

UFPB/CCEN/Departamento de Matemática

Topologia dos Espaços Métricos

2ª Lista

1. Mostre que todo espaço métrico finito é discreto.
2. Dê exemplo de dois subconjuntos discretos X e Y de números reais tais que $X \cup Y$ não seja discreto.
3. Se $b \notin B[a, r]$, prove que existe $s > 0$ tal que $B[a, r] \cap B[a, s] = \emptyset$.
4. Sejam A e B subconjuntos limitados não-vazios de um espaço métrico (M, d) . Mostre que $\text{diam}(A \cup B) \leq \text{diam}(A) + \text{diam}(B) + d(A, B)$.
5. Mostre que todo espaço métrico é reunião enumerável de subconjuntos limitados.
6. Num espaço vetorial normado E , sejam $X = B(a, r)$ e $\overline{X} = B[a, r]$. Prove que, para todo $b \in E$, tem-se que $d(b, X) = d(b, \overline{X})$, onde d é a métrica induzida pela norma.
7. Seja $A \neq \emptyset$ subconjunto de um espaço métrico (M, d) e $A_* = \{x \in M : d(x, A) = 0\}$. Prove que $(A_*)_* = A_*$.
8. Sejam X e Y limitados e não-vazios no espaço métrico (M, d) . Ponha $\alpha(X, Y) = \sup\{d(x, y) : x \in X, y \in Y\}$ e mostre que, para todo $z \in M$ tem-se

$$|d(z, X) - d(z, Y)| \leq \alpha(X, Y).$$

9. Seja E um espaço vetorial com produto interno. Mostre que dada uma transformação linear $T : E \rightarrow E$, as seguintes afirmações são equivalentes:

- a) T é uma imersão isométrica;
- b) $\|T(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in E$;
- c) $\langle T(x), T(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ para quaisquer $x, y \in E$.

Se a dimensão de E é finita, T é uma isometria? E se a dimensão de E for infinita?

10. Considere no plano R^2 a norma $\|(x, y)\| = \max\{|x|, |y|\}$. Mostre que a projeção $\pi : R^2 \rightarrow R$, $\pi(x, y) = y$ define, por restrição, uma isometria entre o subespaço $X = \{(t, at) : t \in R\} \subset R^2$ e R se, e somente se, $|a| \geq 1$.