B l.i., temos $m \leq m'$. Segue que $m = m'$.

Definição: Seja V um esp. vet. sobre K . Se V admite uma base finita, então chamamos a $\dim V$ ao nº de elementos de tal base. Caso contrário, $\dim V = +\infty$.

Notação: $\dim_K V$ (dimensão de V sobre K).

Exemplos:

(a) $\dim_K K^n = n$.

(b) $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n = n$, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^n = 2n$.

(c) $\dim_K P(K) = +\infty$ ($\dim_K P_m(K) = m+1$)

(d) $\dim_{\mathbb{C}} M_{m \times n}(\mathbb{C}) = m \cdot n$ $\dim_{\mathbb{R}} M_{m \times n}(\mathbb{C}) = 2mn$.

Obviamente, todo espaço vetorial que admite uma base finita é finitamente gerado.

Corolário 2. Seja V um espaço de dimensão $n \geq 1$. Então:

- (a) Todo conj. de vetores com mais de n elementos é l.d.
- (b) Nenhum conj. com menos de n elementos pode gerar V .

Proposição: Seja V um espaço vetorial sobre K e seja $B = \{v_1, \dots, v_m\}$ um conj. l.i. em V . Se existir $v \in V$ que não seja combinação linear dos elementos de B , então $\{v_1, \dots, v_m, v\}$ é l.i.

Dem.: Sup. $\{v_1, \dots, v_m, v\}$ l.d. $\Rightarrow \exists x_1, \dots, x_m, x_{m+1}$ não todos nulos

tais que $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m + \alpha_{m+1} v = 0$

Se $\alpha_{m+1} \neq 0$ então

$v = -\frac{\alpha_1}{\alpha_{m+1}} v_1 - \dots - \frac{\alpha_m}{\alpha_{m+1}} v_m$ que contradiz a hipótese. Logo, $\alpha_{m+1} = 0$

Com B o l.i. $\Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$. Contradiz o fato de algum $\alpha_i \neq 0$.

ESPAÇOS VETORIAIS

Def.: V conjunto não-vazio, com duas operações:
+ adição, $\cdot$ multiplicação por escalares.

V é ~~um~~ espaço vetorial sobre IK (IK corpo) se:
 $v, u \in V$

$$s_1) u+v = v+u, \forall u, v \in V.$$

$$s_2) (u+v)+w = u+(v+w), \forall u, v, w \in V.$$

$$s_3) \exists 0 \in V : 0+v = v, \forall v \in V.$$

$$s_4) \forall v \in V, \exists \text{ um vetor em } V, -v \text{ tal que } v+(-v)=0.$$

$$M: \alpha \in IK \text{ e } v \in V \Rightarrow \alpha v \in V.$$

$$M1) (\alpha \beta) \cdot v = \alpha(\beta \cdot v) \quad \forall \alpha, \beta \in IK \text{ e } v \in V$$

$$M2) 1 \cdot v = v, \forall v \in V$$

Além disso,

$$D1) \alpha \cdot (u+v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v, \quad \forall \alpha \in IK \text{ e } \forall u, v \in V$$

$$D2) (\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v, \quad \forall \alpha, \beta \in IK \text{ e } \forall v \in V.$$

Obs. (a) Algumas vezes indicaremos o IK espaço vetorial para
notar que é um espaço vetorial V sobre IK .

(b) Seja V um espaço vetorial sobre IK . Note que V
com a operação da soma de vetores é um grupo abeliano

Exemplos (i) Todo corpo é um espaço vetorial sobre si mesmo.

(b)

$$IK^n = IK \times \dots \times IK = \{ (a_1, \dots, a_n), a_i \in IK, \forall i=1, \dots, n \}$$

Ex.: $\mathbb{Z}_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{m-1}\}$

$p \equiv q \pmod{m}$

$p = m \cdot d$

$p - q = m \cdot d \quad d \in \mathbb{Z}$

$p = q + m \cdot d$ q é o resto da divisão de p por m .

$0 \leq q < m$

$\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$

$\bar{5} = \bar{2}, \bar{7} = \bar{1}$

1) $\bar{a} + \bar{b} = \bar{c}$ onde c é o resto da divisão da soma $a+b$ por m .

2) $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{d}$, onde d é o resto da divisão do produto $a \cdot b$ por m .

Exemplo: $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$

·	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Se p for primo então $\mathbb{Z}_p$ é corpo.