ESPAÇOS VETORIAIS

1.1 – Espaços Vetoriais

Estudaremos o conceito de espaço vetorial, que é um conjunto munido de certas operações, gozam de propriedades ligadas a várias aplicações matemáticas, nas ciências bem como na engenharia.

Seja V um conjunto não vazio. Defina em V duas operações, uma que chamaremos de ***soma,*** e uma outra que chamaremos de ***multiplicação por escalar:***

$$+ : V \times V \to V \qquad\qquad \bullet : R \times V \to V$$
$$(u, v) \to u + v \qquad\qquad (\alpha, v) \to \alpha \bullet v$$

O conjunto V, com as operações definidas acima, é dito um ***espaço vetorial sobre R***, se, para todos $u, v, w \in V$ e $\alpha, \beta \in R$, as seguintes propriedades forem satisfeitas:

1. $u + (v + w) = (u + v) + w$ - associativa
2. $u + v = v + u$ - comutativa
3. Existe em V um elemento neutro, $\boldsymbol{0}$, tal que $u + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} + u = u$.
4. Existe em V o elemento $-u$ tal que $u + (-u) = \boldsymbol{0}$
5. $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$ - distributiva
6. $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta v$
7. $(\alpha.\beta)u = \alpha(\beta u)$
8. $\boldsymbol{1}.u = u$

1.2 – Exemplos

a) $V = R^2$, com a soma e a multiplicação por escalar usuais de vetores é um espaço vetorial.
Solução: De fato, vamos provar as oito propriedades acima:

Sejam $u = (x_1, y_1)$, $v = (x_2, y_2)$ e $w = (x_3, y_3)$ vetores do R^2. Então:

1. $u + (v + w) = (x_1, y_1) + (x_2 + x_3, y_2 + y_3) = (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3) =$
$= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) + (x_3, y_3) = (u + v) + w$

2. $u + v = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_2 + x_1, y_2 + y_1) = v + u$

3. Seja **0** = (0, 0). Então $u + 0 = (x_1, y_1) + (0,0) = (x_1 + 0, y_1 + 0) = (x_1, y_1) = u$.

4. Considere $-u = (-x_1, -y_1)$ Então:
$u + (-u) = (x_1, y_1) + (-x_1, -y_1) = (x_1 - x_1, y_1 - y_1) = (0,0) = 0$.

5. $\alpha(u + v) = (\alpha(x_1 + x_2), \alpha(y_1 + y_2)) = (\alpha x_1, \alpha y_1) + (\alpha x_2, \alpha y_2) = \alpha u + \alpha v$.

6. $(\alpha+\beta)u=((\alpha+\beta)x_1),(\alpha+\beta)y_1)=(\alpha x_1,\alpha y_1)+(\beta x_1,\beta y_1)=\alpha u+\beta u$

7. $(\alpha\beta)u=((\alpha\beta)x_1,(\alpha\beta)y_1)=\alpha(\beta x_1,\beta y_1)=\alpha(\beta u)$

8. $1.u=1.(x_1,y_1)=(x_1,y_1)=u$

b) *V =M(n,n)* – espaço da matrizes de ordem n, com as operações de soma o produto por escalar de matrizes usuais é um espaço vetorial.

c) $V=\Im(R,R)$ – conjunto das funções reais com as seguintes operações: $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ e $(\alpha f)(x)=\alpha f(x)$.

Os itens b) e c) ficam como exercícios.

2. Considere $V=R^2$, com as seguintes operações:

$$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1x_2,y_1y_2), \quad \alpha\cdot(x_1,y_1)=(\alpha x_1,\alpha y_1).$$

Vamos verificar se *V* com essas operações é um espaço vetorial.

Solução: Sejam $u=(x_1,y_1)$, $v=(x_2,y_2)$ e $w=(x_3,y_3)$ vetores do R^2. Então:

1. $u+(v+w)=(x_1,y_1)+(x_2x_3,y_2y_3)=(x_1x_2x_3,y_1y_2y_3)=(x_1x_2,y_1y_2)+(x_3,y_3)=(u+v)+w$

2. $u+v=(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1x_2,y_1y_2)=(x_2x_1,y_2y_1)=v+u$

3. Seja **0** = (*a, b*). Então $u+0=(x_1,y_1)+(a,b)=(x_1a,y_1b)=(x_1,y_1)\Leftrightarrow a=1,b=1$. Portanto o elemento neutro será o vetor **0** = (1, 1).

4. Queremos um vetor $-u=(a,b)$ tal que $u+(-u)=\boldsymbol{0}$. Então:

$$u+(-u)=(x_1,y_1)+(a,b)=(x_1a,y_{11}b)=(1,1)\Rightarrow\begin{cases}x_1a=1\\ y_1b=1\end{cases}$$

Observe que essas equações só terão soluções se $x_1\neq 0$ e $y_1\neq 0$. Portanto nem todo elemento de *V* tem simétrico e, portanto *V* não é um espaço vetorial.

5. $V=R^2$, com as seguintes operações:

$$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2-1,y_1+y_2),\ \alpha\cdot(x_1,y_1)=(\alpha x_1-\alpha+1,\alpha y_1)$$

Verifique se *V* é um espaço vetorial com as operações acima.

Observação: Os elementos do espaço vetorial *V* serão chamados de vetores, embora pareça estranho. A justificativa se deve ao fato de que as operações de adição e multiplicação por escalar realizadas com esses elementos se comportam de forma idêntica como se estivéssemos trabalhando com os próprios vetores do $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

1.3 – Subespaços Vetoriais

Sejam V um espaço vetorial e W um subconjunto de V, não vazio. O subconjunto W é um **subespaço vetorial** de V se, com as operações herdadas de V, W é um espaço vetorial. Para mostrarmos que um subconjunto W é um subespaço vetorial de V, deveríamos testar as oito propriedades de espaço vetorial, em relação às operações definidas em V. No entanto, sendo W um subconjunto de V, certos axiomas não precisam ser verificados. O próximo teorema estabelece condições para que um subconjunto W, não vazio, de um espaço vetorial V seja um subespaço vetorial de V.

