| | |
|---|---|
| UFPB/CCEN/DM | PERÍODO 07.1 |
| GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA | TURMA: 01 |
| DISCIPLINA: Álgebra Linear | TURNO: Tarde |
| PROFESSOR: Milton | |

$4^a$ Lista de Exercícios

1. Encontre todas as formas canônicas de Jordan possíveis para as matrizes cujos polinômios característico e mínimo são dados por

   (i) $p_A(t) = (t-2)^4(t-3)$, $m(t) = (t-2)^2\,(t-3)^2$.

   (ii) $p_A(t) = (t-3)^4\,(t-5)^4,\ m(t) = (t-3)^2\,(t-5)^2$.

2. Suponhamos que $T : V \to V$ é linear. Demonstre que $Z(v,T)$ é a interseção de todos os subespaços $T-$invariantes, contendo $v$.

3. Encontre todas as formas canônicas racionais possíveis para:

   (i) matrizes $6 \times 6$ com polinômio mínimo $m(t) = (t^2+3)(t+1)^2$.

   (ii) matrizes $8 \times 8$ com polinômio mínimo $m(t) = (t^2+2)(t+3)^2$.

4. Seja $A$ uma matriz $4 \times 4$ com polinômio mínimo $m(t) = (t^2+1)(t^2-3)$. Encontre a forma canônica racional para $A$, se $A$ é uma matriz sobre (i) o corpo racional, (ii) o corpo real, (iii) o corpo complexo.

5. Sejam $u = (x_1, x_2)$ e $v = (y_1, y_2)$ pertencentes a $\mathbb{R}^2$.

   (i) Verifique que a função $f$ é um produto interno no $\mathbb{R}^2$.

$$f(u,v) = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2.$$

   (ii) Para que valores de $k$ a função $f$ é um produto interno no $\mathbb{R}^2$?

$$f(u,v) = x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + kx_2y_2.$$

(iii) Para que valores de $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ a função $f$ é um produto interno em $\mathbb{R}^2$?

$$f(u, v) = ax_1y_1 + bx_1y_2 + cx_2y_1 + dx_2y_2.$$

6. Sejam $u = (x_1, x_2)$ e $v = (y_1, y_2)$ pertencentes a $\mathbb{C}^2$.

   Para que valores de $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ a função $f$ é um produto interno em $\mathbb{C}^2$?

$$f(u, v) = ax_1y_1 + bx_1y_2 + cx_2y_1 + dx_2y_2.$$

7. Verifique a lei do paralelogramo:

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2.$$

8. Seja $V$ o espaço vetorial das matrizes $m \times n$ sobre $\mathbb{R}$. Mostre que $\langle A, B \rangle = tr(B^tA)$ define um produto interno em $V$.

9. Seja $V$ o espaço vetorial dos polinômios sobre $\mathbb{R}$. Mostre que $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ define um produto interno em $V$.

10. Encontre uma base do subespaço $W$ do $\mathbb{R}^4$ ortogonal a $u_1 = (1, -2, 3, 4)$ e $u_2 = (3, -5, 7, 8)$.

11. Encontre uma base ortonormal para o subespaço $W \in \mathbb{C}^3$, gerado por $u_1 = (1, i, 1)$ e $u_2 = (1 + i, 0, 2)$.

12. Seja $V$ o espaço dos polinômios, sobre $\mathbb{R}$, de grau $\leq 2$, com produto interno $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$.

    (i) Encontre uma base do subespaço $W$ ortogonal a $h(t) = 2t + 1$.

    (ii) Aplique o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt à base $\{1, t, t^2\}$ para obter uma base ortonormal $\{u_1(t), u_2(t), u_3(t)\}$ de $V$.

13. Encontre a projeção de $v$ em $w$ se:

    (i) $v = (1, -1, 2)$ e $w = (0, 1, 1)$ em $\mathbb{R}^3$;

(ii) $v = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ no espaço do problema 4.

14. Suponhamos que $\{u_1, \cdots, u_r\}$ é uma base ortonormal para um subespaço $W$ de $V$. Seja $E : V \to V$ a transformação linear dada por

$$E(v) = \langle v, u_1 \rangle\, u_1 + \cdots + \langle v, u_r \rangle\, u_r.$$

Mostre que $E$ é a projeção ortogonal de $V$ em $W$.

