

1. Números Reais

$$\pi \sigma_{\sqrt{2}}^{\mu} \sum_{d^{\pi}} \int_{\pi}^{\pi} f(x) dx$$

1.1 Propriedades dos Números Reais

1.1A Classifique as afirmações em *verdadeiras* ou *falsas*, justificando cada resposta.

- (a) Se $x < 2$, então $x^2 < 4$. (b) Se $x^2 < 4$, então $x < 2$.
(c) $x < 2$ se, e somente se, $x^2 < 4$. (d) Se $x < 2$, então $x \leq 3$.
(e) Se $x = 3$, então $x \leq 3$. (f) Se $|x| > 2$, então $x > 2$.

1.1B Se p é um número inteiro tal que p^2 é divisível por 3, mostre que p também o é. Use este fato para mostrar que o número $\sqrt{3}$ não é racional.

1.1C Mostre que a soma e o produto de dois números racionais é um número racional. O produto de dois números irracionais é irracional? E a soma?

1.1D Se r é um número racional e x é irracional, mostre que $x + r$ é também irracional. Se $r \neq 0$, mostre que o produto rx é irracional.

1.1E Sejam x e y dois números irracionais, de tal forma que $x^2 - y^2$ seja um racional não nulo. Mostre que os números $x - y$ e $x + y$ são irracionais. Por exemplo, $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ e $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ são irracionais.

1.1F Reduza os números $x = 5,2121\dots$ e $y = 0,21507507\dots$ à forma de fração ordinária.

1.1G Estude o sinal de cada uma das expressões abaixo.

- (a) $\frac{x-1}{x-2}$ (b) $(2x+1)(x-2)$ (c) $\frac{2-3x}{x+2}$
(d) $x(x-1)(2x+3)$ (e) $(2x-1)(x^2+1)$ (f) $x(x^2+3)$

1.2 Valor Absoluto e Desigualdades

Nos exercícios 1.8, 1.9 e 1.10, resolva as desigualdades indicadas.

1.2A

- (a) $(4x+7)^{20}(2x+8) < 0$ (b) $x(2x-1)(x+1) > 0$ (c) $\sqrt[3]{x^2-1} \leq 0$

$$\begin{array}{lll} \text{(d)} \frac{2x-1}{x-3} > 5 & \text{(e)} (2x-1)(x+3) < 0 & \text{(f)} \frac{x}{2x-3} \leq 3 \\ \text{(g)} \frac{2x-1}{x+1} < 0 & \text{(h)} \frac{3x-2}{2-x} \leq 0 & \text{(i)} \frac{x-3}{x^2+1} > 5 \end{array}$$

1.2B

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} x^2 - 4 > 0 & \text{(b)} x^2 - 1 \leq 0 & \text{(c)} x^2 \leq 4 & \text{(d)} \frac{x^2-9}{x+1} < 0 \quad \text{(e)} x^2 > 1 \\ \text{(f)} x^2 > r^2, r > 0 & \text{(g)} x^2 < r^2, r > 0 & \text{(h)} 3x^2 \geq 8 & \text{(i)} \frac{x^2-4}{x^2+4} > 0 \quad \text{(j)} (2x-1)(x^2-4) \leq 0 \end{array}$$

1.2C

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} x^2 - 3x + 2 < 0 & \text{(b)} x^2 + x + 1 \leq 0 & \text{(c)} 3x^2 + x - 2 > 0 \\ \text{(d)} 4x^2 - 4x + 1 \leq 0 & \text{(e)} x^2 + 3 > 0 & \text{(f)} x^2 + x + 1 > 0 \\ \text{(g)} x^2 - 5x + 6 \geq 0 & \text{(h)} x^2 + 5 \leq 0 & \text{(i)} (x-2)(x+3)(1-x) > 0 \\ \text{(j)} x^2 + 1 < 3x - x^2 - 3 & \text{(k)} \frac{3x(x+4)^2}{(x-2)^2} < 0 & \text{(l)} (x^2-4)(x^2-3x+2) \leq 0 \end{array}$$

1.2D Resolva as equações.

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} |x| = 2 & \text{(b)} |x+1| = 3 & \text{(c)} |2x-1| = 1 & \text{(d)} |x-2| = -1 \\ \text{(e)} |2x+3| = 0 & \text{(f)} |x| = 2x+1 & \text{(g)} |1-2x| = |3x+5| & \text{(h)} \sqrt{(x-4)^2} = -1 \\ \text{(i)} \sqrt{(x-1)^2} = 5 & \text{(j)} \sqrt{(2-x)^2} = 4 & \text{(k)} \left| \frac{x}{1-5x} \right| = 4 & \text{(l)} x = \sqrt{(-4)^2} \end{array}$$

1.2E Dê o conjunto solução de cada uma das inequações modulares abaixo.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} |x| \leq 1 & \text{(b)} |2x-1| < 3 & \text{(c)} |x| > 3 \\ \text{(d)} |3x+3| \leq 1/3 & \text{(e)} |2x^2-1| < 1 & \text{(f)} |3x-1| < -2 \\ \text{(g)} |x+3| \geq 1 & \text{(h)} |2x-1| < x & \text{(i)} |x+1| < |2x-1| \\ \text{(j)} |x-2| - |x-5| > x & \text{(k)} |x-1| + |x+3| < |4x| & \text{(l)} |(x-1)^3| < 1 \end{array}$$

1.2F Duas desigualdades são ditas *equivalentes*, se possuem o mesmo conjunto de soluções.

