

1. Seja $d : M \times M \rightarrow R$ uma função tal que

- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(z, y)$

Prove que d é uma métrica.

2. Seja (M, d) um espaço métrico. Mostre que

$$\alpha(x, y) = \sqrt{d(x, y)}, \beta(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \quad \text{e} \quad \gamma(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$$

são outras métricas em M .

3. Considere o espaço das sequências limitadas, mas especificamente

$$l^\infty = \left\{ x = (x_j)_{j=1}^{+\infty} = (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots) / \sup_j |x_j| < \infty \right\}.$$

- a) Mostre que l^∞ é um espaço vetorial.
 b) Mostre que $\|x\|_\infty = \sup_j |x_j|$ é uma norma em l^∞ .

4. Dado $p \in [1, +\infty)$, considere

$$l^p = \left\{ x = (x_j)_{j=1}^{+\infty} = (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots) / \sum_{j=1}^{+\infty} |x_j|^p < \infty \right\}.$$

- a) Mostre que l^p é um espaço vetorial.
 b) Mostre que $\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{j=1}^{+\infty} |x_j|^p}$ é uma norma em l^p .

Sugestão: Estude as desigualdades de Hölder e Minkowski.

5. Mostre que para uma métrica d , num espaço vetorial real V , seja proveniente de uma norma, é necessário e suficiente que, para $x, a \in V$ e λ real arbitrários, se tenha

$$d(x + a, y + a) = d(x, y) \quad \text{e} \quad d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y).$$