

1. Sejam (M, d) um espaço métrico e $X, Y \subset M$ tais que $M = X \cup Y$ e $X \cap Y = \emptyset$. Mostre que $M = X \cup Y$ é uma cisão se, e somente se, $X \cap \overline{Y} = \overline{X} \cap Y = \emptyset$.
2. Um espaço métrico (M, d) é conexo se, e somente se, toda função contínua $f : M \rightarrow \{0, 1\}$ é constante. Use este fato para dar novas provas das Proposições 3 e 4 do Capítulo 4 (livro do Elon).
3. Seja V um espaço normado e com a métrica induzida pela norma. Mostre que todo conjunto convexo é conexo por caminhos. Dê um exemplo em que não vale a volta.
4. Mostre que $\mathbf{R}$ não é homeomorfo a $\mathbf{R}^2$ (ambos considerados com a métrica euclidiana).
5. Mostre que S^1 não é homeomorfo a subespaço algum de $\mathbf{R}$.
6. Seja $X \subset \mathbf{R}^n$ um subconjunto limitado. Prove que $\mathbf{R}^n \setminus X$ possui exatamente uma componente conexa ilimitada, se $n > 1$.
7. Considere as letras maiúscula $A, C, D, E, F, G, H, I, J, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, X, Z$, desprovidas de extremidades. Agrupe-as em classes de figuras homeomorfas.
8. Sejam (M, d) um espaço métrico e $X \subset M$. Mostre que $\text{diam}(X) = \text{diam}(\overline{X})$.
9. Sejam $(M, d_M), (N, d_N)$ espaços métricos e $f, g : M \rightarrow N$ funções contínuas. Mostre que o conjunto $\{x \in M : f(x) = g(x)\}$ é fechado.
10. Seja (M, d) um espaço métrico e $S \subset M$ denso. Dada uma sequência (x_n) em M , suponha que exista $x \in M$ tal que $\lim d(x_n, s) = d(x, s)$ para todo $s \in S$. Prove que $\lim x_n = x$.