Com base nesta definição, classifique as duplas de desigualdades abaixo.

$$\text{(a)} \sqrt{x-1} < \sqrt{2-x} \quad \text{e} \quad x-2 < 1-x \quad \text{(b)} x^2 > 1 \quad \text{e} \quad 1 + \frac{2}{x-1} > 0$$

1.2G Resolva os sistemas de inequações.

$$\text{(a)} \begin{cases} 8x-2 < x-1 \\ 2x^2-x \leq 1 \end{cases} \quad \text{(b)} \begin{cases} 4x^2-4x-3 < 0 \\ 1/x^2 \geq 1 \end{cases}$$

1.2H Mostre que: (a) $x + \frac{1}{x} \geq 2, \forall x > 0$ (b) não existem x e y reais tais que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{x+y}$.

Respostas e Sugestões

1.1A (a) F (b) V (c) F (d) V (e) V (f) F **1.1F** $x = 516/99$ e $y = 21486/99900$

1.1G

	+	−	0	não definida
(a)	$x < 1$ ou $x > 2$	$1 < x < 2$	$\{1\}$	$x = 2$
(b)	$x < -1/2$ ou $x > 2$	$-1/2 < x < 2$	$\{-1/2, 2\}$	
(c)	$-2 < x < 2/3$	$x < -2$ ou $x > 2/3$	$\{2/3\}$	$x = -2$
(d)	$(-3/2, 0) \cup (1, \infty)$	$(-\infty, -3/2) \cup (0, 1)$	$\{0, 1, -3/2\}$	
(e)	$x > 1/2$	$x < 1/2$	$\{1/2\}$	
(f)	$x > 0$	$x < 0$	$\{0\}$	

1.2A

(a) $x < -4$ (b) $-1 < x < 0$ ou $x > 1/2$ (c) $-1 \leq x \leq 1$ (d) $3 < x < 14/3$
 (e) $-3 < x < 1/2$ (f) $x < 3/2$ ou $x \geq 9/5$ (g) $-1 < x < 1/2$ (h) $x \leq 2/3$ ou $x > 2$

1.2B

(a) $x < -2$ ou $x > 2$ (b) $x < -3$ ou $-1 < x < 3$ (c) $-2 \leq x \leq 2$ (d) $x < -3$ ou $-1 < x < 3$
 (e) $-1 \leq x \leq 1$ (f) $x \geq r$ ou $x \leq -r$ (g) $-r < x < r$ (h) $x \leq -2\sqrt{\frac{2}{3}}$ ou $x \geq 2\sqrt{\frac{2}{3}}$
 (i) $x < -2$ ou $x > 2$ (j) $x \leq 2$ ou $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$

1.2C

(a) $1 < x < 2$ (b) $\emptyset$ (c) $x < -1$ ou $x > 2/3$ (d) $x = 1/2$
 (e) $\mathbb{R}$ (f) $\mathbb{R}$ (g) $x \geq 3$ ou $x \leq 2$ (h) $\emptyset$
 (i) $x < -3$ ou $1 < x < 2$ (j) $\emptyset$ (k) $x < 0$ e $x \neq 2$ (l) $-2 \leq x \leq 1$ ou $x = 2$

1.2D

(a) $x = \pm 2$ (b) $x = 2$ ou $x = -4$ (c) $x = 0$ ou $x = 1$ (d) $\emptyset$
 (e) $x = -3/2$ (f) $x = -1/3$ (g) $x = -4/5$ ou $x = -6$ (h) $\emptyset$
 (i) $x = 6$ ou $x = -4$ (j) $x = -2$ ou $x = 6$ (k) $x = 4/21$ ou $x = 4/19$ (l) $x = 4$

1.2E

(a) $-1 \leq x \leq 1$ (b) $-1 < x < 2$ (c) $x < -3$ ou $x > 3$ (d) $-10/9 \leq x \leq -8/9$
 (e) $-1 < x < 1$, $x \neq 0$ (f) $\emptyset$ (g) $x \leq -4$ ou $x \geq -2$ (h) $1/3 < x < 1$
 (i) $x < 0$ ou $x > 2$ (j) $x < -3$ (k) $x < -1$ ou $x > 1$ (l) $0 < x < 2$

1.2F (a) não equivalentes (b) equivalentes **12G** (a) $[-1/2, 1/7]$ (b) $[-1/2, 0) \cup$

$(0, 1]$