Teorema 1: Um subconjunto W, não vazio, de um espaço vetorial V, é um subespaço vetorial de V, se forem satisfeitas as seguintes condições:

i) $\forall u, v \in W, u + v \in W$.

ii) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u \in W, \alpha u \in W$.

Demonstração: As propriedades 1), 2), 5), 6), 7) e 8) são facilmente verificadas pois os elementos de W são também elementos de V. De ii) temos, tomando $\alpha = 0$, que $0 \in W$. Tomando $\alpha = -1$, teremos $-u \in W$. Assim W é um espaço vetorial com as operações herdadas de V.

Observação: As condições i) e ii) do teorema anterior são equivalentes a:

i) $0 \in W$.

ii) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall u, v \in W, \alpha u + \beta v \in W$.

Assim, para que W seja um subespaço vetorial de V, basta mostrarmos as condições acima.

1.4 – Exemplos:

1. $V = \mathbb{R}^2$, $W = \{(x, y) \in V; y = 5x\}$

   Solução: Observe que W é não vazio, pois o vetor 0 = (0, 0) pertence a W. (0 = 5.0). Sejam $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$ elementos de W. Então $y_1 = 5x_1$, $y_2 = 5x_2$ e
   $$u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_1 + x_2, 5x_1 + 5x_2) = (x_1 + x_2, 5(x_1 + x_2)) \Rightarrow u + v \in W .$$
   Seja, agora, $\alpha \in \mathbb{R}$. Então
   $$\alpha u = (\alpha x_1, \alpha y_1) = (\alpha x_1, \alpha 5x_1) = (\alpha x_1, 5(\alpha x_1)) \Rightarrow \alpha u \in W .$$
   Logo W é um subespaço vetorial de V.

2. $V = \mathbb{R}^3$, $W = \{(x, y, z) \in V;\ ax + by + cz = 0,\ a, b, c \in R\}$

   Solução: Sejam $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$ elementos de W. Então $ax_1 + by_1 + cz_1 = 0$ e $ax_2 + by_2 + cz_2 = 0$. Temos que $u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$. Vejamos se $u + v \in W$.
   $$a(x_1 + x_2) + b(y_1 + y_2) + c(z_1 + z_2) = (ax_1 + by_1 + cz_1) + (ax_2 + by_2 + cz_2) = 0 + 0 = 0$$
   $$\Rightarrow u + v \in W .$$
   Seja, agora, $\alpha \in \mathbb{R}$. Então $\alpha u = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)$ e
   $$a(\alpha x_1) + b(\alpha y_1) + c(\alpha z_1) = \alpha(ax_1 + by_1 + cz_2) = \alpha.0 = 0 \Rightarrow \alpha u \in W .$$
   Logo W é um subespaço vetorial de V.

3. $V = \Im(\Re, \Re)$, $W = \{f \in \Im(R, R);\ f\ \text{é diferenciável}\}$

   Solução: Sabemos do Cálculo Diferencial que a soma de funções diferenciáveis é diferenciável e que a multiplicação de uma constante por uma função diferenciável é uma função diferenciável. Portanto W é um subespaço vetorial de V.

4. $V = \Im(\Re,\Re)$, $W = \{f \in \Im(R,R);\ f(2)=0\}$

Solução: Sejam $f, g \in \Im(R,R)$. Então $f(2)=0$ e $g(2)=0$. Agora,

$$(f+g)(2) = f(2)+g(2) = 0+0 = 0 \Rightarrow f+g \in W$$

e

$$(\alpha f)(2) = \alpha f(2) = \alpha.0 = 0 \Rightarrow \alpha f \in W$$

Portanto, W é um subespaço vetorial de V.

5. $V = M(2, 2)$ *e* $W = \{A \in V;\ AB = 0,\ B \in V, B \neq 0\}$

Solução: Sejam A, $C \in W$. Então

$$(A+C)B = AB + CB = 0+0 = 0 \Rightarrow A+C \in W$$

e

$$(\alpha A)B = \alpha(AB) = \alpha.0 = 0 \Rightarrow \alpha A \in W$$

Portanto, W é um subespaço vetorial de V.

Observação: Todo espaço vetorial admite pelos menos dois subespaços: o próprio V e $W = \{0\}$. Estes subespaços são chamados de subespaços triviais.

Teorema 2: Sejam W_1 e W_2 subespaços vetoriais de um espaço vetorial V. Então a interseção $W_1 \cap W_2$ é também um subespaço vetorial de V.

Demonstração: Seja $u, v \in W_1 \cap W_2$. Então $u, v \in W_1$ e $u, v \in W_2$. Como W_1 e W_2 são subespaços $u + v \in W_1$ e $u + v \in W_2$. Logo, $u + v \in W_1 \cap W_2$. Da mesma forma, $\alpha u \in W_1$ e $\alpha u \in W_2$. Logo, $\alpha u \in W_1 \cap W_2$. Portanto $W_1 \cap W_2$ é um subespaço vetorial de V.

Exemplos: 1. Considere os seguintes subespaços:

$$W_1 = \{(x, y, z) \in R^3; y = 0\} \text{ e } W_2 = \{(x, y, z) \in R^3; z = 0\}$$

Calcule $W_1 \cap W_2$.

Solução: Seja u = (a, b, c) $\in W_1 \cap W_2$. Então u = (a, b, c) $\in W_1$ e u = (a, b, c) $\in W_2$. Logo b = 0 e c = 0 e u = (a, 0, 0) é um elemento da interseção com a $\in \mathbb{R}$, isto é:

$$W_1 \cap W_2 = \{(a, b, c) \in R^3; b = 0, c = 0\}.$$

2. Seja $V = M(2,2)$ e considere os seguintes subespaços de V:

$$W_1 = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; a = 0\right\} \text{ e } W_2 = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; b = d = 0\right\}$$

Calcule $W_1 \cap W_2$.

Solução: Seja $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in W_1 \cap W_2$. Então $A \in W_1$ e $A \in W_2$. Logo a = b = d = 0. Logo $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$ é um elemento da interseção com $c \in \mathbb{R}$.

