

UFPB/CCEN/Departamento de Matemática

Topologia dos Espaços Métricos

5ª Lista

1. Sejam (M, d) um espaço métrico, E um espaço vetorial normado e $f, g : M \rightarrow E$, $\alpha, \beta : M \rightarrow \mathbf{R}$ aplicações contínuas, com $\beta(x) \neq 0$ para todo $x \in M$. Mostre que as aplicações $(f+g)(x) := f(x)+g(x)$, $(\alpha f)(x) := \alpha(x)f(x)$, $(\frac{\alpha}{\beta})(x) := \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ são contínuas.
2. Mostre que o produto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ de conjuntos abertos $A_i \subset M_i$ é um subconjunto aberto de $M = M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n$.
3. Mostre que o produto cartesiano $F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_n$ de conjuntos fechados $F_i \subset M_i$ é um subconjunto fechado de $M = M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n$.
4. Sejam (M, d_M) e (N, d_N) espaços métricos. Mostre que gráfico de uma aplicação contínua $f : M \rightarrow N$ é um subconjunto fechado de $M \times N$.
5. Mostre que o produto cartesiano $M = M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n$ é conexo se, e somente se, cada fator M_i é conexo. Como aplicação prove que $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{R}^n - \{0\}$ e $C = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$ são conexos.
6. Mostre que a esfera $S^n = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\}$ é conexa por caminhos, para $n > 0$.
7. Seja $F \subset \mathbf{R}^n$ um subconjunto limitado e fechado. Prove que toda função contínua $f : F \rightarrow \mathbf{R}$ é limitada.
8. Sejam $(E, \|\cdot\|_E)$ e $(F, \|\cdot\|_F)$ espaços vetoriais normados, $L(E, F) = \{T : E \rightarrow F : T \text{ é uma transformação linear contínua}\}$ e $\|T\|$ a norma do supremo, mostre que $L(E, F)$ é um espaço de Banach.
9. Seja $c := \{x \in \mathbf{R}^\infty : x \text{ é uma sequência convergente}\}$. Mostre que c é um subespaço fechado de l^∞ com métrica usual do supremo.
10. Mostre que $\|f\| := \sup_{t \in [a, b]} (|f(t)| + |f'(t)|)$ é uma norma no espaço das funções $C^1([a, b], \mathbf{R})$ e que $(C^1([a, b], \mathbf{R}), \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach.

11. O espaço das funções polinomiais $P([0, 1]) = \{p : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R} : p \text{ é um polinômio}\}$ é completo com a norma do supremo?
12. Consideremos o conjunto $\mathcal{B}(X; M)$ das funções $f : X \rightarrow M$ limitadas. Dadas $f, g \in \mathcal{B}(X; M)$, consideremos $d(f, g) = \sup_{x \in X} d_M(f(x), g(x))$. Mostre que d está bem definida e é uma métrica em $\mathcal{B}(X; M)$ (chamada de Métrica do sup ou Métrica da Convergência Uniforme). Mostre que $\mathcal{B}(X; M)$ é um espaço métrico completo.
13. Dado $p \in [1, +\infty)$, seja $l^p = \{x = (x_j)_{j=1}^{+\infty} = (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots) : \sum_{j=1}^{+\infty} |x_j|^p < \infty\}$ com a norma $\|x\|_p = (\sum_{j=1}^{+\infty} |x_j|^p)^{1/p}$. Mostre que l^p é um espaço de Banach.
14. Seja $l^1 = \{x = (x_j)_{j=1}^{+\infty} \in \mathbf{R}^\infty : \sum_{j=1}^{+\infty} |x_j| < \infty\}$. Mostre o dual topológico (espaço dos funcionais lineares contínuos definidos em l^1) de l^1 é isométrico ao espaço l^∞ .
15. Seja $(E, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach e $\sum_{i=1}^{+\infty} \|x_i\| < \infty$ uma série absolutamente convergente. Mostre que a sequência (x_i) é convergente em E .