15. Seja $\{u_1, \cdots, u_r\}$ um subconjunto ortonormal de $V$. Mostre que, para qualquer $v \in V$, $\sum_{i=1}^{r} |\langle v, u_i \rangle|^2 \leq \|v\|^2$. (Conhecida como a desigualdade de Bessel.)

16. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $T(x, y, z) = (x + 2y, 3x - 4z, y)$. Encontre $T^*(x, y, z)$.

17. Mostre $T^*T = 0$ implica que $T = 0$.

18. Seja $V$ o espaço vetorial dos polinômios sobre $\mathbb{R}$ com produto interno definido por $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Seja $D$ o operador derivada, isto é, $D(f) = df/dt$. Mostre que não existe um operador $D^*$ em $V$ tal que $\langle D(f), g \rangle = \langle f, D^*(g) \rangle$ para quaisquer $f, g \in V$. Isto é, $D$ não tem adjunto.

19. Demonstre que o produto e inversas de matrizes ortogonais são ortogonais. (Desse modo, as matrizes ortogonais formam um grupo multiplicativo chamado *grupo ortogonal*).

20. Demonstre que o produto e inversas de matrizes unitárias são unitárias. (Desse modo, as matrizes unitárias formam um grupo multiplicativo chamado *grupo unitário*).

21. Mostre que, se uma matriz ortogonal (unitária) é triangular, então ela é diagonal.

22. Seja $W$ um subespaço de $V$. Para qualquer $v \in V$, faça $v = w + w'$, onde $w \in W$, $w' \in W^{\perp}$. Seja $T : V \to V$ definida por $T(v) = w - w'$. Mostre que $T$ é um operador unitário auto-adjunto em $V$.

23. Seja $V$ um espaço com produto interno e suponhamos que $U : V \to V$ (não necessariamente linear) é sobrejetora e preserva produtos internos, isto é, $\langle U(v), U(w)\rangle = \langle v, w\rangle$ para quaisquer $v, w \in V$. Demonstre que $U$ é linear e, portanto, unitário.

24. Suponhamos que $P$ é positivo e unitário. Prove que $P = I$.

25. Diz-se que uma matriz $n \times n$ (real ou complexa) $A = (a_{ij})$ é *positiva*, se $A$ encarada como um operador linear em $\mathbb{K}^n$ for positiva. (Analogamente, se define uma matriz *definida positiva.*) Demonstre que $A$ é positiva (definida positiva) se, e somente se, $a_{ij} = \overline{a}_{ij}$ e
$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i \overline{x}_j \geq 0 \quad (> 0)$$
para quaisquer $(x_1, \cdots, x_n)$ em $\mathbb{K}^n$.

26. Para qualquer operador $T$, mostre que $T + T^*$ é auto-adjunto e $T - T^*$ é anti-adjunto.

27. Seja $V$ um espaço complexo com produto interno. Suponhamos que $\langle T(v), v\rangle$ é real para qualquer $v \in V$. Mostre que $T$ é auto-adjunto.

28. Suponhamos que $S$ e $T$ são auto-adjuntos. Mostre que $ST$ é auto-adjunto se, e somente se, $S$ e $T$ comutam.

29. Verifique que $A = \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 2 \end{pmatrix}$ é normal. Encontre uma matriz unitária $P$ tal que $P^*AP$ seja diagonal e calcule $P^*AP$.

30. Mostre que uma matriz triangular é normal se, e somente se, ela é diagonal.

31. Mostre que operadores operadores auto-adjuntos, anti-adjuntos e unitários (ortogonais) são normais.

32. Mostre que existe uma base ortonormal $\{u_1, \cdots, u_n\}$ de $V$ consistindo em auto-vetores de $T$ se, e somente se, existem projeções ortogonais $E_1, \cdots, E_r$ e escalares $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ tais que

(i) $T = \lambda_1 E_1 + \cdots + \lambda_r E_r$;

(ii) $E_1 + \cdots + E_r = I$;

(iii) $E_i E_j = 0$, para $i \neq j$.