Observação: A união de subespaços nem sempre é um subespaço. De fato, tomemos os seguintes subespaços: $W_1 = \{(x, y) \in V; y = 5x\}$ e $W_2 = \{(x, y) \in V; y = -x\}$. Então

$$W_1 \cup W_2 = \{(x, y) \in V; y = 5x \ \ ou \ \ y = -x\}$$

Sejam $u = (x, 5x)$ e $v = (x, -x)$ elementos de $W_1 \cup W_2$. Então $u + v = (2x, 4x) \notin W_1 \cup W_2$. Logo $W_1 \cup W_2$ não é um subespaço vetorial de V.

Exercício: Sejam U e W subespaços de um espaço vetorial V. Então:

$$U \cup W \text{ é um subespaço vetorial de } V \Leftrightarrow U \subset W \text{ ou } W \subset U.$$

Demonstração: $\Rightarrow$) É claro que se $U \subset W$ ou $W \subset U$, então $U \cup W = U$ ou $U \cup W = W$. Como U e W são subespaços vetoriais de V, então $U \cup W$ é também um subespaço vetorial de V.

$\Leftarrow$) Suponhamos que $U \cup W$ seja um subespaço vetorial de V e admitamos que $W \not\subset U$. Mostremos que $U \subset W$. Para isso, seja $u \in U$. Como $W \not\subset U$ existe um elemento $w \in W$ tal que $w \notin U$. Considere o vetor $h = u - w \in U \cup W$. Afirmamos que $h \in W$. De fato, $h \in W$, pois se $h \notin W$, h estaria em U. Assim $w = u - h \in U$, o que é um absurdo. Logo $u = h + w \in W$ e, portanto $U \subset W$.

Teorema 3: Sejam W_1 e W_2 subespaços vetoriais de um espaço vetorial V. Então, o conjunto

$$W_1 + W_2 = \{\ v \in V;\ v = w_1 + w_2,\ w_1 \in W_1,\ w_2 \in W_2\}$$

é um subespaço vetorial de V.

Demonstração: Sejam $u, v \in W_1 + W_2$. Então $u = w_1 + w_2$ e $v = w_{11} + w_{22}$ com $w_1, w_{11} \in W_1$ e $w_2, w_{22} \in W_2$. Como W_1 e W_2 subespaços vetoriais de um espaço vetorial V então $w_1 + w_{11} \in W_1$ e $w_2 + w_{22} \in W_2$ e $\alpha w_1 \in W_1$ $\alpha w_2 \in W_2$. Então

$$u + v = (w_1 + w_2) + (w_{11} + w_{22}) = (w_1 + w_{11}) + (w_2 + w_{22}) \in W_1 + W_2$$

e $W_1 + W_2$ é um espaço vetorial de V

$$\alpha u = \alpha(w_1 + w_2) = \alpha w_1 + \alpha w_2 \in W_1 + W_2$$

Logo $W_1 + W_2$ é um espaço vetorial de V.

Definição 1: Sejam W_1 e W_2 subespaços vetoriais de um espaço vetorial V. Dizemos que V é soma direta de W_1 e W_2 , denotada por $V = W_1 \oplus W_2$, se:

i) $V = W_1 + W_2$

ii) $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

1.5 – Exemplos: Verificar se $V = \Re^3$ é soma direta dos subespaços dados abaixo, em cada caso.

a) $W_1 = \{(x,y,z) \in R^3;\ z = 0\}$ e $W_2 = \{(x,y,z) \in R^3;\ x = y = 0\}$

Solução: Seja $u = (x,y,z)$ um elemento qualquer do R^3. Vamos mostrar a propriedade i), isto é, vamos mostrar que qualquer vetor de R^3 se escreve como soma de um elemento de W_1 com um elemento de W_2. Então

$$u = (x,y,z) = (x,y,0) + (0,0,z)$$

de onde podemos concluir que $R^3 = W_1 + W_2$. Agora vamos provar a propriedade ii). Seja $u = (a,b,c) \in W_1 \cap W_2$. Então $u \in W_1 \Rightarrow c = 0$ e $u \in W_2 \Rightarrow a = b = 0$. Assim $u = (0,0,0)$ e $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. Logo $R^3 = W_1 \oplus W_2$.

b) $W_1 = \{(x,y,z) \in R^3;\ x - z = 0\}$ e $W_2 = \{(x,y,z) \in R^3;\ x + y + z = 0\}$

Solução: Seja $u = (x,y,z)$ um elemento qualquer do R^3. Então

$$u = (x,y,z) = (x, y - x + z, x) + (0, x - z, z - x)$$

Observe que o primeiro elemento da soma acima pertence a W_1, pois $x = z$. O segundo elemento da soma pertence a W_2, pois a soma de todas as coordenadas é nula. Dessa forma $R^3 = W_1 + W_2$. Provaremos, agora, a propriedade ii). Seja $u = (a,b,c) \in W_1 \cap W_2$. Então

$u \in W_1 \Rightarrow a = c$ e $u \in W_2 \Rightarrow a + b + c = 0$. Como a = c então teremos $b = -2c$. Logo $u = (c, -2c, c),\ c \in R$. Assim $W_1 \cap W_2 \neq \{0\}$ e portanto R^3 não é soma direta de W_1 e W_2.

c) $W_1 = \{(x, y, z) \in R^3;\ x = y\}$ e $W_2 = \{(x, y, z) \in R^3;\ x = y = 0\}$

d) $W_1 = \{(x, y, z) \in R^3;\ x = y = z\}$ e $W_2 = \{(x, y, z) \in R^3;\ x = 0\}$

Os itens c) e d) ficam como exercícios.

Observação: Um espaço vetorial V é soma direta de W_1 e W_2 se, e somente se, qualquer vetor $v \in V$ se escreve, de modo único, como soma de um elemento de W_1 com um elemento de W_2, isto é, $v = w_1 + w_2$, $w_1 \in W_1$, $w_2 \in W_2$. Prove!

Exercício: Seja V o espaço das matrizes quadradas de ordem n. Sejam

$W_1 = \{A \in V;\ A = A^t\}$ - conjunto das matrizes simétricas

$W_2 = \{A \in V;\ A = -A^t\}$ - conjunto das matrizes anti-simétricas

Mostre que $V = W_1 \oplus W_2$.

Sugestão: $A = \frac{1}{2}(A + A^t) + \frac{1}{2}(A - A^t)$

1.6 – Combinação Linear

Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vetores de um espaço vetorial V. Um vetor $v \in V$ é **combinação linear** dos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ se existirem escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tais que

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n$$

1.7 – Exemplos: 1) O vetor (3, –5) é combinação linear dos vetores (1, 0) e (0, 1) pois (3, –5) = 3(1, 0) – 5(0, 1).

2) O vetor u = (2, 3, –1) é combinação linear dos vetores v = (1, 1, 1 e w = (–1, 2, 1)?

Solução: O vetor u será combinação linear dos vetores v e w se existirem escalares x e y tais que

$$(2, 3, -1) = x(1, 1, 1) + y(-1, 2, 1) \Rightarrow \begin{cases} x - \ \ y = 2 \\ x + 2y = 3 \\ x + \ \ y = -1 \end{cases}$$

Observação: Vamos relembrar o método do escalonamento para resolução de sistemas lineares. Para resolvermos um sistema linear devemos obter sistemas *equivalentes,* onde os valores das incógnitas são facilmente obtidos.

Vejamos então, como proceder para obter o sistema equivalente conveniente, através do processo eliminação de variáveis em cada equação. Para tornar mais claro o processo, ao lado de cada sistema vamos escrever sua matriz ampliada (matriz formada pelos coeficientes das incógnitas acrescentada à coluna dos termos independentes).

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x - 3y = -4 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

1ª) Eliminemos x da *2ª* equação. Substituímos a *2ª* equação por outra, obtida somando-se a *2ª* equação com a *1ª* multiplicada por *–2*:

$$\begin{cases} x+2y=5 \\ 0x-7y=-14 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -7 & -14 \end{bmatrix}$$

2ª) Vamos tornar unitário o coeficiente de *y* na *2ª* equação. Para isso, substituímos a *2ª* equação por outra, obtida multiplicando-se a *2ª* equação por $-\dfrac{1}{7}$:

$$\begin{cases} x+2y=5 \\ 0x+\quad y=2 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

3ª) Eliminemos *y* da *1ª* equação. Substituímos a *1ª* equação por outra, obtida somando-se a *1ª* equação com a *2ª* equação multiplicada por -2 :

$$\begin{cases} x+0y=1 \\ 0x+\quad y=2 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

O último sistema é equivalente ao sistema inicial*,* e observe que podemos obter a solução do sistema facilmente: $x = 1$, $y = 2$.

No exemplo apresentado partimos de um sistema de equações lineares e fomos obtendo sistemas sucessivos, obtidos do anterior por operações que preservam as igualdades indicadas, até chegarmos ao sistema equivalente que expressa a solução. As etapas intermediárias são todas reversíveis, pois podemos obter o sistema inicial a partir do último sistema efetuando as operações inversas das mencionadas, na ordem inversa. As operações que fornecem sistemas equivalentes são chamadas *operações elementares.* As operações elementares sobre as linhas de uma matriz são:

1. Permutação da i-ésima e j-ésima linha: $L_i \leftrightarrow L_j$

Exemplo: $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 5 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} L_1 \leftrightarrow L_2 \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 0 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

2. Multiplicar a i-ésima linha por um escalar qualquer *k*, não nulo: $L_i \to k.L_i$.

Exemplo: $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 5 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \quad L_3 \to -2L_3 \quad \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 5 \\ -6 & 8 \end{bmatrix}$

3. Substituição da i-ésima linha pela i-ésima linha mais *k* vezes a j-ésima linha: $L_i \to L_i + k.L_j$

Exemplo: $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 5 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} L_3 \to L_3 - 3L_2 \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 5 \\ 0 & -19 \end{bmatrix}$

Na resolução do sistema acima observamos que a matriz ampliada do sistema obtido sucessivamente apenas sofreu operações elementares sobre suas linhas com objetivo de serem transformadas numa *matriz na forma escada*. Lembremos que quando não fazemos referência a alguma linha, a mesma deve permanecer inalterada.

Uma matriz é *linha reduzida à forma escada* se satisfaz às condições:

1) O primeiro elemento não nulo de cada linha é *1*.

2) Cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos os outros elementos iguais a zero.

3) Toda linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nulas.

4) Se L_1 , L_2 ,..., L_r são as linhas não nulas e se o primeiro elemento não nulo de L_i ocorre na coluna j_i , então $j_1 < j_2 < \ldots < j_r$.

Lembramos que uma linha é nula se todos os seus elementos forem nulos. Uma linha não nula é aquela que possui pelo menos um elemento não nulo. A condição *4)* significa que os primeiros elementos não nulos unitários de cada linha devem ocorrer em colunas sequenciadas.

Consideremos as matrizes abaixo e verifiquemos quais são linha reduzida à forma escada:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 2 \end{bmatrix};$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 1 \end{bmatrix}; \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

As matrizes A e B são linha reduzida à forma escada, pois todas as condições estão satisfeitas. A matriz C não é linha reduzida à forma escada, pois não satisfaz à *1ª* condição. A matriz D não é linha reduzida à forma escada, pois não satisfaz a *2ª* e *4ª* condições. A matriz E também não é linha reduzida à forma escada, pois não satisfaz a *3ª* condição.

Dadas duas matrizes *m x n, A* e *B*, dizemos que *B é linha-equivalente a A* se *B* foi obtida de *A* após um número finito de operações elementares sobre as linhas de *A*. Neste caso, indicamos

$$A \to B \text{ ou } A \sim B$$

Dada uma matriz A_{mxn}, chamamos de *posto* (ou *característica*) de A, indicado por p, ao número de linhas não nulas de sua matriz equivalente linha reduzida à forma escada.

Exemplo: Para obter o posto da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ precisamos, em primeiro lugar, obter a sua matriz equivalente B linha reduzida à forma escada. Isso é conseguido aplicando-se operações elementares convenientes às linhas da matriz A :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 \to L_2 - 2L_1 \\ \to \\ L_3 \to L_3 - L_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & 3 \\ 0 & -4 & -4 & 4 \end{bmatrix} L_2 \to L_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 4 \\ 0 & -3 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$L_2 \to -\frac{1}{4}L_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 \to L_1 - L_2 \\ \to \\ L_3 \to L_3 + 3L_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L_3 \to -\frac{1}{3}L_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 \to L_1 - L_3 \\ \to \\ L_2 \to L_2 - L_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = B$$

Portanto, o posto de A é igual a *3*, que é o número de linhas não nulas da matriz B.

Vamos usar escalonamento para resolvermos o sistema

$$\begin{cases} x - \ \ y = 2 \\ x + 2y = 3 \\ x + \ \ y = -1 \end{cases}.$$

Tomemos a matriz ampliada do sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 - L_1 \to L_2 \\ \to \\ L_2 - L_3 \to L_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} 2L_2 - 3L_3 \to L_3 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -11 \end{bmatrix}.$$

Observe que o posto da matriz ampliada é igual a 3 enquanto o posto da matriz dos coeficientes é igual a 2. Logo o sistema não tem solução e, portanto o vetor u não é combinação linear dos vetores v e w. Isto também poderá ser observado quando voltamos ao sistema, pois na terceira equação temos um absurdo.

$$\begin{cases} x - \ \ y = 2 \\ \ \ -3y = -1 \\ \ \ \ \ 0y = -11 \end{cases}$$

3) Seja $\wp_2$ o espaço dos polinômios de grau $\leq$ 2. Seja $v = x^2 - 9x - 4$. Mostre que v é combinação linear dos vetores $v_1 = x^2 - 3x + 2$ e $v_2 = -x^2 - 3x - 8$.

Solução: Devemos encontrar escalares a e b tais que $v = av_1 + bv_2$, ou seja,

$$x^2 - 9x - 4 = a(x^2 - 3x + 2) + b(-x^2 - 3x - 8) \Rightarrow x^2 - 9x - 4 = (a - b)x^2 + (-3a - 3b)x + 2a - 8b$$

Lembramos que dois polinômios são iguais quando os coeficientes dos termos de mesmo grau são iguais. Então temos:

$$\begin{cases} a - \ \ b = \ 1 \\ -3a - 3b = -9 \\ 2a - 8b = -4 \end{cases} \Rightarrow a = 2,\ b = 1.$$

Portanto $v = 2v_1 + v_2$ e v se escreve como combinação linear de v_1 e v_2.

Seja S o conjunto de todas as combinações lineares dos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$, isto é,

$$S = \{v \in V;\ v = a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n,\ a_i \in R\}$$

O conjunto S é um subespaço vetorial de V, chamado de ***subespaço gerado*** pelos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ e será denotado por $S = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$.

Observação: O subespaço $S = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$ é o menor subespaço vetorial de V que contém os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$, isto é, se W é outro subespaço vetorial de V contendo os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$, então $S \subset W$.

1.8 – Exemplos: 1. Mostre que os vetores *(1, 0, 0)*, *(0, 1, 0)* e *(0, 0, 1)* geram o $\mathbb{R}^3$.

Solução: De fato esses vetores geram o $\mathbb{R}^3$ pois, se $v = (x, y, z)$ é um vetor qualquer do $\mathbb{R}^3$ então:

$$(x, y, z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1).$$

2. Determine os geradores dos seguintes subespaços:

a) $W = \{(x, y, z) \in R^3;\ 2x - y + z = 0\}$.

Solução: Seja $w = (x, y, z)$ um elemento qualquer de *W*. Então $2x - y + z = 0 \Rightarrow z = -2x + y$ e

$$w = (x, y, z) = (x, y, -2x + y) = (x, -2x, 0) + (0, y, y) = x(1, -2, 0) + y(0, 1, 1).$$

Observe que os vetores $(x, -2x, 0)$, $(0, y, y)$ são elementos de *W*, assim como os vetores $(1, -2, 0)$ e $(0, 1, 1)$. Nesse caso, qualquer vetor *w* de *W* se escreve como combinação linear dos vetores $(1, -2, 0)$ e $(0, 1, 1)$. Logo, esses vetores são os geradores de *W*.

b) $W = \{(x, y, z) \in R^3;\ x - y + 3z = 0\}$.

Solução: Exercício (Use a mesma ideia do exemplo anterior)

c) $W = \{(x, y, z) \in R^3;\ x = 2y,\ z = -y\}$.

Solução: Seja $w = (x, y, z)$ um elemento qualquer de *W*. Então:

$$w = (x, y, z) = (2y, y, -y) = y(2, 1, -1).$$

Observe que o vetor $(2y, y, -y)$ é um elemento de *W*, assim como o vetor $(2, 1, -1)$. Nesse caso, qualquer vetor *w* de *W* se escreve como combinação linear do vetor $(2, 1, -1)$, que é o único gerador de *W*.

d) $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2,2);\ c = a - b;\ d = a \right\}$

Solução: Seja $w = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ um elemento qualquer de *W*. Então $c = a - b$ e $d = a$. Então

$$w = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ a - b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ a & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Observe que os vetores $\begin{pmatrix} a & 0 \\ a & a \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$ são elementos de *W*, assim como os vetores $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ Nesse caso, qualquer vetor *w* de *W* se escreve como combinação linear dos vetores $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e, portanto, esses vetores são os geradores de *W*.

3. Seja $S = \left\{ \begin{pmatrix} a - b & 2a \\ a + b & -b \end{pmatrix};\ a,\ b \in R \right\}$ um subespaço do *M(2, 2)*. Determine os geradores de *S*.

4. Seja $V = \mathbb{R}^3$. Determine o subespaço gerado pelos vetores (1, −2, −1) e (2, 1, 1).

Solução: Queremos identificar os vetores $v = (x, y, z)$ de *V* que são combinações lineares dos vetores (1, −2, −1) e (2, 1, 1). Então

$$v = (x, y, z) = a(1,-2,-1) + b(2,1,1) \Rightarrow \begin{cases} a + 2b = x \\ -2a + b = y \\ -a + b = z \end{cases}.$$

Usaremos escalonamento para determinar as condições sobre *x, y* e *z* de modo que o vetor *v* pertença a *W*. Então

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & x \\ -2 & 1 & y \\ -1 & 1 & z \end{bmatrix} \xrightarrow[L_1+L_3 \to L_3]{2L_1+L_2 \to L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & x \\ 0 & 5 & 2x+y \\ 0 & 3 & x+z \end{bmatrix} \xrightarrow{3L_2-5L_3 \to L_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & x \\ 0 & 5 & 2x+y \\ 0 & 0 & x+3y-5z \end{bmatrix}.$$

Para que esse sistema tenha solução é preciso que o posto da matriz ampliada seja igual ao posto da matriz dos coeficientes. Logo devemos ter $x+3y-5z=0$ e

$$W = \{(x, y, z) \in R^3;\ x+3y-5z=0\}.$$

OBS.: Note que os vetores (1, −2, −1) e (2, 1, 1) são linearmente independentes. Lembrando dos conhecimentos adquiridos em Cálculo Vetorial podemos concluir que esses vetores determinam um plano cuja equação é $x+3y-5z=0$. Verifique.

5. Seja $V = \mathbb{R}^3$. Determine o subespaço gerado pelos vetores (−1, 3, 2) e (2, −2, 1).

Sugestão: Use a mesma ideia anterior.

6. Dados os vetores $p_1(t) = t^2 - 2t + 1$, $p_2(t) = t + 2$ e $p_3(t) = 2t^2 - t$, pede-se:

a) Escreva o vetor $p(t) = 5t^2 - 5t + 7$ como combinação linear de p_1, p_2 e p_3.

Solução: Vamos encontrar escalares *a*, *b* e *c* tais que

$$5t^2 - 5t + 7 = a(t^2 - 2t + 1) + b(t + 2) + c(2t^2 - t) = (a + 2c)t^2 + (-2a + b - c)t + a + 2b.$$

Novamente, vamos lembrar que dois polinômios são iguais quando os coeficientes dos termos de mesmo grau são iguais. Então temos:

$$\begin{cases} a + 2c = 5 \\ -2a + b - c = -5 \\ a + 2b = 7 \end{cases} \Rightarrow a = 3, b = 2, c = 1.$$

Portanto,

$$5t^2 - 5t + 7 = 3(t^2 - 2t + 1) + 2(t + 2) + 1(2t^2 - t).$$

1.9 – Dependência e Independência Linear

Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vetores de um espaço vetorial *V*. O conjunto $\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ é dito *linearmente independente* (LI) se a equação

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n = 0$$

tiver como única solução $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$. Se, pelo menos, um elemento $a_i \neq 0$, o conjunto $\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ será dito *linearmente dependente* (LD).

1.10 – Exemplos: 1. Verificar se os conjuntos de vetores dados abaixo são LD ou LI:

a) $\{(1, 2), (-2, 3)\}$

Solução: Considere a equação ,

$$a_1(1,2) + a_2(-2,3) = (,0 0)$$

e vejamos qual é a sua solução. Então

$$a_1(1,2)+a_2(-2,3)=(,00)\Rightarrow\begin{cases} a_1-2a_2=0\\ 2a_1+3a_2=0\end{cases}.$$

Note que o determinante principal do sistema é igual a 7. Dessa forma, o sistema terá uma única solução, $a_1=a_2=0$. Portanto os vetores são linearmente independentes.

b) $\left\{\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -3 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & -3\\ 3 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3 & -4\\ 3 & 1\end{pmatrix}\right\}$

Solução: Considere a equação,

$$a_1\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -3 & 1\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}2 & -3\\ 3 & 0\end{pmatrix}+a_3\begin{pmatrix}3 & -4\\ 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

e vejamos qual é a sua solução. Então

$$\begin{cases} -a_1+2a_2+3a_3=0\\ 2a_1-3a_2-4a_3=0\\ -3a_1+3a_2+3a_3=0\\ a_1+\quad+a_3=0\end{cases}$$

Vamos usar escalonamento para resolver esse sistema. Então

$$\begin{bmatrix}-1 & 2 & 3 & 0\\ 2 & -3 & -4 & 0\\ -3 & 3 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{matrix}L_2+2L_1\to L_2\\ 3L_1-L_3\to L_3\\ \to\\ L_1+L_4\to L_4\end{matrix}\begin{bmatrix}-1 & 2 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 6 & 0\\ 0 & 2 & 4 & 0\end{bmatrix}\begin{matrix}3L_2-L_3\to L_3\\ \to\\ 2L_2-L_4\to L_4\end{matrix}\begin{bmatrix}-1 & 2 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Temos que o posto da matriz ampliada é igual ao posto da matriz dos coeficientes e esse posto é igual a 2. Isto garante que o sistema tem solução. Como esse posto é menor que o número de colunas então o sistema tem infinitas soluções e, portanto solução não nula. Logo os vetores dados são linearmente dependentes.

c) $\{2x+2,\ -x^2-x-3,\ x^2-2x+2\}$

Fica como exercício. Veja exemplo 6 anterior.

2. Mostre que se *u, v* e *w* são LI, então os vetores *u + v, u + w* e *v + w* também são LI.

Teorema 4. Um conjunto de vetores $\{v_1, v_2, v_3, ..., v_n\}$ de um espaço vetorial *V* é LD se, e somente se, um desses vetores é combinação linear dos outros vetores.

Demonstração: Veja o livro texto.

Observações:

1. Se $v\in V$, $v\neq 0$, então $\{v\}$ é LI.
2. Qualquer conjunto de vetores que contiver o vetor nulo (elemento neutro) é LD.

1.11 – Base e dimensão

Um conjunto de vetores $\{v_1, v_2, v_3, ..., v_n\}$ de um espaço vetorial *V* é base para *V* se:

i) $V = [v_1, v_2, v_3, ..., v_n]$

ii) $\{v_1, v_2, v_3, ..., v_n\}$ é LI.

1.12 – Exemplos: 1. Os vetores (1, 0) e (0, 1) formam uma base para o $\mathbb{R}^2$, chamada de base canônica do $\mathbb{R}^2$.

2. O conjunto $\{x^2, x, 1\}$ é base para $\wp_2$?

3. $\{(1, 2, 1), (-1, 3, 0)\}$ é base para o $\mathbb{R}^3$?

Observação:

1. O número de elementos de uma base de um espaço vetorial *V* é chamado de *dimensão* do espaço vetorial *V* e será denotado por *dim V.* Assim, *dim* $\mathbb{R}^2$ é 2, pois dois vetores compõem a base. Qual a *dim* $\mathbb{R}^3$*?* Qual a dimensão do espaço das matrizes de ordem 2? Qual a *dim* $\wp_3$ *?*
2. Um espaço vetorial *V* que tem uma base finita é dito um espaço vetorial de dimensão finita.

Os resultados que veremos agora nos mostrarão maneiras de obter bases para espaços vetoriais.

Teorema 5: Sejam v_1 , v_2 , ... , v_n vetores não nulos de um espaço vetorial *V*. Se estes vetores geram *V*, então, dentre esses vetores, podemos obter uma base para *V*.

Demonstração: Se v_1, v_2, ... , v_n forem LI, nada a demonstrar. Se não, um dos vetores é combinação linear dos outros vetores, digamos v_n, pois a equação

$$a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n = 0$$

admite solução não nula. Afirmamos que $V = [v_1, v_2, v_3, ..., v_{n-1}]$. De fato, seja $v \in V$. Como v_1 , v_2 , ... , v_n geram *V*, então $v = a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n$. Como v_n é combinação linear dos vetores v_1 , v_2 , ... , v_{n-1} então $v_n = b_1v_1 + b_2v_2 + ... + b_{n-1}v_{n-1}$. Substituindo na equação anterior, obtemos:

$$v = (a_1 + b_1)v_1 + (a_2 + b_2)v_2 + ... + (a_{n-1} + b_{n-1})v_{n-1}$$

Logo $V = [v_1, v_2, v_3, ..., v_{n-1}]$. Se os vetores v_1, v_2, ... , v_{n-1} forem LI , teremos a base para *V*. Se não, existe um vetor, dentre esses, digamos v_{n-1} , que é combinação linear dos outros. Prosseguindo com um raciocínio semelhante ao anterior, chegaremos a um conjunto de vetores $\{v_1, v_2, v_3, ..., v_r\}$, $r \leq n$, linearmente independente, que geram *V* e, portanto formarão uma base para *V*.

1.13 – Exemplos: 1. Considere os vetores (1, 1, 1), (1, 2, 3), (3, 0, 2) e (2, 1, –1).

a) Mostre que eles geram o $\mathbb{R}^3$.

b) Encontre uma base para o $\mathbb{R}^3$.

Solução: a) Seja $v = (x, y, z)$ um vetor qualquer do $\mathbb{R}^3$. Vamos mostrar que esse vetor se escreve como combinação linear dos vetores dados. Então teremos:

$$(x, y, z) = a(1,1,1) + b(1,2,3) + c(3,0,2) + d(2,1,-1)$$

Verifique que esse sistema sempre tem solução, independente do vetor *v*. Logo os vetores dados geram o $\mathbb{R}^3$.

b) Vamos usar o teorema anterior. Já sabemos que a dimensão do $\mathbb{R}^3$ é 3. Como toda base tem sempre o mesmo número de elementos

Teorema 6: Seja V um espaço vetorial gerado por um número finito de vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$. Então, qualquer conjunto de vetores com mais de n elementos é LD.

Demonstração: Como $V = [v_1, v_2, v_3, \dots, v_n]$, então pelo teorema anterior, podemos obter uma base para V. Seja $\beta = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_r\}$, $r \le n$, esta base. Sejam $w_1, w_2, \dots, w_m$ vetores quaisquer de V, com $m > n$. Vamos mostrar que estes vetores são LD, isto é, a equação

$$x_1 w_1 + x_2 w_2 + \dots + x_m w_m = 0 \qquad (1)$$

deve ter solução não nula. Sendo β uma base de V, então qualquer w_i se escreve como combinação linear dos vetores de β, isto é,

$$w_i = a_{i1} v_1 + a_{i2} v_2 + \dots + a_{ir} v_r, \quad i = 1, 2, \dots, m \qquad (2)$$

Substituindo (2) em (1) obtemos:

$$\begin{aligned} x_1 (a_{11} v_1 + a_{12} v_2 + \dots + a_{1r} v_r) + x_2 (a_{21} v_1 + a_{22} v_2 + \dots + a_{2r} v_r) + \dots + \\ + x_m (a_{m1} v_1 + a_{m2} v_2 + \dots + a_{mr} v_r) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + \dots + a_{m1} x_m) v_1 + (a_{12} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{m2} x_m) v_2 + \dots + \\ + (a_{1r} x_1 + a_{2r} x_2 + \dots + a_{mr} x_m) v_r = 0 \end{aligned}$$

Como $v_1, v_2, \dots, v_r$ são LI então

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + \dots + a_{m1} x_m = 0 \\ a_{12} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{m2} x_m = 0 \\ \qquad \vdots \\ a_{1r} x_1 + a_{2r} x_2 + \dots + a_{mr} x_m = 0 \end{cases}$$

Temos, portanto, um sistema homogêneo com r equações e m incógnitas. Como $r \le n < m$, tal sistema admite uma solução não nula, ou seja, existe $x_i \ne 0$, para algum i. Portanto $w_1, w_2, \dots, w_m$ são LD.

Observação: Vem do teorema anterior que um conjunto LI em V terá no máximo n elementos.

Corolário: Qualquer base de um espaço vetorial V, terá sempre o mesmo número de elementos.

Demonstração: Sejam $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ e $\{w_1, w_2, w_3, \dots, w_m\}$ bases de um espaço vetorial V. Como $v_1, v_2, \dots, v_n$ geram V, então $m \le n$. Da mesma forma, os vetores $w_1, w_2, \dots, w_m$ geram V e portanto $n \le m$. Logo $m = n$.

Teorema 7: Qualquer conjunto de vetores LI de um espaço vetorial V de dimensão finita é parte de uma base de V, isto é, qualquer conjunto de vetores LI de um espaço vetorial de dimensão finita pode ser completado de modo a formar uma base para V.

Demonstração: Sejam $v_1, v_2, \dots, v_r$ vetores LI de um espaço vetorial V de dimensão finita n. Então $r \le n$. Se $V = [v_1, v_2, v_3, \dots, v_r]$ então $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_r\}$ é base para V e neste caso $r = n$. Se $v_1, v_2, \dots, v_r$ não geram V, então existe um vetor $v_{r+1} \in V$ tal que $v_{r+1} \notin [v_1, v_2, v_3, \dots, v_r]$. Afirmamos que os vetores $v_1, v_2, \dots, v_r, v_{r+1}$ ainda são LI. De fato, consideremos a equação

$$a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_rv_r + a_{r+1}v_{r+1} = 0$$

Observe que $a_{r+1} = 0$ pois se $a_{r+1} \neq 0$ teríamos

$$v_{r+1} = -\frac{a_1}{a_{r+1}}v_1 - \frac{a_2}{a_{r+1}}v_2 - ... - \frac{a_r}{a_{r+1}}v_r \quad \Rightarrow \quad v_{r+1} \in [v_1, v_2, v_3,..., v_r]$$

o que é um absurdo. Como $v_1, v_2, ... , v_r$ vetores LI segue-se que $a_1 = a_2 = ... = a_{r+1} = 0$ e portanto os vetores v_1 , v_2 , ... , v_r , v_{r+1} são LI. Se $V = [v_1, v_2, v_3,..., v_r, v_{r+1}]$ então o conjunto $\{v_1, v_2, v_3,..., v_r, v_{r+1}\}$ é base para V e neste caso $r + 1 = n$. Se não, existe outro vetor $v_{r+2} \in V$ tal que $v_{r+2} \notin [v_1, v_2, v_3,..., v_r, v_{r+1}]$. Prosseguindo desta forma, após um número finito de passos obteremos uma base para V.

Corolário: Se $dim\ V = n$, qualquer conjunto de vetores LI, com n elementos, é base para V.
Demonstração: Seja W um conjunto de vetores linearmente independente com n elementos. Pelo teorema anterior, este conjunto poderia ser completado de modo a formar uma base para V. Logo $dim\ V$ seria maior que n, o que é absurdo.

1.14 – Exemplo: Obtenha uma base para o $\Re^3$ a partir do vetor (1, 1, 0).

Teorema 8: Se U e W são subespaços vetoriais de um espaço vetorial V de dimensão finita, então:

i) $dim\ U \leq dim\ V$ e $dim\ W \leq dim\ V$

ii) $dim\ (U + W) = dim\ U + dim\ W - dim\ (U \cap W)$

Demonstração: Exercício

Teorema 9: Dada uma base $\beta = \{v_1, v_2, v_3,..., v_n\}$ de um espaço vetorial V, cada vetor se escreve, de modo único, como combinação linear dos vetores de β.
Demonstração: Exercício

Definição 2: Sejam $\beta = \{v_1, v_2, v_3,..., v_n\}$ uma base de um espaço vetorial V e $v \in V$. Os números a_1, a_2 , ..., a_n tais que $v = a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n$ são chamados de coordenadas do vetor v na base β e será denotada por

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

1.15 – Mudança de Base

Sejam $\beta = \{u_1, u_2, u_3,..., u_n\}$ e $\beta' = \{v_1, v_2, v_3,..., v_n\}$ bases de um espaço vetorial V. Se $v \in V$, então

$$v = x_1u_1 + x_2u_2 + ... + x_nu_n \qquad (1)$$

$$v = y_1v_1 + y_2v_2 + ... + y_nv_n \qquad (2)$$

Nosso problema é saber qual a relação que existe entre as coordenadas de v na base β com as coordenadas de v na base β'. Como β é base de V, podemos escrever cada vetor v_i como combinação linear dos vetores de β, isto é:

$$\begin{aligned}
v_1 &= a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \dots + a_{n1}u_n \\
v_2 &= a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \dots + a_{n2}u_n \\
&\vdots \\
v_n &= a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \dots + a_{nn}u_n
\end{aligned}$$

Substituindo na equação (2), obtemos:

$$\begin{aligned}
v = y_1(a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \dots + a_{n1}u_n) + y_2(a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \dots + a_{n2}u_n) + \dots + \\
+ y_n(a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \dots + a_{nn}u_n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v = (a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n)u_1 + (a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n)u_2 + \dots + \\
+ (a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n)u_n
\end{aligned}$$

Como as coordenadas de um vetor em relação a uma base são únicas, então

$$\begin{aligned}
x_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \\
x_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n \\
&\vdots \\
x_1 &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Logo,

$$[v]_\beta = [I]_\beta^{\beta'} [v]_{\beta'}$$

A matriz $[I]_\beta^{\beta'}$ é chamada de matriz de mudança de base de β' para β.

1.16 – Exemplo: 1) Seja V = $\mathbb{R}^3$ e $\beta = \{(1,0,-1),(1,1,1),(1,0,0)\}$ uma base ordenada de V. Determine $[(a,b,c)]_\beta$.

2) Seja $V = \wp^2$. Mostre que $\beta = \{1, 1+x, (1+x)^2\}$ é uma base para V e determine $[2 - x + 3x^2]_\beta$

Observações: 1) Suponhamos que escrevêssemos os elementos β como combinação dos elementos de β'. Então teríamos:

$$\begin{aligned}
u_1 &= a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \dots + a_{n1}v_n \\
u_2 &= a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \dots + a_{n2}v_n
\end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$u_n = a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \ldots + a_{nn}v_n$$

Substituindo na equação (1) acima, obtemos:

$$v = y_1(a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \ldots + a_{n1}v_n) + y_2(a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \ldots + a_{n2}v_n) + \ldots +$$
$$+ y_n(a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \ldots + a_{nn}v_n)$$

$$v = (a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n)v_1 + (a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n)v_2 + \ldots +$$
$$+ (a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n)v_n$$

Como as coordenadas de um vetor em relação a uma base são únicas, então

$$x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n$$
$$x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n$$
$$\vdots$$
$$x_1 = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Logo,

$$[v]_{\beta'} = [I]^{\beta}_{\beta'}\,[v]_{\beta}$$

A matriz $[I]^{\beta}_{\beta'}$ é chamada de matriz de mudança de base de β para β'.

2) As matrizes $[I]^{\beta'}_{\beta}$ e $[I]^{\beta}_{\beta'}$ são inversíveis e $\left([I]^{\beta}_{\beta'}\right)^{-1} = [I]^{\beta'}_{\beta}$.